Université Paris-Sud
Master d'Informatique (M1)

Année 2012-2013

Algorithmique Avancée : Programmation Linéaire
Responsables: A. Lisser, P. Valicov
Nombre de pages: 2

TD 3

Exercice I

Soit le programme linéaire

$$\begin{cases} \max & z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & x_1 - x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- Résoudre le programme linéaire à l'aide de la méthode des tableaux du simplexe.
- Déduire des tableaux les éléments nécessaires (matrice de base et son inverse...) pour l'algorithme du simplexe vu en cours.
- Résoudre graphiquement.
- Montrer que le vecteur transposé du gradient de la fonction objectif est une direction d'augmentation de celle-ci en tout point x^0. (Ind. utiliser le développement en série de Taylor de f au voisinage de x^0).

Exercice II

Soit le programme linéaire

$$\begin{cases} \max & z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \\ \text{s.c.} & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 8/3 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 7/3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

- Résoudre ce programme linéaire à l'aide de la méthode des deux phases puis avec la méthode du grand M.

Exercice III

Soient les programmes linéaires suivants:

$$\begin{cases} \max & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.} & x_1 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 \geq 6 \\ & -x_1 + x_2 = 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \max & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.} & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

- Résoudre ces deux programmes linéaires à l'aide de la méthode des deux phases. Conclusion.
- Faire une résolution graphique.

Exercice IV

Soit le programme linéaire suivant:

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^{n} s^{\underline{i}} x_i : \sum_{i=1}^{n} r^{\underline{i}} x_i \leq t, x \geq 0 \right\}.$$

où $\underline{i}$ signifie "puissance i" et s et r sont de paramètres tels que $0 < r < 1; s > 1, rs < 1$ et $(1-r)r < \frac{s-1}{s^{\underline{2}}}$ (e.g.$r = \frac{2}{5}, s = 2$).

- Montrer que si l'on prend comme solution de départ $x = 0$, la méthode du simplexe converge en exactement n itérations si la règle du pivotage est celle qui consiste à choisir la variable entrante dont l'indice j est tel que $\bar{c}_j = \min\{\bar{c}_k : k \in N\}$ ($\bar{c}$ est le vecteur des coûts réduits).
- Montrer que si le choix du pivot est celui qui consiste à prendre le coût réduit qui a le plus petit indice j, l'algorithme du simplexe converge en une seule itération.