Partiel - durée : 2h
(documents issus du cours autorisés)

Exercice 1. *Hamming*

On travaille sur l'alphabet $\{0, 1\}$. La distance de Hamming $H(x, y)$ entre deux mots x et y est le nombre de positions qui les distinguent, par exemple $H(110, 011) = 2$. Si $|x| \neq |y|$, alors leurs distance de Hamming est infinie. Si x est un mot et A est un langage sur $\{0, 1\}$, la distance de Hamming entre x et A est la distance entre x et le mot le plus proche de x dans A :

$$H(x, A) := min_{y \in A} H(x, y)$$

Pour un langage $A \subseteq \{0, 1\}^*$ et $k \geq 0$, on définit l'ensemble de mots de distance de Hamming au plus k de A :

$$N_k(A) := \{x | H(x, A) \leq k\}$$

Prouvez que si A est un langage régulier alors $N_k(A)$ est régulier.

Exercice 2. *Étoile*

Parmi les langages suivants il y a *au moins un* langage algébrique et *au moins un* non-algébrique. Choisissez deux langages tels que un est algébrique et l'autre non et démontrez le (pour montrer qu'un langage est non-algébrique vous utiliserez le lemme de l'étoile pour les langages hors-contexte) :

- $\{w \in \{a, b\}^*$ tels que $|w|_b = 2|w|_a + 3\}$
- $\{w\#x \mid w, x \in \{a, b\}^*$ et w est un sous-mot de $x\}$.
- $\{a^p \mid p$ est premier$\}$.
- $\{a^{n_0} b a^{n_1} b \cdots a^{n_k} b | k \geq 0$ et $\exists j \geq 0, n_j \neq j\}$

Tournez svp.

Exercice 3. *La grammaire de Sheila*

Définition 1. *Une grammaire hors-contexte* $G = (V, \Sigma, P, S)$ *est sous* forme normale de Greibach *si toutes ses règles sont de la forme*
i) $A \to aB_1 \dots B_n$
ii) $A \to a$
iii) $S \to \epsilon$
Où $B_1, \dots, B_n \in V - \{S\}$ *et* $a \in \Sigma$.
On l'appelle également forme m-standard *lorsque* $n \leq m$ *pour toutes les règles.*

Nous allons prouver le théorème suivant

Théorème 1. *Tout langage hors-contexte peut être généré par une grammaire hors-contexte sous forme normale de Greibach.*

1. Montrer le lemme suivant

   Lemme 1 (substitution). *Soit* $G = (V, \Sigma, P, S)$ *une grammaire hors-contexte,* $\pi = A \to \alpha_1 B \alpha_2$ *une production de* P *avec* $B \to \beta_1 | \dots | \beta_r$ *la règle de* P *avec* B *à gauche. Soit* $G_1 = (V, \Sigma, P_1, S)$ *avec*

   $$P_1 = (P - \{\pi\}) \cup \{A \to \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 | \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 | \dots | \alpha_1 \beta_r \alpha_2\}$$

   alors $L(G_1) = L(G)$.

2. Montrer le lemme suivant

   Lemme 2 (inversion). *Soit* $G = (V, \Sigma, P, S)$ *une grammaire hors-contexte ne produisant pas le mot vide et*

   $$A \to A\alpha_1 | \dots | A\alpha_r$$

   avec $\alpha_i \neq \epsilon$ *pour tout* i*, l'ensemble des règles avec* A *en tête telles que le symbole le plus à gauche du corps soit* A*. Soit*

   $$A \to \beta_1 | \dots | \beta_s$$

   l'ensemble des règles restantes avec A *en tête. Soit* $G_1 = (V \cup \{Z\}, \Sigma, P_1, S)$*, où* Z *est un nouveau symbole non-terminal et* P_1 *l'ensemble des productions de* P *avec toutes les production avec* A *en tête remplacées par*

   $$A \to \beta_1 Z | \dots | \beta_s Z | \beta_1 | \dots | \beta_s$$
   $$Z \to \alpha_1 Z | \dots | \alpha_r Z | \alpha_1 | \dots | \alpha_r$$

   alors $L(G_1) = L(G)$.

Sans perte de généralité, on partira d'une grammaire $G = (V, \Sigma, P, S)$ sous forme normale de Chomsky, telle que S n'apparaît dans aucun membre droit. **Supposons pour le moment que G ne produit pas le mot vide**.

