Élève 1 :

Cours : (1) Énoncé et preuve de la formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 1 (DES)
Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle suivante :
$P = \dfrac{X}{(X+1)(X-1)}$

Exercice 2
Étudier la suite de terme général $u_n = \left(\prod_{k=1}^{n}(n+k)\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 3 (Inégalité de Jensen)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue convexe. Montrer que

$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(t))dt.$$

Élève 2 :

Cours : (6) Existence de la partie polaire relative à un pôle d'une fraction rationnelle non nulle de $\mathbb{K}(X)$.

Exercice 4
Étudier la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n+k}{n^2+k^2}$.

Exercice 5
Soient f et g deux fontions numériques continues sur $[a,b]$. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) g\left(a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right)$$

Exercice 6 (DES)
Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle suivante :
$P = \dfrac{X^2}{(X^2+1)^2}$

Élève 3 :

Cours : Énoncé et preuve de la formue de Taylor avec reste d'Young.

Exercice 7
Soit $f\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, telle que les fonctions f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$. On pose $M_0=\sup_{t\in\mathbb{R}}|f(t)|$ et $M_2=\sup_{t\in\mathbb{R}}|f''(t)|$.

1. Montrer que pour tout réel x, et tout réel $h>0$, $|f'(x)|\leq\dfrac{M_0}{h}+\dfrac{hM_2}{2}$.
2. En déduire : $\sup_{t\in\mathbb{R}}|f'(t)|\leq\sqrt{2M_0M_2}$.

Exercice 8
Étudier la suite de terme général $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\frac{k\pi}{n+1}$.

Exercice 9 (DES)
Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle suivante :
$P=\dfrac{X^2+2}{X(X^2-1)^2}$

En plus...

Exercice 10
Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n} \sin\frac{k}{n^2}$.

Exercice 11 (DES)
Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle suivante :
$P = \dfrac{X^4}{(X+1)(X-1)^2}$

Exercice 12 (Formule de Taylor-Lagrange)
Soit $n \in \mathbb{N}$, a et b deux réels tels que $a < b$, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$, et amettant une dérivée $n+1$-ème sur $]a,b[$. A étant un réel fixé, on cnsidère la fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [a,b],\ \varphi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \frac{A}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}$$

1. Montrer qu'il est possible de choisir A de sorte que $\varphi(a) = 0$. Dans la suite, on suppose A choisi ainsi.
2. Montrer que φ est dérivable sur $]a,b[$; pour $x \in]a,b[$, donner une expression très simple de $\varphi'(x)$.
3. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $A = f^{(n+1)}(c)$.
4. En déduire que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

   Cette égalité est appelée la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n.
5. Que donne cette formule à l'ordre 0 ?