DM FDI - Automates finis

A rendre pour le vendredi 15 novembre 2013 à 16h dans le casier de votre chargé de TD.

Soit L un langage sur un alphabet Σ. Quelques notations, où a et b sont des lettres de Σ (non nécessairement distinctes).

prefixe : $a \in \mathcal{P}(L) \quad \Leftrightarrow \quad a \in \Sigma$ et $a\Sigma^* \cap L \neq \emptyset$

suffixe : $a \in \mathcal{S}(L) \quad \Leftrightarrow \quad a \in \Sigma$ et $\Sigma^* a \cap L \neq \emptyset$

facteur : $ab \in \mathcal{F}(L) \quad \Leftrightarrow \quad ab \in \Sigma^2$ et $\Sigma^* ab \Sigma^* \cap L \neq \emptyset$ non facteur : $\mathcal{N}(L) = \Sigma^2 \setminus \mathcal{F}(L)$

Langages Locaux.
Un langage L sur Σ est dit *local* si $L \setminus \{\epsilon\} = (\mathcal{P}(L)\Sigma^* \cap \Sigma^*\mathcal{S}(L)) \setminus \Sigma^*\mathcal{N}(L)\Sigma^*$.

1. Montrer que tout langage local est rationnel.

2. $(abc)^*$ est-il local ? et a^*ba ?

3. Les langages locaux sont-ils stables par union ? par concaténation ?

Un morphisme strictement alphabétique est une application $\varphi : X^* \to Y^*$ telle que
- $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$
- pour tout $a \in \Sigma$, $|\varphi(a)| = 1$

4. Montrer que tout langage rationnel L est l'image d'un langage local par un morphisme strictement alphabétique. (indication : on pourra utiliser un AFD ou un AFND qui reconnait L et utiliser l'alphabet $Q \times \Sigma \times Q$)

Automates locaux.
Un AFD $\mathcal{A} = (Q, i, F, \delta)$ est dit *local* si $\forall a, \exists q$ tq $\forall q', \delta(q', a) = q$ ou est indéfini [1].

5. Montrer que tout langage local sur un alphabet Σ est reconnu par un automate local standard, dont l'ensemble des états est $\Sigma \cup \{\epsilon\}$.

6. Réciproquement, montrer que tout langage reconnu par un automate local est lui-même local.

7. Soit L_1 et L_2 deux langages locaux sur des alphabets X et Y disjoints. Montrer que $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cdot L_2$ et L_1^* sont des langages locaux.

Algorithme de Berry-Sethi
Une expression rationnelle e sur un alphabet Σ est dite *linéaire* si chaque lettre de Σ possède au plus une occurrence dans e.

8. Comment construire très facilement un alphabet Σ' et un morphisme alphabétique $\varphi : \Sigma' \cup \{(,), +, *\} \to \Sigma \cup \{(,), +, *\}$ avec $\varphi(+) = +$, $\varphi(*) = *$, $\varphi(() = ($ et $\varphi()) =)$ tel que pour toute expression rationnelle e, il existe une expression rationnelle linéaire e' sur Σ' vérifiant $\varphi(e') = e$.

9. Soit e une expression rationnelle linéaire. Montrer que $L(e)$ est un langage local.

10. Que pensez-vous de la réciproque : si e est une expression rationnelle et $L(e)$ est un langage local alors e est linéaire ?

1. C'est à dire que les transitions étiquetées par une lettre a donnée arrivent toutes dans un même état, qui ne dépend donc que de a.

11. Définir par induction structurelle :
- $\lambda : e \mapsto \{\epsilon\} \cap L(e)$
- $P : e \mapsto \mathcal{P}(L(e))$
- $S : e \mapsto \mathcal{S}(L(e))$
- $F : e \mapsto \mathcal{F}(L(e))$

Voici l'algorithme de Berry-Sethi qui permet d'associer à une expression rationnelle e un automate fini reconnaissant $L(e)$:

(a) Construire une version linéaire e' de e, en mémorisant l'encodage alphabétique ;

(b) Construire $P(e')$, $S(e')$ et $F(e')$;

(c) Construire un AFD $\mathcal{A}'$ reconnaissant $L(e')$;

(d) Décoder les étiquettes des transitions de $\mathcal{A}'$ pour obtenir un AFD reconnaissant $L(e)$.

12. Appliquer Berry-Sethi à $((ab(ac)^* + ca)^*b)^*$.

Voici la phrase qui conclut l'article [2] dont est tiré le DM de taupe dont est tiré ce DM :
"Berry and Sethi have given an unusual proof of a well-known result, namely that every rational language is the homomorphic image of a local language."

2. cosigné par Jean BERSTEL et Jean-Éric PIN