TD 2

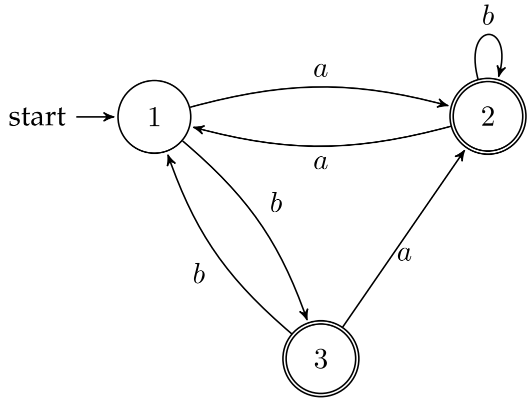
Exercice 1. *Nuit étoilée*

Montrer que les langages suivants ne sont pas rationnels

1. $L_3 = \{a^n b^n | n \geq 0\}$
2. $L_4 = \{1^{n^2} | n \geq 0\}$

Exercice 2. *C'est du chinois...*

Donner une expression rationnelle pour le langage reconnu par l'automate ci-dessous (utiliser l'algorithme vu en cours) :



Exercice 3. *Pause café*

Donner des automates finis qui reconnaissent les langages suivants.

1. $L_1 = \{a^{32n} | n \in \mathbb{N}\}$.
2. $L_2 =$ ensemble des mots qui ne possèdent pas trois a consécutifs et qui ont un nombre pair de b.

Exercice 4. *On va morph...ler*

Soit Σ un alphabet fini. Un morphisme $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ est une application vérifiant, pour tous mots u, v, $h(uv) = h(u)h(v)$. Ainsi, un morphisme est défini dès qu'on se donne les images des mots à une lettre. Si L est un langage sur l'alphabet Σ et h un morphisme, on note $h(L)$ l'ensemble $\{h(u) | u \in L\}$.

1. Décrire $h(L)$ dans les cas suivants, où l'alphabet est $\Sigma = \{a, b\}$.
   - $h(a) = ab$, $h(b) = \epsilon$, $L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$.
   - $h(a) = ab$, $h(b) = abab$, L est défini par l'expression rationnelle b^*ab^*.
2. Soit L un langage et h un morphisme. Montrer que L rationnel implique $h(L)$ rationnel. indice : exprime-toi de façon rationnelle.

Pour un langage L et un morphisme h sur l'alphabet Σ, on note $h^{-1}(L)$ l'ensemble $\{v \in \Sigma^* | h(v) \in L\}$.

3. Donner une expression de $h^{-1}(L)$ dans les cas suivants.
   - $\Sigma = \{a, b\}$, $h(a) = a$, $h(b) = ab$, $L = \{a^i b^j | i \geq j\}$.

– $\Sigma = \{a, b, c\}$, $h(a) = a$, $h(b) = ab$, $h(c) = ba$, L défini par $a(ba)^*$.

4. Soit L un langage et h un morphisme. Montrer que L rationnel implique $h^{-1}(L)$ rationnel.

Exercice 5. *Toi, tu t'ennuies...*

Soit L un langage rationnel sur un alphabet Σ. Montrer que les langages suivants sont rationnels.

1. $\frac{1}{2}L = \{x \in \Sigma^*, \exists y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = |x|\}$

2. $\mathrm{SWAP}(L) = \{a_2a_1a_4a_3 \ldots a_{2n}a_{2n-1} | a_1a_2 \ldots a_{2n} \in L,\ a_i \in \Sigma\}$

3. $\mathrm{UN\_SUR\_DEUX}(L) = \{a_1a_3 \ldots a_{2n-1} | a_1a_2 \ldots a_{2n} \in L,\ a_i \in \Sigma\}$