Université Paris-Sud
Master d'Informatique (M1)

Année 2012-2013

Algorithmique Avancée : Programmation Linéaire
Responsables: A. Lisser, P. Valicov
Nombre de pages: 3

TD 2

Exercice I

Soit le programme linéaire dont le domaine réalisable est défini par :

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b, x \geq 0\}.$$

Si $b > 0$, suggérer une méthode facile pour trouver une solution de départ réalisable.

Exercice II

Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{lll} (a) & \min & -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 \\ & \text{s.c.} & -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12, \\ & & -x_1 + 2x_2 + x_4 - x_5 = 5, \\ & & x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_5 = 11, \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{array}$$

Supposons que x_3, x_4 et x_5 sont les variables de base et x_1 et x_2 sont les variables hors base.

- Ecrire les matrices de base et hors base B et N et donner la solution de base correspondante.
- Exprimer les variables de base en fonction des variables hors base.

Exercice III

Trouver le programme linéaire dual des problèmes suivants:

$$\begin{array}{lll} (a) & \min & 9x_1 + 6x_2 \\ & \text{s.c.} & 3x_1 + 8x_2 \geq 4, \\ & & 5x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ & & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

$$
(b) \quad \max \quad 4x_1 + 7x_2 \\
\text{s.c.} \quad 3x_1 + 5x_2 \leq 9, \\
8x_1 + 2x_2 \leq 6, \\
x_1, x_2 \geq 0.
$$

$$
(c) \quad \min \quad 9x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 100 \\
\text{s.c.} \quad 3x_1 + 8x_2 - 5x_3 \geq 14, \\
5x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 17, \\
x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \lesseqqgtr 0.
$$

En combinant (a) et (b), quelle est votre conclusion ?

Exercice IV

Une société de transport achemine un produit entre m dépôts et n destinataires. Supposons que a_i unités de ce produit sont disponible au dépôt i pour $i = 1, \ldots, n$ et b_j unités doivent être acheminées vers le destinataire j pour $i = 1, \ldots, m$. Supposons que la quantité totale disponible dans les dépôts est égale au total des demandes des destinataires. Le coût de transport d'une unité de i à j est c_{ij}. L'objectif est de minimiser le coût total.

- Formuler ce problème sous la forme d'un programme linéaire.
- Donner son dual.
- Etant donné $i = 3$ et $j = 4$, $a_1 = 3$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$; $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $b_3 = 2$ et $b_4 = 3$ et la matrice de coût suivante :

	1	2	3	4
1	7	2	-2	8
2	19	5	-2	12
3	5	8	-9	3

Ecrire explicitement le nouveau programme linéaire.

Exercice V

Soit le programme linéaire (PL) défini par:

$$
(PL) \quad \min \quad -x_1 - x_2 \\
\text{s.c.} \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\
x_1 + x_4 = 5, \\
x_1 + 4x_2 + x_5 = 16, \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.
$$

- Quelle est le nombre maximum de bases de (PL) ?
- Quel le nombre exact de bases de (PL) ? Explicitez toutes les bases. Parmi toutes les bases, lesquelles sont réalisables ?
- Considérons le point $x \in \mathcal{R}^2$ dont les coordonnées sont $x_2 = 4, x_4 = 5, x_1 = x_3 = x_5 = 0$.

  1. x est il réalisable pour (LP)?
  2. S'agit-il d'une solution de base réalisable ?
  3. S'agit-il d'une solution dégénérée ?