Élève 1 :

Exercice 1

Déterminer le rang r de la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (Polynômes d'endomorphismes)

Si $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $P(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k A^k$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $\varphi : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), P \mapsto P(A)$.
   (a) Montrer que φ est un morphisme d'algèbre.
   (b) Montrer que φ n'est pas injectif. En déduire l'existence d'un polynôme unitaire $\pi \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $\pi(A) = 0$. On fixe un tel polynôme et on pose $p = d^o\pi$.
2. **Application au calcul des puissances d'une matrice.**
   (a) Soit n un entier naturel. Montrer que pour calculer A^n, il suffit de calculer A^k pour $0 \leq k \leq p-1$.
   (b) **Exemples des matrices de taille 2×2.** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On pose $P = X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$, et on note λ et μ les racines complexes de P (distinctes ou non).
      i. Montrer que $P(A) = 0$.
      ii. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P.
      iii. En déduire une expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
      iv. Application : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Déterminer le rang de la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (a et b fixés dans $\mathbb{C}$)

Élève 2 :

Exercice 4 (Théorème d'Hadamard)
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ |a_{i,j}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.

Exercice 5
Déterminer le rang de la matrice suivante en fonction de la valeur de $a \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1+a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Exercice 6

Soit n un entier naturel non nul, et $(a,b) \in \mathbb{K}^2$. On pose $A = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Calculer A^p pour tout entier naturel p.
2. Déterminer le noyau de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. En déduire le rang de A selon les valeurs de a et b.
3. Lorsque c'est possible, expliciter A^{-1}.

Élève 3 :

Exercice 7
Soit n un entier naturel et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2, a_{i,j} = C_{j-1}^{i-1}$$

1. Interpréter la matrice A comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dans la base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 8

Déterminer le rang de la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 9 (Centre des matrices triangulaires supérieures unipotentes)
On note $\mathcal{G} = \{A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ tq } a_{i,j} = 0 \text{ si } i > j \text{ et } a_{i,i} = 1 \, \forall \, i\}$.

1. Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-groupe $\mathcal{GL}_n\mathbb{K}$.
2. Déterminer le centre de $\mathcal{G}$, et montrer que c'est un groupe isomorphe à $(\mathbb{K}, +)$.