Élève 1 :

Cours : (1) Équivalents en 0 et en $\pm\infty$ d'une fonction polynômiale rélle non nulle.

Exercice 1 (Étude des racines d'une famille d'équations)

1. Montrer que l'équation cotan $x = \ln x$ possède, pour chaque entier naturel n, une unique racine x_n dans $]n\pi, (n+1)\pi[$, et que $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - n\pi) = 0$.
2. Montrer que $x_n - n\pi \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\ln n}$

Exercice 2 (Calcul de limites)

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x})^{\tan x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}}$
3. $\lim\limits_{x\to e}(\ln x)^{\tan\frac{\pi x}{2e}}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{m^x \sin mx - n^x \sin mx}{\tan nx - \tan mx}$ avec $(m,n) \in \mathbb{R}_+^{*2}, m \neq n$

Élève 2 :

Cours : (2) Si I contient 0 et f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ dérivable et nulle en 0, alors montrer que, si $f'(0)$ est non nul, $f(x)$ est équivalent en 0 à $f'(0).x$. Citer ensuite 10 applications de ce résultat.

Exercice 3 Soit u une fonction $u : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}^*$ dont 0 soit élément ou extrémité. On suppose que $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$, et que pour des réels $\lambda \in]0,1[$, $A \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \mathbb{N}^*$, on a : $u(x) - u(\lambda x) \underset{x\to 0}{\sim} Ax^a$.
Démontrer qu'alors $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{A}{1-\lambda^a}x^a$.
Application : considérer u définie sur $\mathbb{R}^*$ par $u(x) = 1 - \frac{\sin x}{x}$ et montrer que $x - \sin x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{6}$.

Exercice 4 Étudier les suites de terme général :

1. $u_n = \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$
2. $u_n = \left(\cos\frac{a}{n} + b\sin\frac{a}{n}\right)^n$ (a et b sont des réels fixés).

Élève 3 :

Cours : (5) Si f et g sont deux fonctions strictement positives et équivalentes de limite nulle (ou $+\infty$), alors $\ln(f)$ et $\ln(g)$ sont équivalentes.

Exercice 5 Soient u et v deux suites réelles telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. A-t-on ${u_n}^n \underset{n\to+\infty}{\sim} {v_n}^n$?

Exercice 6 Donner un équivalent simple des fonctions suivantes :

- au voisinage de 0 :
  - $x \mapsto (\cos x)^{\text{cotan}^2 x}$
  - $x \mapsto \arccos(1-x)$
  - $x \mapsto (1-\cos x)^{x^2} - x^{1-\cos x}$
- au voisinage de $+\infty$:
  - $x \mapsto \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1$
  - $x \mapsto \left(\frac{\arctan(x+1)}{\arctan x}\right)^x - 1$
  - $x \mapsto \left(\sin \frac{\pi x}{2x+1}\right)^{x^2}$

Exercice 7 (Famille de racines..)
On considère l'équation $\tan x = x$.

1. Montrer que cette équation admet une racine unique dans $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Donner un équivalent de x_n pour n tendant vers $+\infty$.