

Soutenance de thèse

Cubes partiels :
complétion, compression, plongement

Manon Philibert

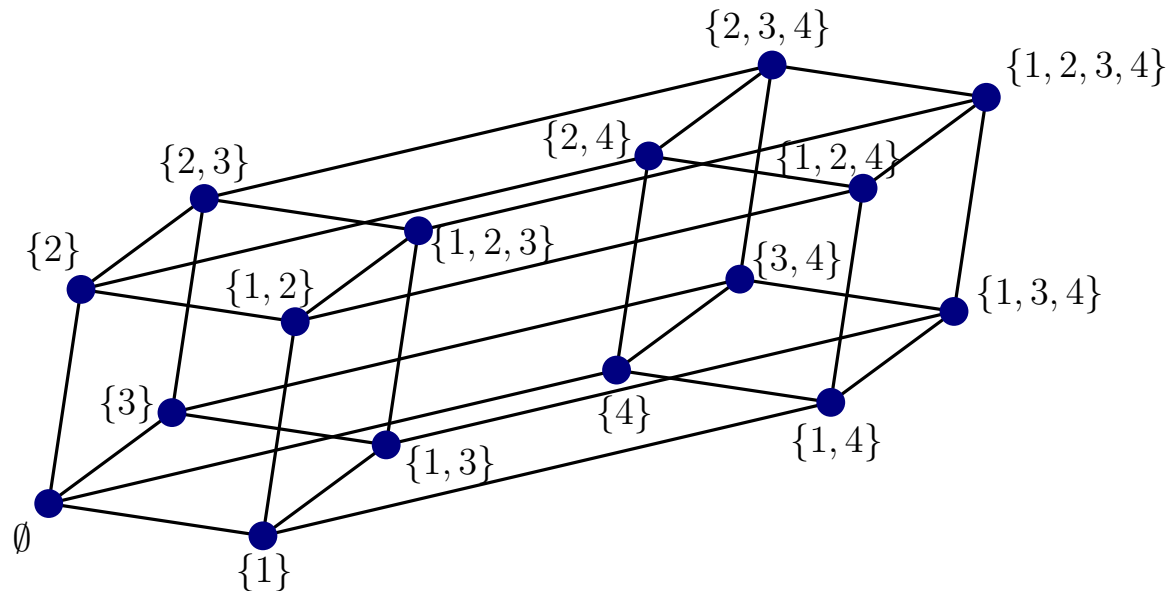
Sous la direction de Victor Chepoi et Kolja Knauer

3 décembre 2021

Hypercubes et cubes partiels

Hypercube Q_m de dimension m :

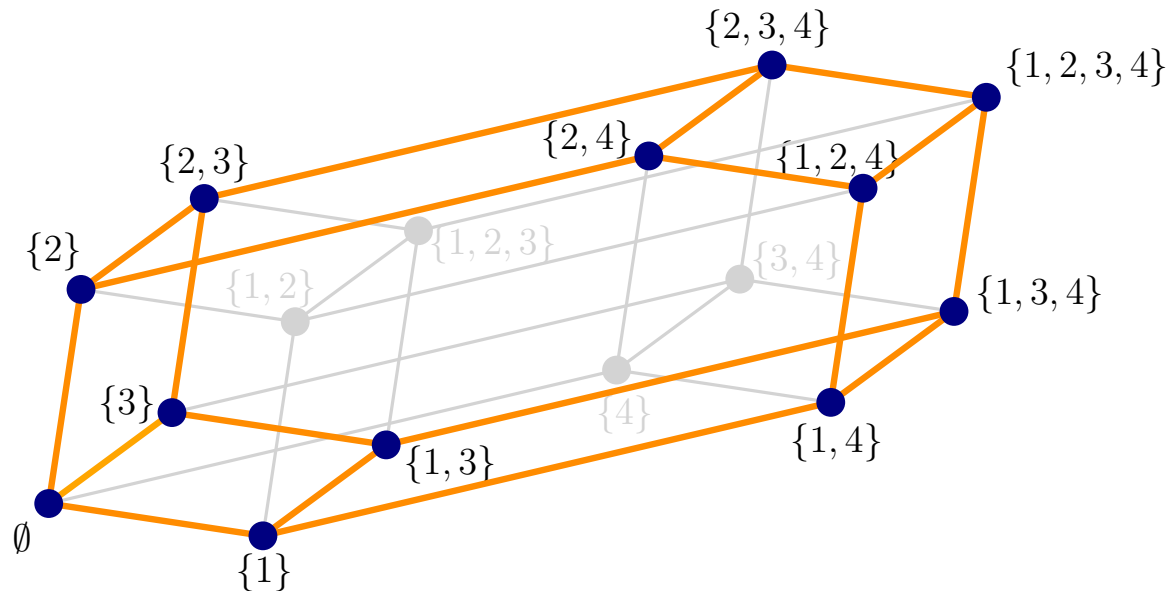
- $V(Q_m) := 2^U$ où $U := \{1, \dots, m\}$
- $AB \in E(Q_m)$ ssi $|A \Delta B| = 1$



Hypercubes et cubes partiels

Hypercube Q_m de dimension m :

- $V(Q_m) := 2^U$ où $U := \{1, \dots, m\}$
- $AB \in E(Q_m)$ ssi $|A \Delta B| = 1$



Cubes partiels : sous-graphes **isométriques** d'hypercubes

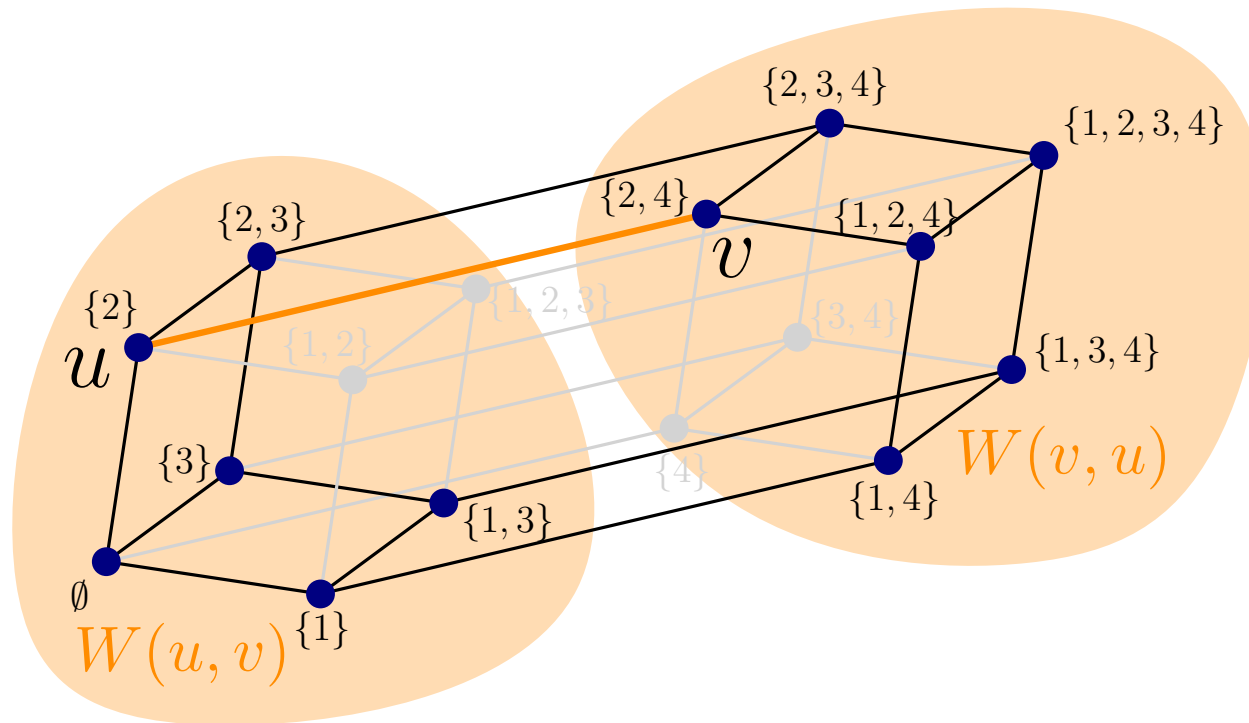
↪ $\forall u, v \in G, d_G(u, v) = d_{Q_m}(u, v)$

