Élève 1 :

Cours : (4) Pour $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$, $|rg\, u - rg\, v| \leq rg\,(u+v) \leq rg\, u + rg\, v$

Exercice 1 (Système avec paramètre)
Étudier l'existence de solutions du système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & (1-m)z & = & m+2 \\ (1+m)x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & my & + & 3z & = & m+2 \end{array}\right.$$

Exercice 2
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soient f et g deux endomorphismes de E.

1. On suppose que f et g vérifient : $g \circ f = 0$ et $g + f = id_E$. Montrer que $rg\, f + rg\, g = n$.
2. On suppose que f et g vérifient : $rg\, f + rg\, g \leq n$ et $f + g = id_E$. Montrer que f et g sont des projecteurs.

Exercice 3

Étudier le système linéaire $AX = Y$, avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ et

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{C}).$$

Élève 2 :

Cours : (2) Pour $f_1, \dots, f_q$ dans F, il existe un unique $v \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall\, i, v(e_i) = f_i$.

Exercice 4
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3.

1. Soit f un endomorphisme de E tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$. Déterminer dim ker f.
2. Même question avec un endomorphisme g tel que $g^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

Exercice 5 (Système avec paramètre)
Étudier l'existence de solutions du système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 6
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. E = ker $f \oplus$ Im f
2. ker f^2 = ker f
3. Im f^2 = Im f

Élève 3 :

Cours : (3) Pour G supplémentaire de Ker u dans E, $U : x \in G \to u(x) \in$ Im u est un isomorphisme de de G dans Im u.

Exercice 7

Étudier le système linéaire $AX = Y$, avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ et

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{C})$.

Exercice 8 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est la différence de deux automorphismes.
On pourra traiter successivement les cas suivants :

1. $f \in \mathcal{GL}(E)$.
2. ker $f \oplus$ Im $f = E$.
3. Cas général. On pourra montrer l'existence d'un automorphisme u de E tel que $f \circ u$ vérifie les hypothèses de 2.