3. Soit $V = \{A_1, \dots, A_m\}$ avec $S = A_1$. L'ensemble des règles de production peut être classé en deux catégories

$$A_i \to BC \text{ avec } B, C \in V \setminus \{S\}$$
$$A_i \to a$$

Construisez une grammaire équivalente dont les règles de production peuvent être classées en trois catégories

(a) $A_i \to A_j\alpha$ avec $i < j, \alpha \in ((V - \{S\}) \cup \{Z_1, \ldots, Z_n\})^+$
(b) $A_i \to a\alpha$ avec $a \in \Sigma, \alpha \in ((V - \{S\}) \cup \{Z_1, \ldots, Z_n\})^*$
(c) $Z_i \to \alpha$ avec $\alpha \in ((V \cup \Sigma - \{S\}) \cup \{Z_1, \ldots, Z_n\})^+$

Indication : On pourra construire la grammaire par récurrence sur k avec la propriété que toutes les règles dont le membre gauche est A_i sont soit de la forme (a), soit de la forme (b), pour $i \leq k$.

4. Toujours sous l'hypothèse que le mot vide n'appartient pas au langage, conclure.

5. Conclure si de plus ϵ est dans le langage.

6. En quoi la forme normale de Greibach est-elle intéressante ?

7. Mettre la grammaire suivante sous forme normale de Greibach

$$A_1 \to A_2A_3$$
$$A_2 \to A_1A_2|1$$
$$A_3 \to A_1A_3|0$$

Tournez svp.

Exercice 4. *Analyse Syntaxique*

Soit $G = (V, \Sigma, R, S)$ une grammaire hors-contexte sans production vide. On appelle couple pointé pour un mot $w = a_1 a_2 \dots a_n$ l'élément $[A \to \alpha \bullet \beta, i]$ où $i \in [0, n]$, le point $\bullet \notin \Sigma \cup V$ est un symbole spécial et $A \to \alpha\beta$ est une règle de production de R.

Soit l'algorithme d'analyse syntaxique suivant :

Algorithm 1: Algorithme *Earley*

Données: Grammaire hors-contexte $G = (V, \Sigma, R, S)$ sans production vide, un mot $w = a_1 a_2 \dots a_n \in \Sigma^*$

Sorties: Des listes d'analyse $L_0, L_1, \dots, L_n$ pour w

Résultat: $w \in L(G)$ si et seulement si $[S \to \alpha \bullet, 0] \in L_n$

début

Construction de la liste L_0 :

1 **si** $S \to \alpha \in R$ **alors**
 mettre $[S \to \bullet\alpha, 0]$ dans L_0

Exécuter ensuite les étapes 2 et 3 tant qu'elles ajoutent un élément dans L_0 :

2 **si** $[B \to \gamma\bullet, 0] \in L_0$ **alors**
 pour chaque *couple pointé* $[A \to \alpha \bullet B\beta, 0] \in L_0$ **faire**
  mettre $[A \to \alpha B \bullet \beta, 0]$ dans L_0

3 **si** $[A \to \alpha \bullet B\beta, 0] \in L_0$ **alors**
 pour chaque *règle de R de la forme* $B \to \gamma$ **faire**
  mettre $[B \to \bullet\gamma, 0]$ dans L_0

Construction des listes L_j à partir de $L_0, L_1, \dots, L_{j-1}$:

4 **pour chaque** $[B \to \alpha \bullet a_j\beta, i] \in L_{j-1}$ **faire**
 mettre $[B \to \alpha a_j \bullet \beta, i]$ dans L_j

Exécuter ensuite les étapes 5 et 6 tant qu'elles ajoutent un élément dans L_j :

5 **si** $[B \to \gamma\bullet, i] \in L_j$ **alors**
 pour chaque *couple pointé* $[A \to \alpha \bullet B\beta, k] \in L_i$ **faire**
  mettre $[A \to \alpha B \bullet \beta, k]$ dans L_j

6 **si** $[A \to \alpha \bullet B\beta, i] \in L_j$ **alors**
 pour chaque *règle de R de la forme* $B \to \gamma$ **faire**
  mettre $[B \to \bullet\gamma, j]$ dans L_j

fin

---

1. Faites dérouler l'algorithme pour le mot $(a + b) = b$ et la grammaire suivante :
   $S \to (S) \mid R$
   $R \to E = E$
   $E \to (E + E) \mid a \mid b$
2. Expliquez qu'est-ce que signifie un élément $[A \to \alpha \bullet \beta, i] \in L_j$.