Caractérisation de Djoković

Théorème [Djoković, 1973] :

$G = (V, E)$ cube partiel ssi :

- G biparti;
- $\forall uv \in E, W(u, v) := \{x \in V : d(x, u) < d(x, v)\}$ et $W(v, u)$ convexes.



$H \subseteq G$ **convexe** si $\forall u, v \in V(H), \underline{I_G(u, v)} \subseteq V(H)$.

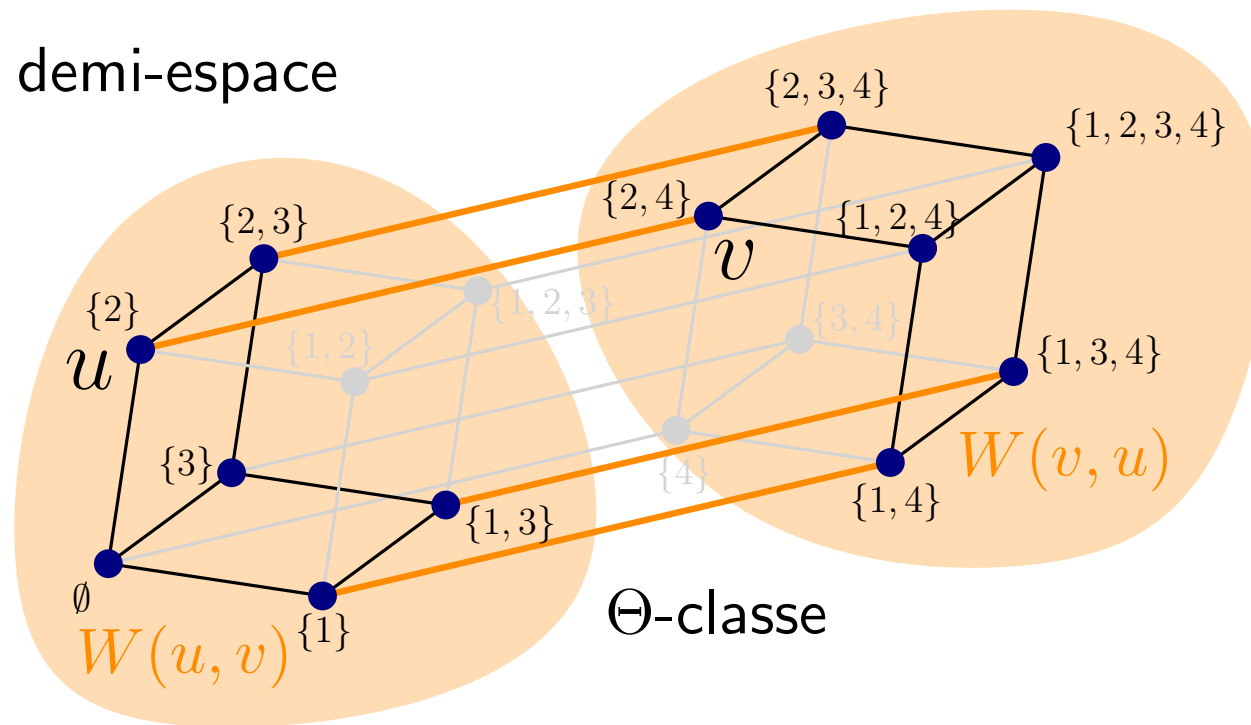
$$\{w \in V(G) : d_G(u, v) = d_G(u, w) + d_G(w, v)\}$$

Caractérisation de Djoković

Théorème [Djoković, 1973] :

$G = (V, E)$ cube partiel ssi :

- G biparti;
- $\forall uv \in E, W(u, v) := \{x \in V : d(x, u) < d(x, v)\}$ et $W(v, u)$ convexes.



$H \subseteq G$ **convexe** si $\forall u, v \in V(H), \underline{I_G(u, v)} \subseteq V(H)$.

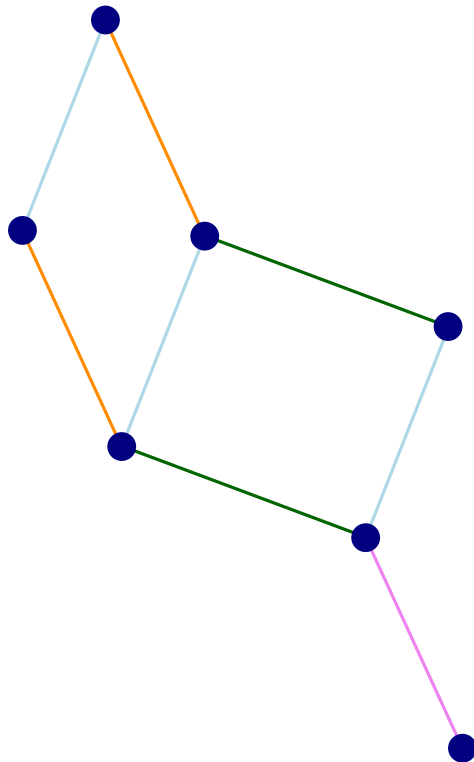
$$\{w \in V(G) : d_G(u, v) = d_G(u, w) + d_G(w, v)\}$$

Pc-mineurs

[Chepoi 1997, et Chepoi, Knauer et Marc, 2020]
[CKM20]

