Magistère de Mathématiques et d'Informatique
ENS de Cachan
TD de Calculabilité et de Complexité

Pierre-Alain Reynier
25 septembre 2006

Machines de Turing

Exemples de machines.

Exercice 1 (Une machine de Turing)
Considérons la machine de Turing $M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, F)$ où :

$$\begin{cases} Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\} \\ \Gamma = \{a, b, X, Y, \#\} \\ \Sigma = \{a, b\} \\ B = \# \\ F = \{q_4\} \end{cases}$$

et la fonction de transition δ est définie par le tableau suivant (un $-$ signifie que la fonction de transition n'est pas définie) :

	a	b	X	Y	$\#$
q_0	(q_1, X, D)	$-$	$-$	(q_3, Y, D)	$-$
q_1	(q_1, a, D)	(q_2, Y, G)	$-$	(q_1, Y, D)	$-$
q_2	(q_2, a, G)	$-$	(q_0, X, D)	(q_2, Y, G)	$-$
q_3	$-$	$-$	$-$	(q_3, Y, D)	$(q_4, \#, D)$
q_4	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

Quel est le langage accepté par M ? Prouver la terminaison et la correction de la machine.

Exercice 2 (Quelques exemples de machines de Turing)

1. Construire une machine de Turing acceptant le langage $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$.
2. Construire une machine de Turing acceptant le langage $\{uc\overline{u} \mid u \in \Sigma^*\}$ si $\Sigma = \{a, b\}$.
3. Construire une machine de Turing acceptant le langage $\{u \in \{a, b\}^* \mid |u|_a = |u|_b\}$.
4. Construire une machine de Turing calculant $n + 1$ pour n donné en binaire sur le ruban d'entrée.
5. En utilisant ce qui précède, décrire une méthode qui permettrait de calculer $n + m$ avec une machine de Turing pour n et m donnés. On pourra supposer que n et m sont représentés en binaire et que sur le ruban d'entrée, ils se trouvent sous la forme nam où a est une nouvelle lettre. On pourra aussi supposer que $|n| \leq |m|$ ($|n|$ représente la longueur de la représentation binaire de n).

Variantes du modèle.

Exercice 3 (Machines avec un ruban bi-infini)
On considère les machines de Turing munies d'un ruban infini dans les deux sens : pour ces machines, la tête de lecture peut toujours se déplacer vers la gauche.

Montrer que tout langage accepté ou décidé par ce type de machine de Turing l'est aussi par une machine classique (dont le ruban est infini dans un seul sens).

Exercice 4 (Machines à plusieurs rubans)
Une machine de Turing à k rubans est un 7-uplet $M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, F)$ où Q, Γ, Σ, q_0, B et F ont leurs définitions inchangées par rapport aux machines de Turing classiques, mais où la fonction de transition δ est une fonction de $Q \times \Gamma^k$ dans $Q \times (\Gamma \times \{G, 0, D\})^k$.

Montrer que tout langage accepté par une machine de Turing à k rubans, l'est aussi par une machine à un seul ruban.

Exercice 5 (Alphabet de ruban minimal)
Montrer que tout langage récursivement énumérable sur l'alphabet $\{0, 1\}$ est accepté par une machine de Turing dont l'alphabet de ruban ne contient que trois symboles : 0, 1 et $\#$ ($\#$ représente ici le blanc du ruban).

Distraction.

Exercice 6 (Busy Beavers)
Le problème des "busy beavers" a été introduit par Rado, dans le but de définir "simplement" une fonction non calculable. Le modèle de machines de Turing considéré est le suivant : on suppose les machines déterministes, possédant un ruban bi-infini, un alphabet réduit au symbole $\{1\}$ (le symbole blanc est noté 0), et devant toujours se déplacer ou bien à gauche ou bien à droite (la machine ne peut pas rester sur place). On suppose de plus que les machines possèdent un unique état final, duquel aucune transition ne sort, et qui n'est pas compté parmi les états de la machine. Enfin, on considérera toujours un ruban initialement complètement blanc.
La fonction de Rado, notée $\Sigma(n)$, est définie comme le nombre maximum de 1 écrits sur la bande (pas nécessairement consécutifs) après qu'une machine à n états se soit arrêtée.

1. Calculer $\Sigma(1), \Sigma(2)$.
2. Montrer que $\Sigma(3) \geq 6$ (cette borne est en fait optimale).
3. Le modèle de fonction calculable considéré est le suivant : f est calculable ssi il existe une machine de Turing qui, sur un ruban contenant initialement n symboles 1 consécutifs à droite du symbole blanc de départ, s'arrête après un nombre fini de déplacements en produisant un bloc de $f(n)$ symboles 1 consécutifs. Montrer que la fonction de Rado n'est pas calculable.