Élève 1 :

Cours : (7) Théorème des quatre dimensions.

Exercice 1
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et (e_1, e_2, e_3) une base de E. On note u l'endomorphisme de E tel que $u(e_1) = e_2 - e_3$, $u(e_2) = e_3 - e_1$ et $u(e_3) = e_1 - e_2$.

1. Déterminer Im u et Ker u.
2. Montrer que Im u et Ker u sont supplémentaires dans E.
3. u est-il un projecteur ?

Exercice 2
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que dim ker $(f - id_E) = n - 1$. On pose $G =$ Im $(f - id_E)$.

1. Montrer que G est stable par f.
2. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\forall\, x \in G, f(x) = \lambda x$.
3. Montrer que $E =$ ker $(f - id_E) \oplus$ Im $(f - id_E)$
4. Pour tout vecteur x de E, exprimer $f^2(x)$ en fonction de x, $f(x)$ et λ.
5. Que peut-on dire si $\lambda = 0$?

Élève 2 :

Cours : (5) De tout système générateur de E, on peut extraire une base de E.

Exercice 3
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$ et ker $p =$ ker q. Montrer que $p = q$.

Exercice 4 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et u un endomorphisme de E tel que $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$.

1. Soit $x_0 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0$. Montrer que la famille $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$. Montrer que la famille $(u^i(x_0))_{n-k \leq i \leq n-1}$ est une base de ker u^k.
3. On pose $\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ u = u \circ f\}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
   (b) Montrer que $\psi : \mathcal{C} \to E, f \mapsto f(x_0)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
   (c) En déduire une base de $\mathcal{C}$.

Élève 3 :

Cours : (4) Tout endomorphisme s de E tel que $s \circ s = id_E$ est une symétrie de E.

Exercice 5
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Déterminer l'ensemble des couples (f, g) d'endomorphismes de E tels que : $\begin{cases} f \circ g = f \\ g \circ f = g \end{cases}$.

Exercice 6 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension. Établir que F et G admettent un supplémentaire commun dans E.