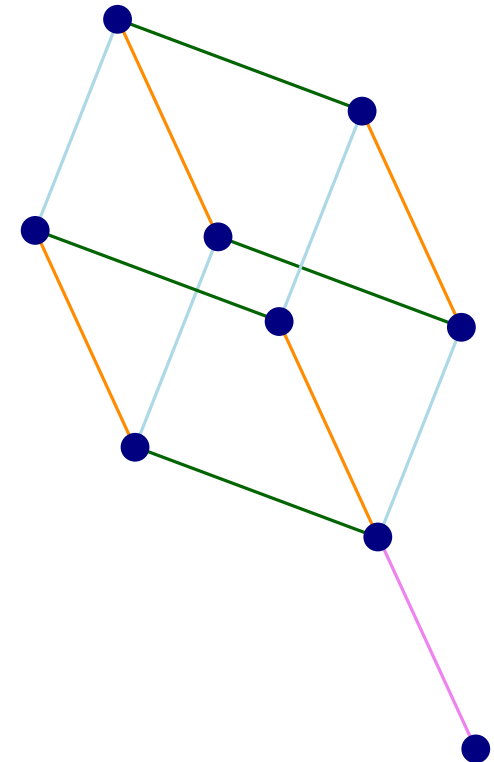
Restriction :

se restreindre à l'un des
deux demi-espaces
d'une Θ -classe



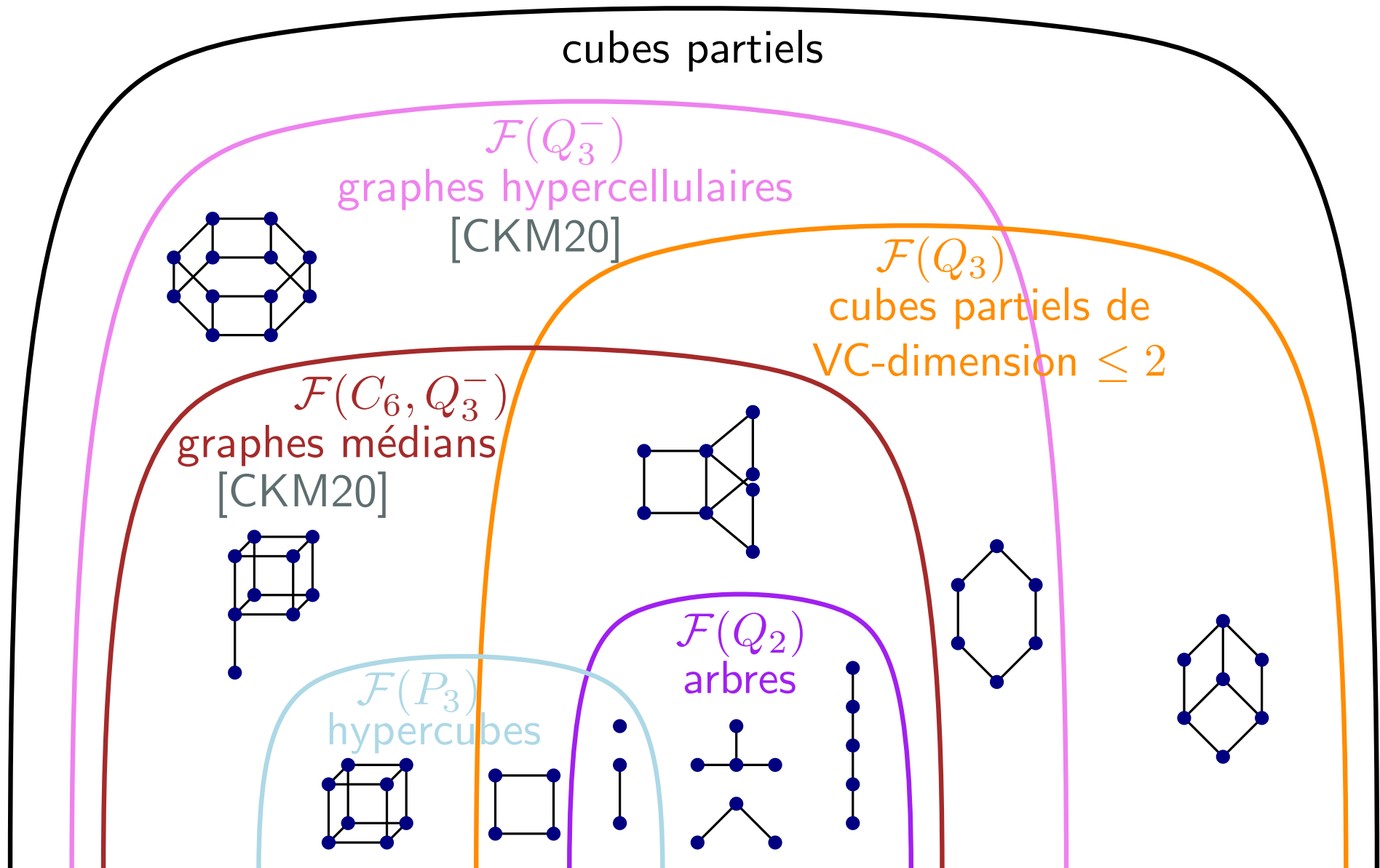
Contraction :

contracter l'ensemble
des arêtes d'une même
 Θ -classe



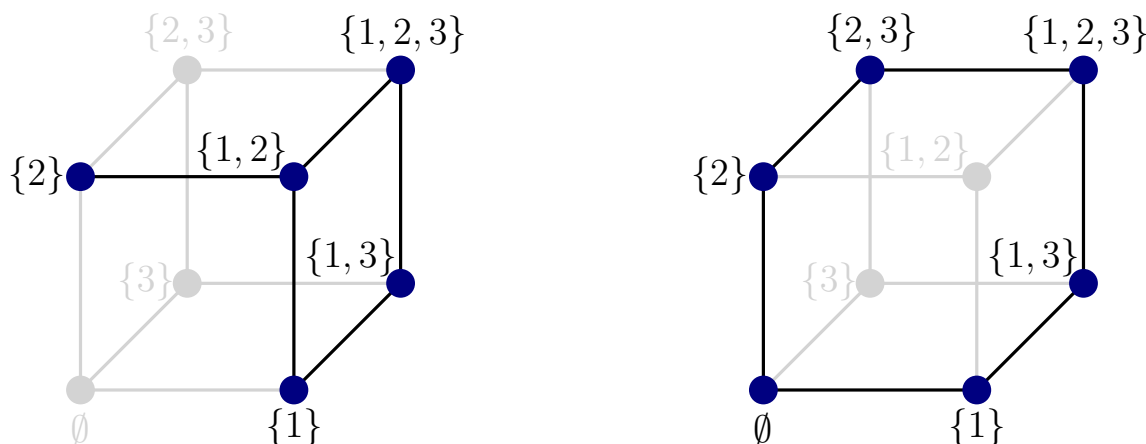
$\mathcal{F}(\mathcal{X})$: cubes partiels n'ayant aucun élément de \mathcal{X} comme pc-mineurs

Classes avec peu de pc-mineurs exclus



VC-dimension

La **VC-dimension** d'un sous-graphe d'hypercube est la taille du plus grand hypercube obtenu par pc-mineurs, i.e., $G \in \mathcal{F}(Q_{d+1}) \iff \text{VC-dim}(G) \leq d$



$\overline{\mathbf{X}}(G)$: ensembles pulvérisés

$\underline{\mathbf{X}}(G)$: ensembles strictement pulvérisés

Lemme du Sandwich [Bollobás et Radcliffe, 1995 et Dress, 1997] :

$$\forall G \subseteq Q_m, |\underline{\mathbf{X}}(G)| \leq |V(G)| \leq |\overline{\mathbf{X}}(G)|.$$

G **ample** ssi G cube partiel t.q. $\underline{\mathbf{X}}(G) = \overline{\mathbf{X}}(G)$

Cubes partiels amples

Géométrie :

Famille lopsided [Lawrence, 1983]

Combinatoire :

