Exercice 1 (Du concret !)
On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure naturelle d'eve.
On définit le plan $P : x - y + 2z = 0$ et le vecteur $\overrightarrow{u} : (2, 1, 1)$.

1. Calculer la distance entre $\overrightarrow{u}$ et P.
2. Calculer la projection de $\overrightarrow{u}$ sur P.

Exercice 2 (Déterminants de Gram)

1. Question préliminaire : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX = 0 \iff {}^tAAX = 0$.
   (b) En déduire que rg A = rg ${}^tAA$.
2. Soit E un espace vectoriel préhilbertien réel. Si $n \in \mathbb{N}^*$, et $x_1, \dots, x_n \in E$, on pose
$$G(x_1, \dots, x_n) = |(x_i|x_j)_{1 \leq i,j \leq n}|$$
   (a) Montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si et seulement si $G(x_1, \dots, x_n) \neq 0$. (d'abord en utilisant 1/, puis directement)
   (b) Montrer que si $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, alors $G(x_1, \dots, x_n) > 0$.
3. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille libre. On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(x_1, \dots, x_n)$. Établir la formule
$$\forall\, x \in E,\ d(x, F) = \sqrt{\frac{G(x, x_1, \dots, x_n)}{G(x_1, \dots, x_n)}}.$$

Exercice 3
Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

1. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Former une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ relativement à ce produit scalaire.
3. Calculer $\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \displaystyle\int_0^1 (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 dx$.

Exercice 4 (Théorème ergodique de Von Neumann)
Soit E un eve. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E est convergente si et seulement si il existe un élément l de E tel que la suite de réels $(||x_n - l||)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Soit u un endomorphisme de E tel que $\forall\, x \in E, ||u(x)|| \leq ||x||$, et on pose $v = u - id_E$.

1. Montrer que ker $v \oplus$ Im $v = E$.
2. Soit $x \in$ [Im $(u - id_E)]^\perp$. En évaluant $||u(x) - x||^2$, montrer que $x \in$ ker $(u - id_E)$. En déduire que ker $(u - id_E)$ et Im $(u - id_E)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.
3. Établir que $\forall\, x \in E$, la suite $(\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la projection orthogonale de x sur ker $(u - id_E)$.

Exercice 5
Dire si les applications suivantes sont des produits scalaires :
- $E = \mathbb{R}^2$, $(x, x') \mid (y, y') = axy + bxy' + cx'y + dx'y'$ (étudier $(1, t) \mid (1, t),\ t \in \mathbb{R}$).
- $E = \mathbb{R}^n$, $(x_1, \ldots, x_n) \mid (y_1, \ldots, y_n) = a\sum_i x_i y_i + b\sum_{i \neq j} x_i y_j$ $\Big($On montrera que $\left(\sum x_i\right)^2 \leq n \sum x_i^2\Big)$.
- $E = \mathbb{R}_n[X]$, $(P \mid Q) = \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i)$.

Exercice 6
Soit p un projecteur d'un espace euclidien E.
Montrer que p est orthogonal si et seulement si $\forall\, x \in E,\ ||p(x)|| \leq ||x||$.

Exercice 7 (Projection sur un sev de dimension finie)
Soit E un ev muni d'un produit scalaire (de dimensuib éventuellement infinie) et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille orthonormé de E. On note $F = \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_n)$.

1. Soit $x \in E$. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle^2 \leq ||x||^2$. Quand a-t-on égalité ?
2. Application : soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ continue. On appelle *coefficients de Fourier de* f les réels :

$$c_k(f) = \int_{t=0}^{2\pi} f(t)cos(kt)dt \quad \text{et} \quad s_k(f) = \int_{t=0}^{2\pi} f(t)sin(kt)dt.$$

   Démontrer l'inégalité de Bessel : $\displaystyle\int_{t=0}^{2\pi} f^2(t)dt \geq \frac{c_0(f)^2}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k(f)^2 + s_k(f)^2}{\pi}$.

Exercice 8 (Forme linéaire)
On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire $\langle P|Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$. Soit $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}; P \mapsto P(0)$.
Justifiez l'existence de $A \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\forall\, P \in \mathbb{R}_2[X], \varphi(P) = \langle A|P \rangle$.
Calculez A.

Cours : (4) Si F est un sev de l'eve E, alors E est somme directe de F et $F^\perp$, et $(F^\perp)^\perp = F$.

Cours : (1) Inégalitéde Cauchy-Schwarz vérifiée par un produit scalaire φ sur E ($\mathbb{R}$-espace vectoriel) : énoncé, démonstration et cas d'égalité.

Cours : (6) Isomorphisme canonique entre un eve E et son dual.