Élève 1 :

Cours : (4) Théorème de Gauss et relation entre PGCD(A,B), PPCM(A,B), et A.B : énoncés et démonstration.

Exercice 1 (Un calcul de $\zeta(2)$)
Soit n un entier naturel non nul. On pose $P = (X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}$.

1. Déterminer le degré de P, sa parité, et déterminer les coefficients de X^{2n} et X^{2n-2}.
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1}$.
4. Établir que $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\text{cotan}^2 x \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \text{cotan}^2 x$.
5. En déduire l'existence et la valeur de $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Élève 2 :

Cours : (1) Définition d'un plus petit commun multiple M de A et B. M divise tout multiple commun à A et B. Unicité de M.

Exercice 2 ($PGCD(X^n - 1, X^m - 1)$)
Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$, et $P = PGCD(X^n - 1, X^m - 1)$.

1. Soit $n = qm + r$ la division euclidienne de n par m. Démontrer que $X^m - 1 \mid X^n - X^r$.
2. En déduire que $P = PGCD(X^r - 1, X^m - 1)$, puis $P = X^{(n \wedge m)} - 1$.
3. A quelle condition $X^m - 1$ divise-t-il $X^n - 1$?

Exercice 3 (Polynômes positifs sur $\mathbb{R}$)
Soit $\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } \exists\, Q, R \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } P = Q^2 + R^2\}$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication.
2. Montrer que $\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } \forall\, x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0\}$.

Élève 3 :

Cours : (3) Les diviseurs communs à A et B sont ceux du PGCD(A,B), et homogénéité du PGCD.

Exercice 4 (Résolution dans $\mathbb{C}[X]$ de l'équation $A^2 + B^2 = C^2$)

1. Soit $(A, B, C) \in \mathbb{C}[X]^3$, A,B et C étant non constants. On suppose A,B et C premiers entre eux et tels que $A^2 + B^2 = C^2$.
   (a) Montrer que A,B et C sont deux à deux premiers entre eux.
   (b) Montrer que $C - B$ et $C + B$ sont premiers entre eux.
   (c) Montrer que $C - B$ et $C + B$ sont des carrés de polynômes.
2. En déduire les triplets (A, B, C) d'éléments de $\mathbb{C}[X]$ non constants tels que $A^2+B^2 = C^2$.