Lemme du Sandwich

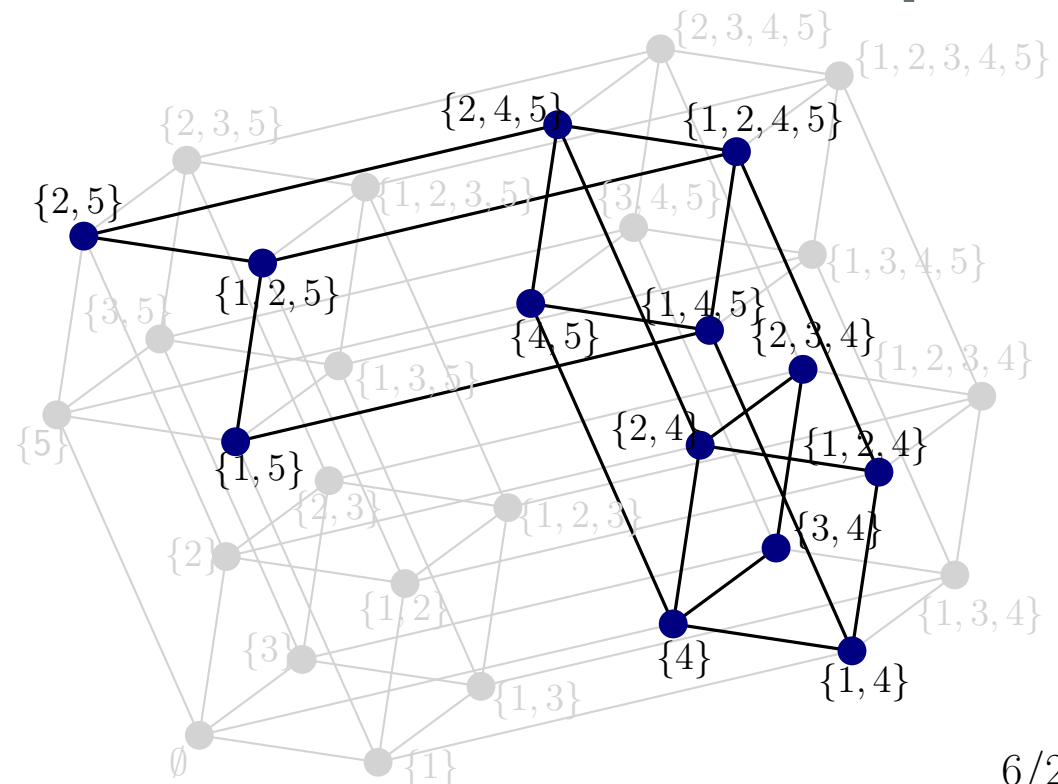
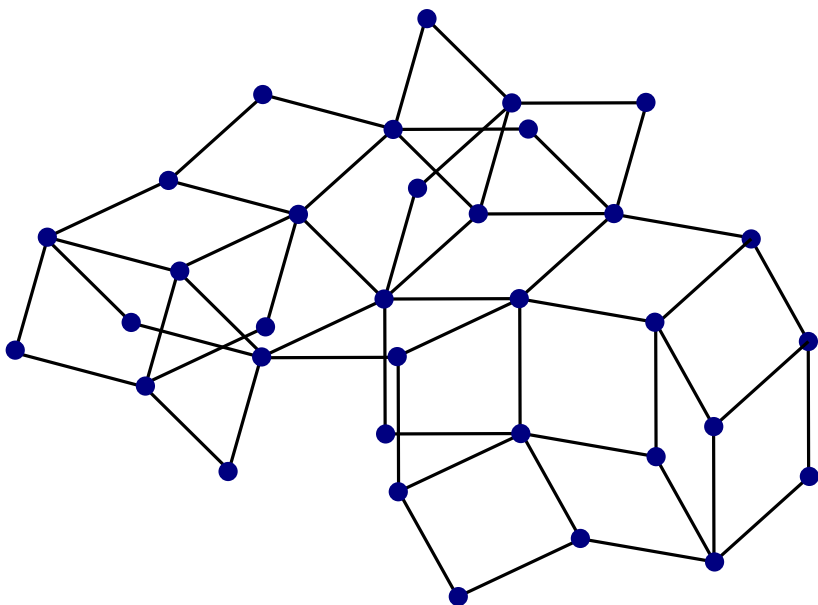
Complémentaire ample

Théorie métrique des graphes :

Connexe et hyperplans amples [Bandelt, Chepoi, Dress, Koolen, 2006]

Galerie de cubes [BCDK06]

$\mathcal{F}(Q^{--})$ [Lawrence, 1983]



Cubes partiels amples

Géométrie :

Famille lopsided [Lawrence, 1983]

Combinatoire :

Lemme du Sandwich

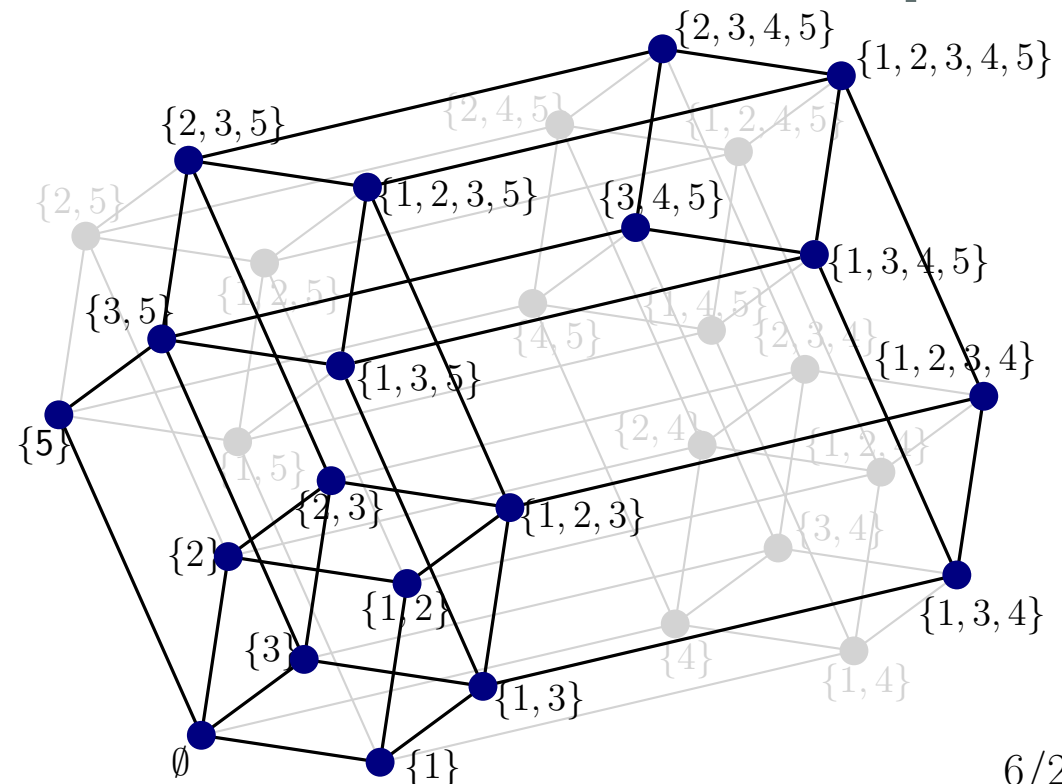
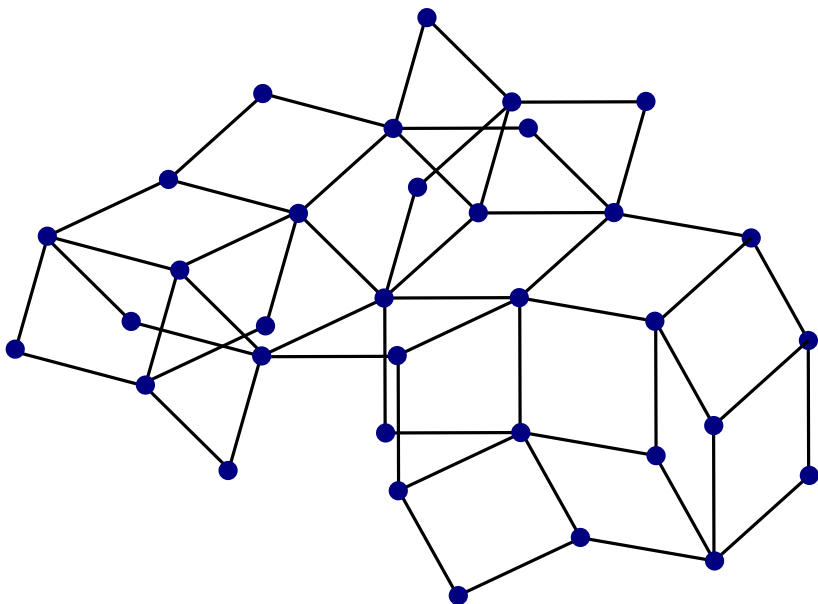
Complémentaire ample

