

Algorithmique Avancée : Programmation Linéaire

Responsables: A. Lisser, P.Valicov

Nombre de pages: 3

TD 1

Exercice I

Un administrateur d'un hôpital doit établir l'emploi du temps des infirmières satisfaisant les contraintes données par le tableau 1. Les tours de garde de jour pour les cinq premières équipes durent huit heures consécutives et ceux de la dernière équipe de garde (2.00 à 6.00) ne durent que quatre heures. L'administrateur cherche à trouver le nombre minimum d'infirmières à embaucher. Formuler ce problème sous forme de programme linéaire.

	1	2	3	4	5	6
Intervalle de temps	6 à 10	10 à 14	14 à 18	18 à 22	22 à 2	2 à 6
Nombre minimum d'infirmières	70	80	50	60	40	30

Table 1: Contraintes de l'emploi du temps

Exercice II

Un étudiant suit à la faculté d'Orsay les cinq cours suivants : Algèbre, Analyse, Physique, Chimie minérale et Chimie organique. En raison du nombre élevé d'étudiants qui suivent ces cours, quatre groupes de TD ont été organisés dans chaque discipline. Les horaires de ces groupes sont donnés dans le tableau suivant :

	Algèbre	Analyse	Physique	Chimie min.	Chimie org.
G1	Lundi (13 à 15)	Lundi (13 à 15)	Mardi (8 à 11)	Lundi (8 à 10)	Lundi (9 à 10:30)
G2	Mardi (10 à 12)	Mardi (10 à 12)	Mardi (10 à 13)	Lundi (8 à 10)	Lundi (10:30 à 12)
G3	Mercredi (10 à 12)	Mercredi (11 à 13)	Jeudi (15 à 18)	Jeudi (13 à 15)	Vendredi (11 à 12:30)
G4	Mercredi (11 à 13)	Jeudi (8 à 10)	Jeudi (17 à 20)	Vendredi (13 à 15)	Vendredi (13 à 14:30)

Dans chaque discipline, cet étudiant a exprimé sa préférence pour les différents groupes en attribuant à chacun d'eux une note entre 0 et 10. Cette note tient compte de l'horaire, et de la réputation de l'enseignant. Ces préférences sont exprimées dans le tableau 2 ci-dessous :

	Algèbre	Analyse	Physique	Chimie min.	Chimie org.
$G1$	5	4	3	10	0
$G2$	4	4	5	10	5
$G3$	10	5	7	7	3
$G4$	5	6	8	5	4

L'étudiant désire s'inscrire dans les cinq groupes de TD de façon à maximiser la somme de ses préférences. Il désire, en outre, respecter les trois contraintes suivantes :

- Ne pas s'inscrire à plus de quatre heures de TD par jour ;
- Disposer chaque jour d'une heure libre située entre 12h et 14h (pause déjeuner);
- Pouvoir pratiquer, au moins une fois par semaine, son sport favori qui a lieu le lundi de 13h à 15h, le mercredi de 11h à 13h et le mercredi de 13h à 15h.
- Ecrire le programme mathématique correspond à ce problème d'emploi du temps.
- Existe-t-il un emploi du temps dans lequel les TD sont groupés sur les trois jours, lundi, mardi et jeudi et où ils correspondent tous à une préférence supérieure ou égale à cinq ?

Exercice III

Le nombre chromatique d'un graphe $G = (X, U)$ est le nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorier les sommets du graphe de telle façon que deux sommets adjacents ne soient jamais de la même couleur.

Montrer que le problème de la recherche du nombre chromatique d'un graphe $G = (X, U)$ peut se modéliser comme un programme linéaire en nombres entiers. Les couleurs que l'on peut utiliser étant numérotées de 0 à k où k est le degré maximal des degrés des sommets du graphe, on prendra comme inconnues x_i le numéro de la couleur associée au sommet i .

Exercice IV

Ecrire les programmes linéaires suivants sous forme standard:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \min \quad & 4x_1 + \sqrt{2}x_2 - 0.35x_3 \\
 \text{s.c.} \quad & -0.001x_1 + 200x_2 \geq 7\sqrt{261}, \\
 & 7.07x_2 - 2.62x_3 \leq 4, \\
 & x_1, x_3 \geq 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b) \quad & \max \quad x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\
& \text{s.c.} \quad -2 \leq -5x_1 + 20x_2 \leq 40, \\
& \quad \quad x_2 \geq 0; x_3 \leq 10.
\end{aligned}$$

Exercice V

Soit le problème d'optimisation suivant:

$$\begin{aligned}
(a) \quad & \min \quad x_1^2 + x_2 + 4x_3 \\
& \text{s.c.} \quad x_1^2 - x_2 = 0, \\
& \quad \quad 2x_2 + 4x_3 \geq 4, \\
& \quad \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

- Le programme (a) est il un programme linéaire ?
- Résoudre ce problème en le transformant en un programme linéaire équivalent ?
- Ecrire ce programme linéaire sous forme standard.