Élève 1 :

Cours : (4) Si $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ est un système libre de E et $x \in E$ tel que $S \cup \{x\}$ soit lié, alors il existe un unique n-uplet $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = a_1.x_1 + \dots + a_n.x_n$.

Exercice 1
Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ? (on précisera le corps de base)

1. $\{f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$
2. $\{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a\, u_n + b\, u_{n+1}\}$ (où a et b sont deux complexes fixés)
3. $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \exists (a, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a\cos(x + \theta)\}$

Exercice 2
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, G et H deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, $u \in \mathcal{L}(G, F)$ et $v \in \mathcal{L}(H, F)$.

1. Montrer qu'il existe un unique élément f de $\mathcal{L}(E, F)$ tel que $f_{|G} = u$ et $f_{|H} = v$.
2. Que dire de deux éléments g et h qui coincident sur G et H ?

Exercice 3
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

1. Montrer que $\ker f = \ker f^2 \iff \text{Im } f \cap \ker f = \{0_E\}$
2. Montrer que $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff \text{Im } f + \ker f = E$

Élève 2 :

Cours : (6) Si E_1 (resp. F_1) est un s.e.v. de E (resp. de F), et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $u(E_1)$ est un s.e.v. de F et $u^{-1}(F_1)$ est un s.e.v. de E.

Exercice 4
On considère l'espace vectoriel E des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$. On pose de plus

$$F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$$

et on note G l'ensemble des applications affines de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 5
Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $\varphi : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ f & \mapsto & \varphi(f) \end{array}$ définie par $\varphi(f) : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x.f(x) \end{array}$

1. Montrer que φ est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker \varphi$ et $\text{Im } \varphi$.

Exercice 6
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ tel que $u^2 - 3u + 2id_E = 0$.
Établir que $E = \ker\,(u - id_E) \oplus \ker\,(u - 2id_E)$

Élève 3 :

Cours : (3) Si E_1 et E_2 sont deux s.e.v. de E, alors $E_1 \cap E_2 = \{0_E\} \iff \forall x \in E_1 + E_2$, $\exists!(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.

Exercice 7

Soit $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R},$ et 2π-périodique$\}$
et $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f$ de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R},$ et 2π-périodique$\}$.
On considère enfin l'application $\varphi : E \to F$ telle que $\forall f \in E, \varphi(f) = f'$.

1. Montrer que E et F sont des espaces vectoriels.
2. Montrer que φ est une application linéaire.
3. Déterminer ker φ.
4. Montrer que Im $\varphi = \{f \in F$ telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0\}$.

Exercice 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \dots \lambda_n$ des scalaires deux à deux distincts. Soit enfin $(x_i)_{i \in \mathbb{N}_n} \in \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \ker (f - \lambda_i \, id_E)$.

Montrer que si la famille $(x_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ est liée (i.e. $\exists (\mu_i)_{i \in \mathbb{N}_n} \in \mathbb{K}^n \setminus 0_{\mathbb{K}^n} \, | \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i \, x_i = 0_E$), alors pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $x_i = 0_E$.