Théorie métrique des graphes :

Connexe et hyperplans amples [Bandelt, Chepoi, Dress, Koolen, 2006]

Galerie de cubes [BCDK06]

$\mathcal{F}(Q^{--})$ [Lawrence, 1983]



Cubes partiels amples

Géométrie :

Famille lopsided [Lawrence, 1983]

Combinatoire :

Lemme du Sandwich

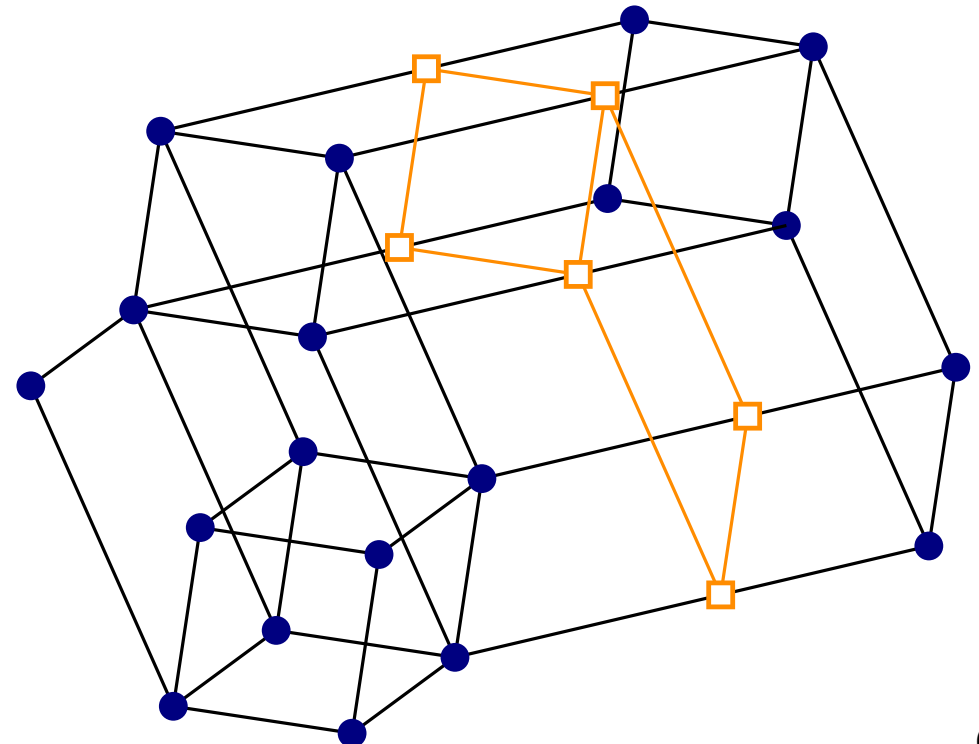
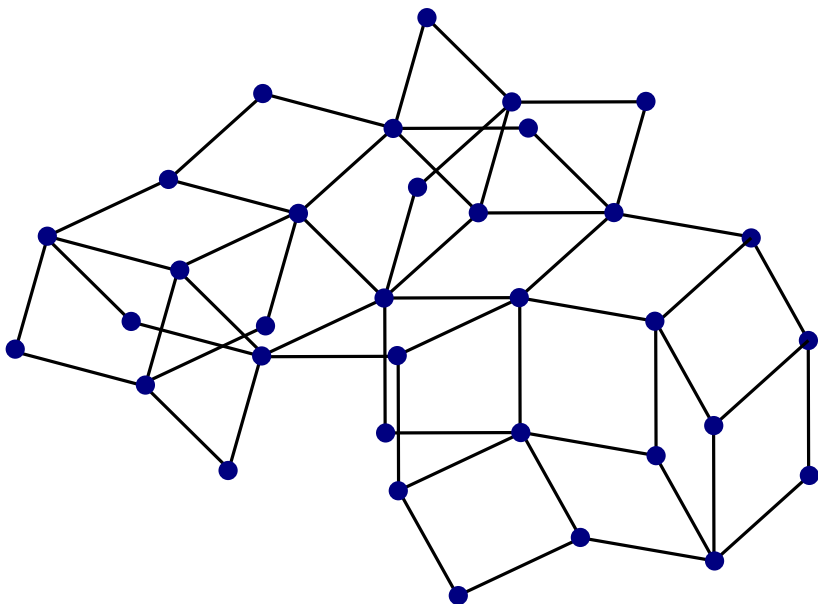
Complémentaire ample

Théorie métrique des graphes :

Connexe et hyperplans amples [Bandelt, Chepoi, Dress, Koolen, 2006]

Galerie de cubes [BCDK06]

$\mathcal{F}(Q^{--})$ [Lawrence, 1983]



Cubes partiels amples

Géométrie :

Famille lopsided [Lawrence, 1983]

Combinatoire :

