Magistère d'Informatique et de Mathématiques
ENS de Cachan *Jeudi 4 Mai 2006*
TD de Théorie des Langages

Automates à pile

Exercice 1 (Exemples d'automates à pile)

1. Construire un automate à pile reconnaissant par pile vide le langage $L_0 = \{a^n b^p \mid 0 < n \leq p \leq 2n\}$.
2. Construire un automate à pile reconnaissant le langage de Dyck D_n^*.
3. Construire un automate à pile reconnaissant le langage $L_1 = \{w\widetilde{w} \mid w \in \Sigma^*\}$.

Exercice 2 (Ensembles calculables)
Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Z, T, q_0, z_0, F)$ un automate à pile.
Montrer que l'on peut effectivement calculer l'ensemble X suivant :

$$X = \{(p, x, q) \in Q \times Z \times Q \mid \exists\ (p, x) \xrightarrow{*} (q, \varepsilon)\}$$

En utilisant X, montrer que l'on peut effectivement calculer les ensembles Y et V définis ci-dessous.

$$Y = \{(p, x, q, y) \in Q \times Z \times Q \times Z \mid \exists\ (p, x) \xrightarrow{*} (q, hy)\}$$
$$V = \{(p, x) \in Q \times Z \mid \exists\ (p, x) \xrightarrow{\omega}\}$$

Exercice 3 (Variantes d'automates à pile)
Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, Z, T, q_0, z_0, F)$ un automate à pile.
- Montrer que l'on peut construire un automate à pile équivalent $\mathcal{A}'$ tel que $T' \subseteq Q' \times Z' \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q' \times Z^{\leq 2}$.
- Montrer que l'on peut construire un automate à pile $\mathcal{A}''$ équivalent à $\mathcal{A}$ tel que les mouvements de la pile sont uniquement du type *push* ou *pop* ou *skip*.

Exercice 4 (Autres exemples)
Construire un automate à pile reconnaissant le langage $\bar{L_1}$, où $L_1 = \{w\widetilde{w} \mid w \in \Sigma^*\}$.
Montrer que le complémentaire du langage $L_2 = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$ peut être accepté pas un automate à pile.

Exercice 5 (Le langage d'une pile est rationnel)
On considère des systèmes dont le fonctionnement peut être modélisé par une variante d'automate à pile qui n'a pas de canal d'entrée ; celui-ci évolue donc en fonction seulement de l'état de contrôle et de la lettre en haut de la pile.

Définition : Un *système à pile* S est un quadruplet $S = (Q, \Gamma, \delta, q_0)$ où Q, Γ, δ, q_0 sont respectivement, l'ensemble des états de contrôle, l'alphabet de pile, la relation de transition $\delta \subseteq (Q \times (\Gamma \cup \{\epsilon\})) \times (Q \times \Gamma^*)$, et l'état (de contrôle) initial.

Définition : Un *état* de S est un couple (q, α) où $q \in Q$ est un état de contrôle et $\alpha \in \Gamma^*$ un mot de pile. L'état initial de S est (q_0, ϵ). Un état (q', α') est *directement accessible* à partir d'un état (q, α), noté $(q, \alpha) \Rightarrow (q', \alpha')$,
si $\alpha = \beta a, \alpha' = \beta u'$ et $((q, a), (q', u')) \in \delta$. La fermeture réflexive et transitive de $\Rightarrow$ est notée $\overset{*}{\Rightarrow}$.

Notation : On notera une transition $((q, \epsilon), (q', a))$ par (q, a_+, q') ; de même une transition $((q, a), (q', \epsilon))$ sera notée (q, a_-, q').

Définition : Le *langage de la pile de S dans l'état q*, noté $L(S, q)$, est défini par :
$L(S, q) = \{\alpha \in \Gamma^* \,;\, (q_0, \epsilon) \overset{*}{\Rightarrow} (q, \alpha)\}$. Le *langage de la pile de S*, noté $L(S)$, est la réunion des $L(S, q)$ pour $q \in Q$.

1. Expliquer comment on peut simuler un système à pile S quelconque par un autre ayant une relation de transition dans $\{(Q \times \Gamma) \times (Q \times \{\epsilon\})\} \cup \{(Q \times \{\epsilon\}) \times (Q \times \Gamma)\}$.

   On considère dans toute la suite de l'exercice que δ satisfait cette contrainte et peut donc être représentée par un ensemble fini de triplets (q, x, q') où chaque $x \in \{a_-, a_+, b_-, b_+\}$ quand $\Gamma = \{a, b\}$. On associe alors à un système à pile $S = (Q, \Gamma, \delta, q_0)$ l'automate fini $S' = (Q', \Sigma', \delta', q'_0, F')$, défini de la manière suivante :
   - l'ensemble des états de contrôle Q' est égal à Q,
   - l'alphabet d'entrée, Σ', est égal à l'alphabet de pile Γ,
   - la relation de transition $\delta' \subseteq Q' \times (\Sigma' \cup \{\epsilon\}) \times Q'$ est la plus petite relation satisfaisant les conditions suivantes : si $(q, a_+, q') \in \delta$, alors $(q, a, q') \in \delta'$, et,
     si $((q, a_-, q') \in \delta$ et $(q'', a, q) \in \delta'^+)$ alors $(q'', \epsilon, q') \in \delta'$, où δ'^+ représente la fermeture transitive de δ',
   - l'état initial $q'_0 = q_0$,
   - l'ensemble F' des états finals est égal à Q'.

2. Soit S_1 le système à pile $S_1 = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta_1, q_1)$ où δ_1 est l'ensemble

   $$\{(q_1, a_+, q_2), (q_2, b_+, q_3), (q_3, b_-, q_1), (q_1, b_+, q_3)\}$$

   Dessiner S_1 et l'automate associé S'_1.

3. Montrer que (q, α) est accessible à partir de (q_0, ϵ) dans S si et seulement si q est accessible dans S' par le mot α.

4. Montrer que pour tout $q \in Q$, le langage $L(S, q)$ est rationnel ; en conclure que le langage de la pile, $L(S)$, est aussi rationnel.

5. Expliquer comment calculer δ' et prouver la terminaison de votre algorithme.