Magistère d'Informatique
ENS de Cachan
TD de Calculabilité et de Complexité

Pierre-Alain Reynier
6 novembre 2006

Fonctions récursives (2)

Exercice 1 (Hiérarchie de Grzegorczyk)
On définit par récurrence sur n la suite de fonctions primitives récursives $(\psi_n)_{n\geq 0}$ ainsi :

$$\begin{array}{rcl}\psi_0(m) & = & m+1 \\ \psi_{n+1}(0) & = & \psi_n(1) \\ \psi_{n+1}(m+1) & = & \psi_n(\psi_{n+1}(m))\end{array}$$

Montrer que :

1. Pour tous n, m, $\psi_n(m) \geq m+1$
2. Les fonctions ψ_k sont croissantes pour tout k
3. Pour tous n, m, k, $\psi_n(m) + k \leq \psi_{n+k}(m)$

Rappel : on note $\mathcal{C}$ est le plus petit ensemble de fonctions sur les entiers qui contient les fonctions initiales, l'addition, la multiplication, l'égalité et qui est clos par composition et minimisation (donc pas de récursion primitive).

Exercice 2
Montrer que la fonction J définie par :

$$J(x,y) = x + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$$

est une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$. On note $(K(z), L(z)) = J^{-1}(z)$ les fonctions réciproques. Montrer que $J, K, L \in \mathcal{C}$. Généraliser cette construction à $\mathbb{N}^k$.

Exercice 3
Montrer que les fonctions ou prédicats suivants sont dans $\mathcal{C}$:

1. conjonction, disjonction, négation de prédicats dans $\mathcal{C}$
2. Si $P, f_1, f_2 \in \mathcal{C}, f = \lambda n.$if $P(n)$ then $f_1(n)$ else $f_2(n)$
3. La soustraction entière : $x \setminus y = \max(0, x-y)$
4. L'inégalité $x \geq y$
5. $D(n,m)$ qui est satisfait si $n \neq 0$ et n divise m
6. rem(x,y) qui calcule le reste de la division euclidienne de x par y lorsque $y \neq 0$ (et est indéfini lorsque $y = 0$)
7. $\forall x \leq f(\overrightarrow{y}).P(x, \overrightarrow{y})$ et $\exists x \leq f(\overrightarrow{y}).P(x, \overrightarrow{y})$ où $P, f \in \mathcal{C}$.
8. $Prime(n)$ qui est satisfait par les nombres premiers.
9. $PP(n)$: "n est une puissance d'un nombre premier"

Exercice 4 (Récursion primitive comme itération)
Définissons l'ensemble des fonctions de codage ainsi :

– pour tout $k \geq 2$, les fonctions $< ., \ldots, . >_k$ codant les tuples de $\mathbb{N}^k$ sur $\mathbb{N}$,
– pour tout $k \geq 2$, et $1 \leq m \leq k$, les fonctions $\pi_{m,k}$ décodant un tuple de $\mathbb{N}^k$ codé sur $\mathbb{N}$ et retournant sa m-ème composante.

Par ailleurs, étant donnée h une fonction primitive récursive, définissons la fonction f suivante :

$$f(n,x) = h^{(n)}(x) = h(h(\ldots h(x)\ldots))$$

$f(n,x)$ est l'itérée n-ème de h appliquée à x.

Montrer que le plus petit ensemble de fonctions contenant les fonctions initiales (successeur, zéro, projection sur une composante), ainsi que les fonctions de codage définies plus haut, et qui de plus est clos par composition et itération, est exactement la classe des fonctions primitives récursives.

Indication : Si f est définie par récursion sur h, définir $s(n, \vec{x}) = < f(n, \vec{x}), n, \vec{x} >$, et montrer que s peut être définie comme une itération.

Exercice 5 (Point fixe)

– Montrer que l'on peut définir un codage des fonctions récursives dans les entiers, calculable par machine de Turing. On peut alors considérer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction récursive (partielle) f_n associée.
– Si g est une fonction récursive totale, montrer qu'il existe un indice m tel que $\forall x \in \mathbb{N}, f_m(x) = f_{g(m)}(x)$.

Exercice 6

Soit $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ la suite des nombres premiers et C l'application qui à une suite finie d'entiers $k_0, \ldots, k_n$ associe $p_0^{k_0} \times \cdots \times p_n^{k_n}$. C est une injection de l'ensemble des suites finies d'entiers dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que la fonction D définie par :

$$D(i,k) = \begin{cases} r_i + 1 & \text{si } \exists n.k = C(J(0,r_0), \ldots, J(n,r_n)) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est récursive primitive.

2. Soit A' la fonction définie par :

$$A'(n,m,k) = \begin{cases} m+1 & \text{si } n = 0 \\ D(J(n-1,1),k) & \text{si } n > 0, m = 0 \\ D(J(n-1, D(J(n,m-1),k)),k) & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que A' est récursive primitive.

3. Montrer que, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$,
   – si k est tel que $D(J(n,m),k) \neq 0$, alors $A(n,m) = A'(n,m,k)$
   – il existe un entier k vérifiant $D(J(n,m),k) \neq 0$

4. En déduire qu'il existe une fonction récursive primitive ϕ tels que, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$,

$$A(n,m) = \min\{x \in \mathbb{N} \mid \phi(n,m,x) = 0\}$$

A désigne la fonction d'Ackermann.