Lemme du Sandwich

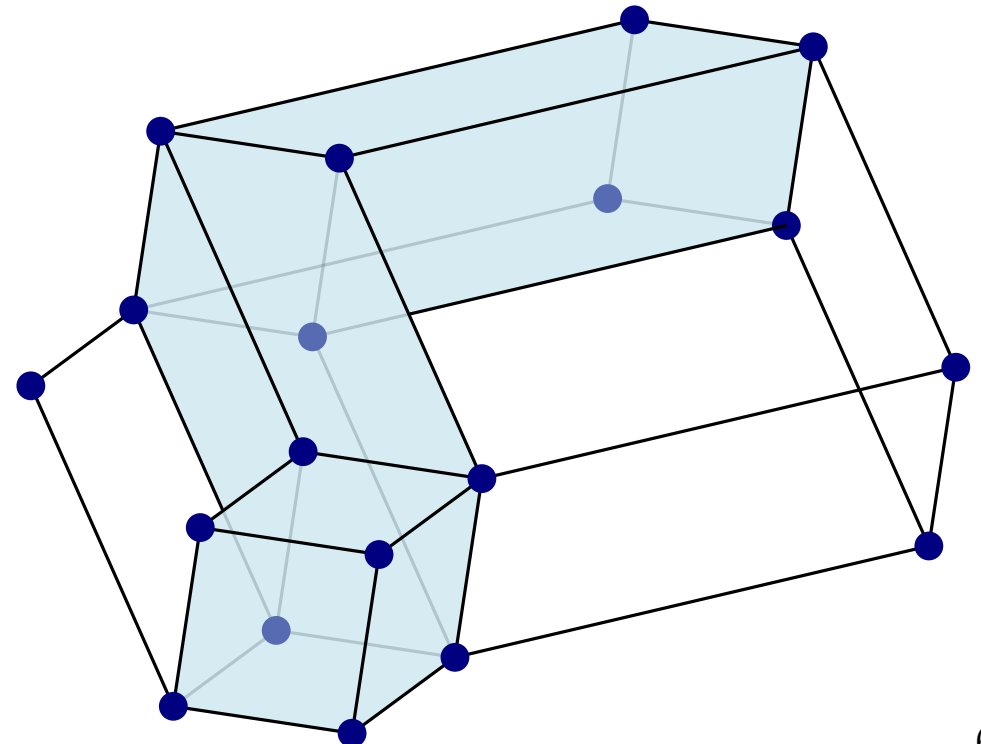
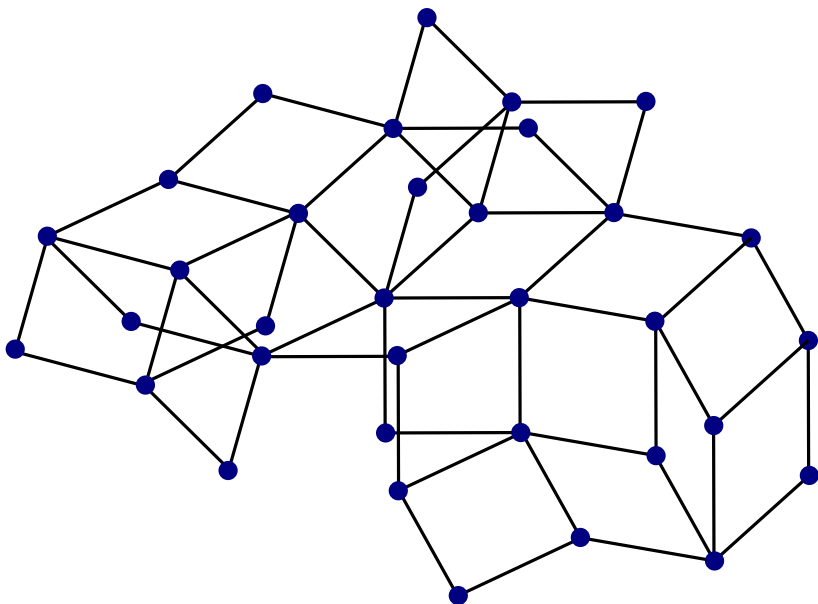
Complémentaire ample

Théorie métrique des graphes :

Connexe et hyperplans amples [Bandelt, Chepoi, Dress, Koolen, 2006]

Galerie de cubes [BCDK06]

$\mathcal{F}(Q^{--})$ [Lawrence, 1983]



Conjecture de Floyd et Warmuth

Conjecture [Floyd et Warmuth, 1995] :

Toute famille d'ensembles, i.e., tout sous-graphe d'hypercube, de VC-dimension d admet un schéma de compression de taille $O(d)$.

Théorème [Moran et Warmuth, 2016] :

Tout cube partiel ample de VC-dimension d admet un schéma de compression étiqueté propre de taille d .

Résultats

Caractérisations des cubes partiels de VC-dimension ≤ 2

Complétions amples des OMs et des CUOMs

Compression de taille d pour les COMs

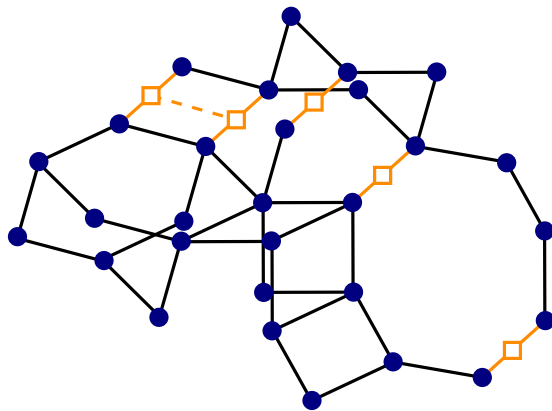
Caractérisations des grilles et cylindres partiels

Cubes partiels de VC-dimension ≤ 2

Théorème 1 [Chepoi, Knauer, et P., E-JC 2020]:

Pour un cube partiel G , les conditions suivantes sont équivalentes :

- $G \in \mathcal{F}(Q_3)$;
- Les hyperplans de G sont de VC-dimension ≤ 1 ;
- G peut être obtenu à partir de K_1 via une suite d'expansions isométriques $\{(G_i^1, G_i^0, G_i^2) : i = 1, \dots, m\}$, où $\text{VC-dim}(G_i^0) \leq 1$;
- G peut être obtenu par $2d$ -amalgamation à partir de cycles pairs et de subdivisions entières de graphes complets;
- G peut être complété en cube partiel ample de VC-dimension ≤ 2 .



Hyperplan H_i :

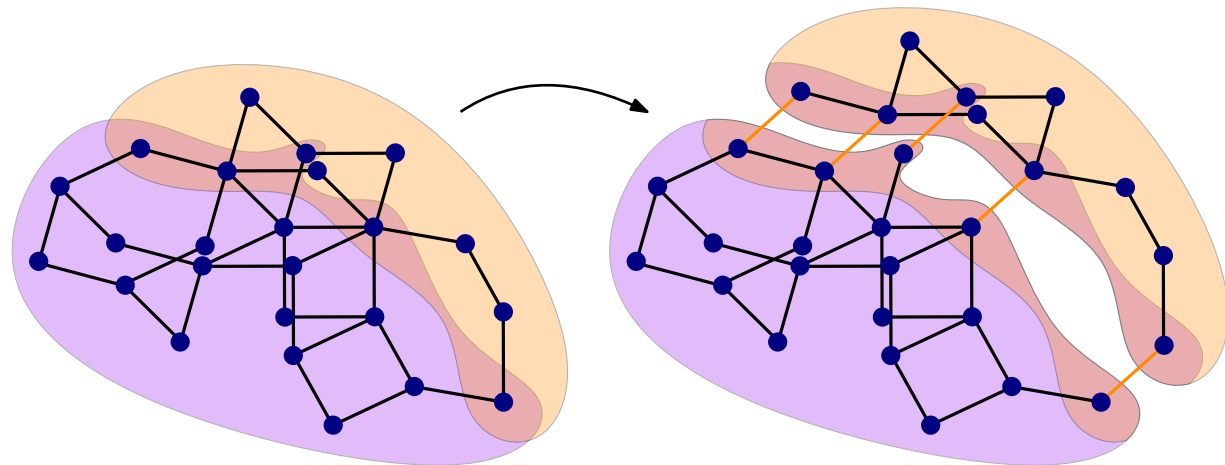
- $V(H_i) :=$ milieux des arêtes E_i
- $uv \in E(H_i)$ ssi les arêtes appartiennent à un même carré dans G

Cubes partiels de VC-dimension ≤ 2

Théorème 1 [Chepoi, Knauer, et P., E-JC 2020]:

Pour un cube partiel G , les conditions suivantes sont équivalentes :

- $G \in \mathcal{F}(Q_3)$;
- Les hyperplans de G sont de VC-dimension ≤ 1 ;
- G peut être obtenu à partir de K_1 via une suite d'expansions isométriques $\{(G_i^1, G_i^0, G_i^2) : i = 1, \dots, m\}$, où $\text{VC-dim}(G_i^0) \leq 1$;
- G peut être obtenu par $2d$ -amalgamation à partir de cycles pairs et de subdivisions entières de graphes complets;
- G peut être complété en cube partiel ample de VC-dimension ≤ 2 .

