## Élève 1 :

**Cours :** (1) Pour $e, f, g$ bases de $E, F, G$, $u$ dans $L(E, F)$ et $v$ dans $L(F, G)$, on a $Mat_{e,g}(v \circ u) = Mat_{f,g}(v) \times Mat_{e,f}(u)$.

**Exercice 1 (Théorème d'Hadamard)**
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,j}| > \displaystyle\sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que $A$ est inversible.

**Exercice 2**
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Chercher le rang des applications suivantes :
$f : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \to \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto AX \end{cases}$ $g : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \to \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto XB \end{cases}$ $h : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \to \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto AXB \end{cases}$

## Élève 2 :

**Cours :** (6) Pour $u$ dans $L(E, F)$ de rang $r$, il existe une base $e$ de $E$ et une base $f$ de $F$ telles que $Mat_{e,f}(u) = J_r$.

**Exercice 3**
Soit $n$ un entier naturel et $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall\,(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2, a_{i,j} = C_{j-1}^{i-1}$$

1. Interpréter la matrice $A$ comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dans la base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En déduire que la matrice $A$ est inversible et déterminer $A^{-1}$.

**Exercice 4**
Soit $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétriques$\}$ et $f : \begin{cases} \mathcal{A} & \to \mathcal{A} \\ M & \mapsto {}^tAM + MA \end{cases}$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme.
2. Quelle est la trace de $f$ ?

**Élève 3 :**

**Cours :** (4) Pour $e, e'$ et $e''$ bases de $E$, on a $P_e^{e''} = P_e^{e'} \times P_{e'}^{e''}$, et $P_e^{e'}$ est inversible d'inverse $P_{e'}^{e}$.

**Exercice 5**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $B = {}^tAA$.

1. Montrer que : $\forall\, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tYY = 0 \iff Y = 0$.
2. Montrer que : $\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), BX = 0 \iff X = 0$.
3. En déduire que rg$(A)$ =rg$(B)$.
4. Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que rg$(A)$ $\neq$rg$({}^tAA)$.

**Exercice 6**

Soit $n$ un entier naturel non nul, et $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. On pose $A = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Calculer $A^p$ pour tout entier naturel $p$.
2. Déterminer le noyau de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à $A$. En déduire le rang de $A$ selon les valeurs de $a$ et $b$.
3. Lorsque c'est possible, expliciter $A^{-1}$.