TD 2 : Algèbre et fonctions booléennes

L'algèbre de Boole

- C'est un ensemble muni de deux lois de compositions internes (respectivement AND/. et OR/+) et d'une loi de complémentation ($\bar{}$)
- Les lois de compositions internes vérifient
  - la commutativité
    $a + b = b + a, \quad a.b = b.a$
  - la distributivité . sur +
    $a.(b + c) = a.b + a.c$
  - la distributivité + sur .
    $a + (b.c) = (a + b).(a + c)$
  - l'existence d'un élément neutre
    $a + \mathbf{0} = a, \quad a.\mathbf{1} = a$
  - les lois de complémentation
    $a + \bar{a} = 1, \ a.\bar{a} = 0$
- L'algèbre de Boole va permettre d'effectuer des calculs mathématiques à partir de fonctions logiques fondamentales.

Les propriétés fondamentales

- Les éléments absorbants

$$a + 1 = 1$$

$$a.0 = 0$$

- La loi d'involution

$$\bar{\bar{a}} = a$$

- Les lois d'idempotence

$$a + a = a$$

$$a.a = a$$

- Les lois d'absorption

$$a + (a.b) = a$$

$$a.(a + b) = a$$

- Les théorèmes de De Morgan

$$\overline{a + b} = \bar{a}.\bar{b}$$

$$\overline{a.b} = \bar{a} + \bar{b}$$

Algèbre booléenne

63.7° N 87.4° W. Coordinates of the Boole lunar crater.

1. Dites ce qu'est un littéral, un monôme (parfois appelé aussi un minterme), un monal (ou maxterme), un polynôme.
2. Dites ce qu'est un monôme canonique (parfois appelé minterme complet).
3. Quelle est la différence entre une fonction booléenne et une expression booléenne ?

Théorème 1 (Shannon) *Soit une fonction* $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$. *Alors :*
$f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i.f(x_1, x_2, \ldots, 1, \ldots, x_n) + \bar{x}_i.f(x_1, x_2, \ldots, 0, \ldots, x_n)$ *et*
$f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = (\bar{x}_i + f(x_1, x_2, \ldots, 1, \ldots, x_n)).(x_i + f(x_1, x_2, \ldots, 0, \ldots, x_n))$

Le théorème de Shannon, appliqué récursivement, permet d'obtenir automatiquement, à partir d'une fonction booléenne donnée par sa table de vérité, une expression booléenne de cette fonction sous forme dite canonique.

4. Mettez sous formes disjonctive et conjonctive les expressions suivantes. Comment les construire dans le cas général ? Quel est leur intérêt ? Quelle est leur taille ? Pour une fonction booléenne donnée, laquelle choisir a priori ?
   – $(x.y) + (x.(z + t))$
   – $(x + y).(x + (z.t))$
   – $(x.y.t) + (y.t)$
5. (*Bonus*) Prouvez la loi de De Morgan : $\overline{(xy)} = \bar{x} + \bar{y}$. (Astuce : utilisez les équivalences ensemblistes)

Le code de Gray

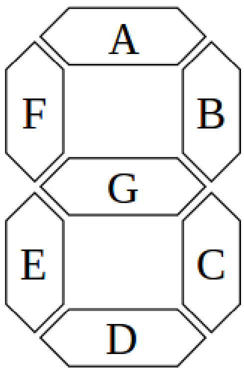
Can be printed in black and white.

Le code de Gray sur n bits permet de coder les nombres entre 0 et $2n - 1$ de telle sorte que le codage de deux nombres consécutifs ne diffère que d'un seul bit. Par exemple un codage de Gray sur trois bits donne les codes : 000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100. Un tel codage s'appelle aussi binaire réfléchi.

1. À quoi sert-il ?
2. Écrivez une procédure récursive donnant un codage de Gray d'un nombre quelconque de bits.

L'afficheur 7 segments

Every bomb should have it.



1. Combien de segments a l'afficheur 7 segments ?
2. Combien de bits faut-il pour coder un chiffre de 0 à 9 en binaire ? On complètera avec un afficheur éteint.
3. Dessinez les 10 chiffres dans cet afficheur et définissez la fonction booléenne à implémenter pour décoder et afficher un chiffre.
4. Traduisez-la sous forme d'expression booléenne.
5. Minimisez l'expression booléenne.
6. Comment optimiser encore ?