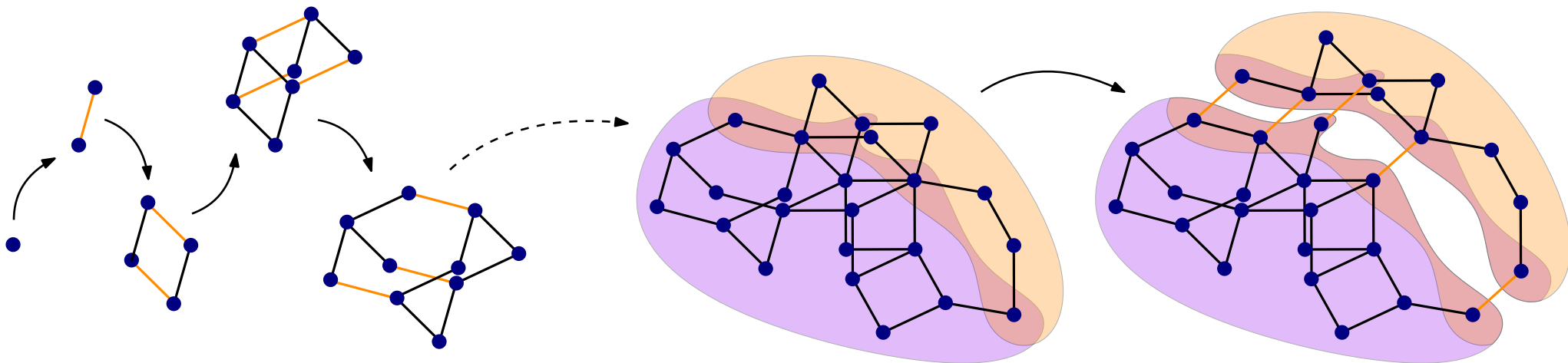


Cubes partiels de VC-dimension ≤ 2

Théorème 1 [Chepoi, Knauer, et P., E-JC 2020]:

Pour un cube partiel G , les conditions suivantes sont équivalentes :

- $G \in \mathcal{F}(Q_3)$;
- Les hyperplans de G sont de VC-dimension ≤ 1 ;
- G peut être obtenu à partir de K_1 via une suite d'expansions isométriques $\{(G_i^1, G_i^0, G_i^2) : i = 1, \dots, m\}$, où $\text{VC-dim}(G_i^0) \leq 1$;
- G peut être obtenu par $2d$ -amalgamation à partir de cycles pairs et de subdivisions entières de graphes complets;
- G peut être complété en cube partiel ample de VC-dimension ≤ 2 .

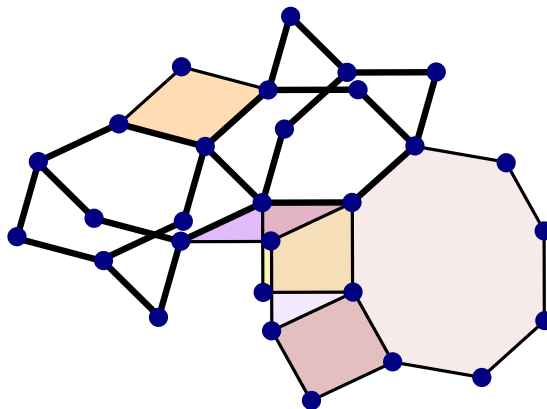


Cubes partiels de VC-dimension ≤ 2

Théorème 1 [Chepoi, Knauer, et P., E-JC 2020]:

Pour un cube partiel G , les conditions suivantes sont équivalentes :

- $G \in \mathcal{F}(Q_3)$;
- Les hyperplans de G sont de VC-dimension ≤ 1 ;
- G peut être obtenu à partir de K_1 via une suite d'expansions isométriques $\{(G_i^1, G_i^0, G_i^2) : i = 1, \dots, m\}$, où $\text{VC-dim}(G_i^0) \leq 1$;
- G peut être obtenu par $2d$ -amalgamation à partir de cycles pairs et de subdivisions entières de graphes complets;
- G peut être complété en cube partiel ample de VC-dimension ≤ 2 .

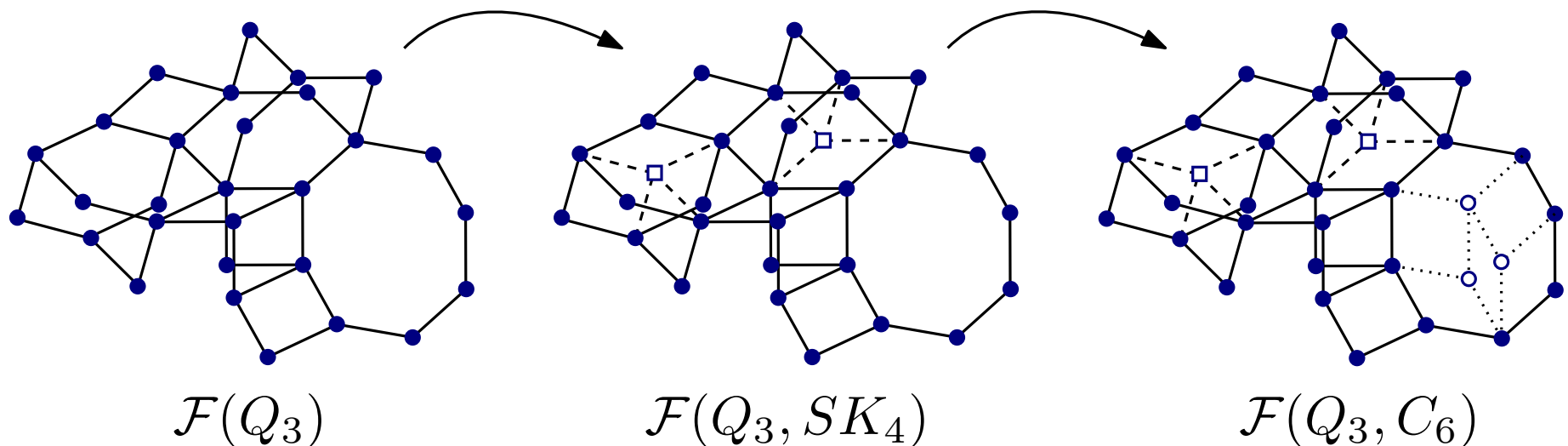


Cubes partiels de VC-dimension ≤ 2

Théorème 1 [Chepoi, Knauer, et P., E-JC 2020]:

Pour un cube partiel G , les conditions suivantes sont équivalentes :

- $G \in \mathcal{F}(Q_3)$;
- Les hyperplans de G sont de VC-dimension ≤ 1 ;
- G peut être obtenu à partir de K_1 via une suite d'expansions isométriques $\{(G_i^1, G_i^0, G_i^2) : i = 1, \dots, m\}$, où $\text{VC-dim}(G_i^0) \leq 1$;
- G peut être obtenu par $2d$ -amalgamation à partir de cycles pairs et de subdivisions entières de graphes complets;
- G peut être complété en cube partiel ample de VC-dimension ≤ 2 .



