Élève 1 :

Cours : Preuve de l'existence de la primitive nulle en a (a dans I) d'une application complexe continue sur I.

Exercice 1
Soit f, g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in [a, b], f(x).g(x) \geq 1$. Établir l'inégalité suivante :

$$\int_a^b f(t)dt \int_a^b g(t)dt \geq (b-a)^2.$$

Exercice 2 (Formule de la moyenne généralisée)
Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues, f positive.

1. Démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt = g(c) \int_a^b f(t)dt$.
2. Si f ne s'annule pas, montrer que $c \in]a, b[$.
3. Application : soit f continue au voisinage de 0. Déterminer $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_0^x tf(t)dt$.

Élève 2 :

Cours : Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité pour f et g continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$: énoncés et démonstrations.

Exercice 3
On pose $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt$. À l'aide du changement de variable $u = \pi - t$, ramener le calcul de I à celui d'une intégrale plus simple, et en déduire la valeur de I.

Exercice 4 (Inégalité de Jensen)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue convexe. Montrer que

$$g\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g(f(t))dt.$$

Élève 3 :

Cours : Énoncés et démonstrations des théorèmes d'intégration par parties et de changement de variables.

Exercice 5
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour toute fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$. Montrer que f est identiquement nulle.

Exercice 6 Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs positives. Établir que

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\int_a^b [f(t)]^n dt\right]^{\frac{1}{n}} = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$