La représentation par tableau de Karnaugh

K-me ! (Only works for me=Arnaud)

– Si f est une fonction logique à n variables chaque cellule du tableau de Karnaugh représente une ligne de la table de vérité.
– Donc le tableau contient 2^n cellules :

a	b	$f(a,b)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

	0	1
0	1	0
1	1	1

b en colonne
a en ligne

- On utilise le code de Gray pour qu'entre deux cellules adjacentes du tableau une seule variable change d'état
- Cette représentation est acceptable pour des fonctions à $n < 7$ variables.
- Tableau de Karnaugh à 4 variables

a, b	00	01	11	10	c, d
00	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}d$	$\bar{a}\bar{b}cd$	$\bar{a}\bar{b}c\bar{d}$	
10	$a\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	$a\bar{b}\bar{c}d$	$a\bar{b}cd$	$a\bar{b}c\bar{d}$	
11	$ab\bar{c}\bar{d}$	$ab\bar{c}d$	$abcd$	$abc\bar{d}$	
01	$\bar{a}b\bar{c}\bar{d}$	$\bar{a}b\bar{c}d$	$\bar{a}bcd$	$\bar{a}bc\bar{d}$	

1. Soit $f(a,b,c) = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + bc + a\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c}$. Donnez sa représentation en tableau de Karnaugh
2. Donnez la fonction logique correspondante à sa représentation en tableau de Karnaugh ci-dessous.

a, b	00	01	11	10	c, d
00	1	1	1	0	
10	1	1	1	0	
11	1	1	0	0	
01	1	1	0	0	

3. On demande de simplifier chaque fonction logique suivante en utilisant la méthode proposée :
   - $(a+b+c)(a+\bar{b}+\bar{c})(a+b+\bar{c})(a+\bar{b}+c)$ (axiomes de Boole)
   - (méthode de Karnaugh)

a	b	c	Z
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

   - $Z = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}bcd + \bar{a}bc\bar{d} + ab\bar{c}d + abcd + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}d + a\bar{b}cd$ (tableau de Karnaugh)

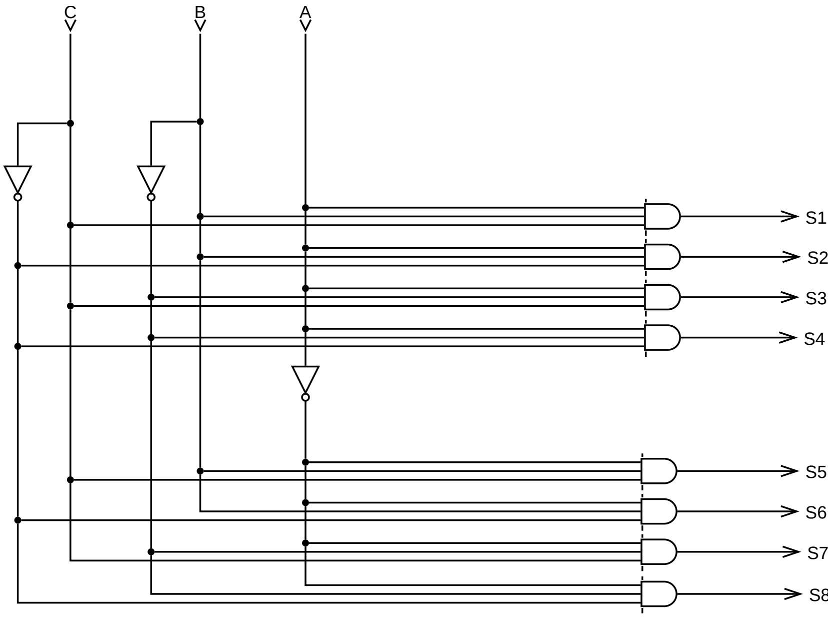
Conception de circuits logiques

1. Soit un entier représenté par le triplet (a_2, a_1, a_0) en représentation binaire non signée. Donnez la table de vérité de la fonction logique f qui renvoie 1 uniquement si l'entier est premier. Déduisez alors un circuit logique réalisant cette fonction logique.
2. On considère le codage binaire usuel des nombres entiers de 0 à 15 ($0 \leftrightarrow 0000, \ldots, 15 \leftrightarrow 1111$). Soit $x_3x_2x_1x_0$ la représentation d'un nombre X. Donner des expressions booléennes correspondant aux propositions suivantes : X est pair ; X vaut 9 ; X est différent de 3 et de 7.
3. On considère le codage sur deux composantes booléennes de quantités valant 0, 1 ou 2 : $0 \leftrightarrow 00$, $1 \leftrightarrow 01$, $2 \leftrightarrow 10$. Pour deux variables $X = x_0x_1$ et $Y = y_0y_1$ de cette sorte, déterminer une fonction booléenne qui indique si $X \geq Y$.

(Bonus) Décodeur

What the hell is that ?

Soit le circuit suivant :



4. Donnez la table de vérité des sorties S_i pour $1 \leq i \leq 8$ en fonction des trois entrées A, B et C ainsi que l'expression algébrique des sorties sous forme normale disjonctive.
5. Précisez quel est l'objectif de ce circuit. Vous pourrez vous appuyer sur un exemple d'utilisation ci-dessous et illustrer votre proposition par un algorithme.