Élève 1 :

Cours : (3) Toute suite extraite d'une suite complexe de limite l a pour limite l.

Exercice 1
Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. La suite $([u_n])$ est-elle convergente ?

Exercice 2 (Théorème de Heine)
Dans cet exercice, nous allons chercher à démontrer le Théorème de Heine.

1. Énoncer le Théorème de Heine.
2. En raisonnant par l'absurde, démontrer le Théorème de Heine.

Élève 2 :

Cours : (7) Deux suites réelles adjacentes convergent et ont même limite.

Exercice 3
Comparer $\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\dfrac{n^k}{(n+1)^k}\right)$ et $\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{(n+1)^k}\right)$.

Exercice 4
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergeant vers a, b.

Montrer que $\dfrac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} ab$.

Élève 3 :

Cours : (5) La suite complexe $(e^{ina})_{n\in\mathbb{N}}$, a réel, converge si et seulement si $a = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5
On considère l'équation : $x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0$.

1. Prouver qu'il existe une unique racine positive, a_n.
2. Montrer que la suite (a_n) est décroissante.
3. Montrer que $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$ (calculer $a_n^{n+1} - 1$).

Exercice 6

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de réels. On pose : $\begin{cases} y_n = \sup\{x_p \text{ tq } p \geq n\} \\ z_n = \inf\{x_p \text{ tq } p \geq n\}. \end{cases}$

1. Montrer que les suites (y_n) et (z_n) convergent.
2. Montrer que (x_n) converge si et seulement si (y_n) et (z_n) ont même limite.

En plus...

Exercice 7

Soit (u_n) une suite réelle. On pose $v_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$.

1. Montrer que si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Montrer que si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$. ($\ell \in \overline{\mathbb{R}}$)
3. Donner un exemple où (v_n) converge mais (u_n) diverge.

Exercice 8

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites strictement positives telles que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.

Montrer que si $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 9

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$.

1. Montrer que u est strictement croissante, et v strictement décroissante.
2. Montrer que u et v convergent dans $\mathbb{R}$, ont même limite et que $\forall\, (n,m) \in {\mathbb{N}^*}^2,\ u_m \leq v_n$.
3. Montrer que les segments de rationnels $I_n = [u_n, v_n] \cap \mathbb{Q}$ sont emboîtés et d'intersection vide.
4. Montrer que $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.