Élève 1 :

Cours : (4) Matrices dans une base orthonormale de E d'un automorphisme orthogonal et d'une symétrie orthogonale de E.

Exercice 1
Déterminer les éléments caractéristiques de la rotation de $\mathbb{R}^3$ définie par l'expression analytique suivante :

$$\begin{cases} 3x' = & -2x+2y+z \\ 3y' = & -2x+y+2z \\ 3z' = & x-2y+2z \end{cases}$$

Exercice 2 (Applications antisymétriques)

Soit E un ev euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ antisymétrique.

1. Montrer que $\mathrm{id}_E + f \in GL(E)$.
2. Montrer que $g = (\mathrm{id} - f) \circ (\mathrm{id} + f)^{-1} \in \mathcal{O}^+(E)$ et $\mathrm{id} + g$ est inversible.
3. Réciproquement, soit $h \in \mathcal{O}^+(E)$ tq $\mathrm{id} + h$ soit inversible. Montrer qu'il existe f antisymétrique tel que $h = (\mathrm{id} - f) \circ (\mathrm{id} + f)^{-1}$.

Élève 2 :

Cours : (5) Toute isométrie vectorielle de l'espace vectoriel euclidien E de dimension n $(n \geq 2)$ est une composée d'au plus n réflexions de E.

Exercice 3
Déterminer la matrice de la rotation $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ telle que $\mathcal{R}(\vec{u}) = \vec{u}$ avec $\vec{u}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et $\mathcal{R}(\vec{i}) = \vec{k}$. Donner son angle de rotation.

Exercice 4 (Matrices circulantes)
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Montrer que A est une matrice de rotation si et seulement si a, b, c sont les racines d'un polynôme de la forme $P = X^3 - X^2 + \lambda$ avec $\lambda \in \left[0, \dfrac{4}{27}\right]$.
La condition précédente étant réalisée, poser $\lambda = \frac{4}{27}\sin^2\varphi$ et déterminer les éléments géométriques de la rotation représentée par A dans une base orthonormée directe d'un espace vectoriel euclidien.

Élève 3 :

Cours : (6) Recherche de $SO_2(\mathbb{R})$.

Exercice 5
Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ une base orthonormée directe de E. Soit

$$\begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0-\alpha & \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que $I + S$ est inversible. On note

$$U = (I - S)(I + S)^{-1}$$

et u, s les endomorphismes dont les matrices dans $\mathcal{B}$ sont U et V. Montrer que u est une rotation d'axe $Vect(\vec{v})$, $\vec{v}$ étant le vecteur de coordonnées (α, β, γ) dans $\mathcal{B}$. Déterminer l'angle autour de $\vec{v}$ de cette rotation.

Exercice 6 (Condition pour que deux symétries commutent)
Soient H,K deux hyperplans de E eve, et s_H, s_K les symétries associées. Démontrer que s_H et s_K commutent si, et seulement si, $H = K$ ou $H^\perp \subset K$.

Exercice 7 (Transformations orthogonales sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

$E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire : $(A \mid B) = \text{tr}({}^tAB)$.

1. Vérifier que c'est un produit scalaire.
2. Soit $P \in \mathcal{O}(n)$. Montrer que les applications $\begin{cases} \phi_P : A \longmapsto AP \\ \psi_P : A \longmapsto P^{-1}AP \end{cases}$ sont orthogonales.
3. Réciproquement, si ϕ_P ou $\psi_P \in \mathcal{O}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, est-ce que $P \in \mathcal{O}(n)$?