

Élève 1 :

Cours : (2) Stabilité par combinaison linéaire de l'ensemble S_K des solutions sur J de (E_0) à valeurs dans K et relation entre les solutions sur J à valeurs dans K de (E) et celles de (E_0) .

Exercice 1 (Equation fonctionnelle)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dérivables telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 2 Déterminer les intervalles d'étude des équations différentielles suivantes puis les résoudre. Étudier les problèmes de recollement.

1. $y' + 2ty = e^{t-t^2}$.
2. $\operatorname{sh}(t)y' - \operatorname{ch}(t)y = 1$
3. $(1 + e^t)y'' + y' - e^t y = 0$ (Indication : se ramener à une équation du premier ordre).

Élève 2 :

Cours : (4) Recherche d'une solution de (E) à valeurs dans \mathbb{K} quand a ne s'annule pas sur J .

Exercice 3 On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad (1 - t^2)y' + (2t + 1)y = 1.$$

1. Déterminer la solution homogène y_h associée.
2. Chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme du second degré.
3. En déduire l'ensemble des solutions générales.

Exercice 4

1. Calculer les réels a et b tels que pour tout réel x différent de 0 et de 4, on ait

$$\frac{x - 2}{x(x - 4)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 4}$$

2. Préciser dans chaque intervalle l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$x(x - 4)y' + (x - 2)y = 0$$

3. Quelles sont les fonctions continues et dérivables dans \mathbb{R} et vérifiant l'équation sur \mathbb{R} ?

Élève 3 :

Cours : (1) Pour a et b réels avec b non nul, recherche des primitives sur \mathbb{R} à valeurs complexes de $t \rightarrow \frac{1}{1-t-a-ib}$. Pour a réel non nul, primitives réelles de $t \rightarrow \frac{1}{t^2+a^2}$ et de $t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{t^2+a}}$ sur des intervalles à préciser.

Exercice 5 Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} (t^2 + 1)x' = tx + y + 2t^2 - 1 \\ (t^2 + 1)y' = x - ty + 3t \end{cases}$$

Exercice 6 Déterminer les intervalles d'étude des équations différentielles suivantes puis les résoudre. Étudier les problèmes de recollement.

1. $x(x + 1)y' + y = \arctan x$.
2. $(1 + x)y' + y = (1 + x) \sin x$.
3. $2x(1 - x)y' + (1 - 2x)y = 1$.