TD 6 – Grand-mère a un pacemaker

Exercice 1. *Échauffements*

Donner des automates à pile reconnaissant les langages suivants par état final, et justifier leur correction :

1. $L_1 = \{u \in \{a,b\}^*,\ |u|_a = |u|_b\}$.
2. $L_2 = \{u \in \{a,b\}^* : |u|_a = 2|u|_b\}$;
3. $L_3 = \{a^i b^j c^k : i \neq j \text{ ou } j \neq k\}$;
4. $L_4 = \{ba^{i_1}ba^{i_2}ba^{i_3}b\dots ba^{i_k}b : k \geq 1, \forall j \in [1,k]\ i_j \geq 1, \exists l \in [1,k] \text{ t.q. } i_l = l\}$;
5. L_5 le langage engendré par la grammaire suivante :
   $S \longrightarrow aTb|\varepsilon$
   $T \longrightarrow Ta|\varepsilon$
   (attention, on demande de suivre la méthode donnée dans la preuve de "Tout langage reconnu par une grammaire hors-contexte est reconnu par un automate à pile")

Exercice 2. *État vide ou pile finale*

Pour un automate à pile, on appelera configuration de l'automate, un triplet (q,p,m) où q est l'état courant, $p \in \Gamma^*$ est le mot sur la pile et $m \in \Sigma^*$ est le mot qu'il reste à lire en entrée.
On définit les automates à pile reconnaissant par pile vide. Ce sont des automates à pile classiques qui commencent avec une lettre \$ dans leur pile (*i.e.* dans la configuration : $(q_0, \$, m)$) et qui acceptent le mot m s'ils atteignent la configuration (q, ϵ, ϵ).

✎ Montrer que les acceptations par pile vide et par état final sont équivalentes.

Exercice 3. *J'aime les BN*

1. Donner un automate à pile déterministe reconnaissant le langage suivant :

$$L = \{a^m b^n c^{2(m+n)} | n,m \geq 0\}$$

2. Prouver la correction de votre automate.

Exercice 4. *Collision avec Descartes*

Montrer que l'intersection d'un langage algébrique et d'un langage rationnel est algébrique.