Résultats

Caractérisations des cubes partiels de VC-dimension ≤ 2

Complétions amples des OMs et des CUOMs

Compression de taille d pour les COMs

Caractérisations des grilles et cylindres partiels

Complexes de matroïdes orientés

$$U = \{1, \dots, m\} \text{ et } \mathcal{L} = \{-1, 0, +1\}^m$$

(U, \mathcal{L}) **COM** [Bandelt, Chepoi et Knauer, 2018] ssi

$$(X \circ Y)_i = \begin{cases} X_i & \text{si } X_i \neq 0; \\ Y_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

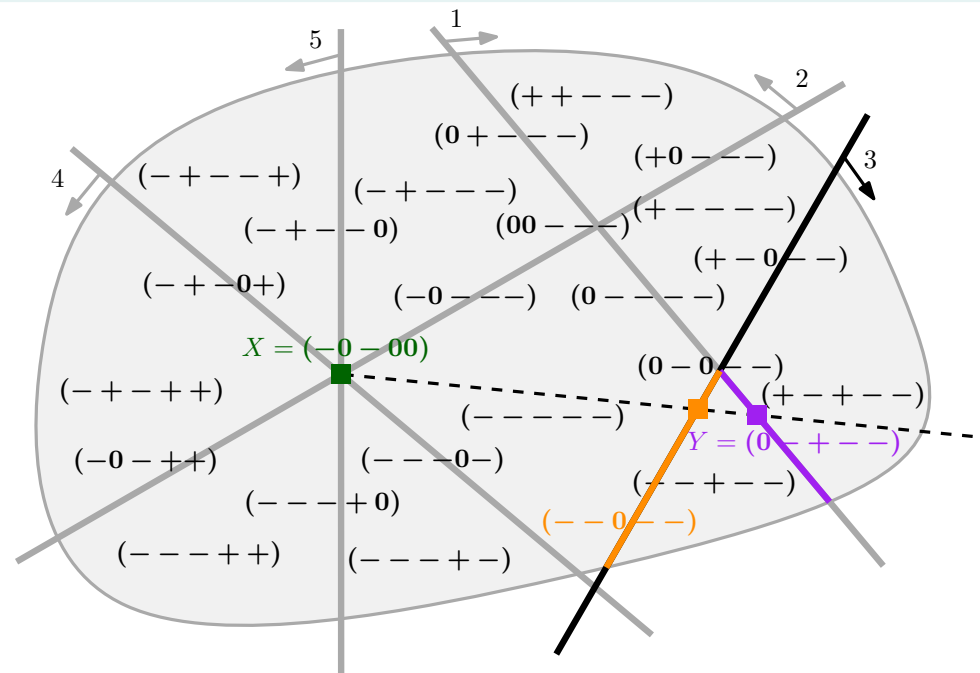
(C) $\forall X, Y \in \mathcal{L}, X \circ Y \in \mathcal{L}$;

(SE) $\forall X, Y \in \mathcal{L}, \forall i \in U$ avec $X_i Y_i = -1, \exists Z \in \mathcal{L}$ tel que $Z_i = 0$ et $Z_j = (X \circ Y)_j$
 $\forall j \in U$ avec $X_j Y_j \neq -1$;

(FS) $\forall X, Y \in \mathcal{L}, X \circ -Y \in \mathcal{L}$.

$$\begin{pmatrix} - \\ 0 \\ - \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ + \\ - \\ - \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} - \\ - \\ 0 \\ - \\ - \end{pmatrix}$$

$X \quad Y$



Complexes de matroïdes orientés

$$U = \{1, \dots, m\} \text{ et } \mathcal{L} = \{-1, 0, +1\}^m$$

(U, \mathcal{L}) **COM** [Bandelt, Chepoi et Knauer, 2018] ssi

$$(X \circ Y)_i = \begin{cases} X_i & \text{si } X_i \neq 0; \\ Y_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

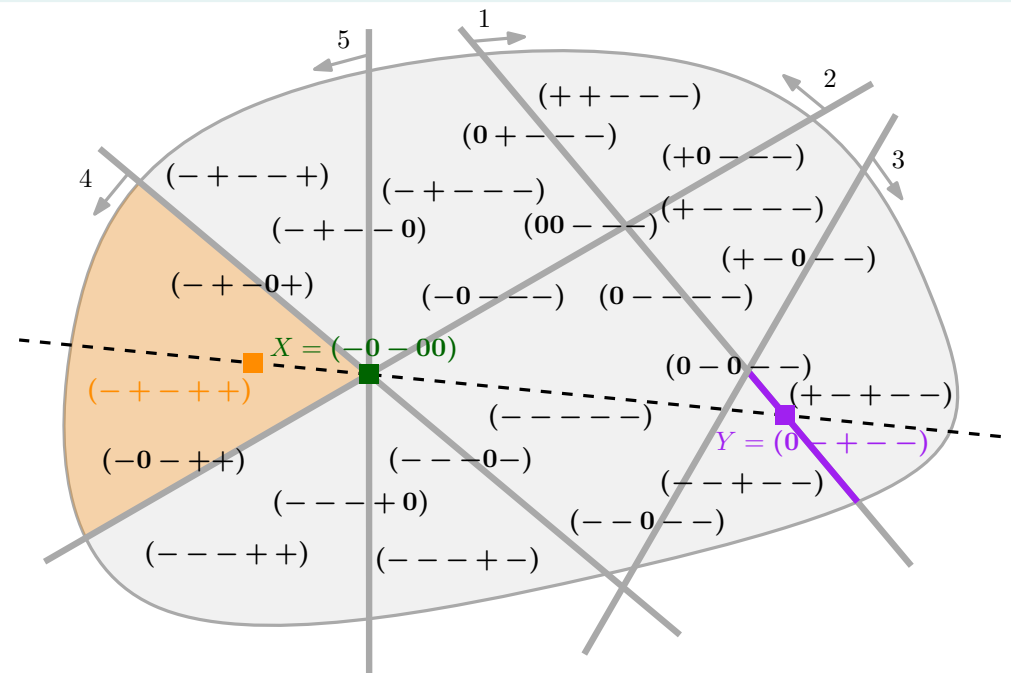
(C) $\forall X, Y \in \mathcal{L}, X \circ Y \in \mathcal{L}$;

(SE) $\forall X, Y \in \mathcal{L}, \forall i \in U$ avec $X_i Y_i = -1, \exists Z \in \mathcal{L}$ tel que $Z_i = 0$ et $Z_j = (X \circ Y)_j$
 $\forall j \in U$ avec $X_j Y_j \neq -1$;

(FS) $\forall X, Y \in \mathcal{L}, X \circ -Y \in \mathcal{L}$.

$$\begin{pmatrix} - \\ 0 \\ - \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ - \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ + \\ - \\ - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \\ + \\ - \\ + \\ + \end{pmatrix}$$

$X \qquad Y$



Complexes de matroïdes orientés

$$U = \{1, \dots, m\} \text{ et } \mathcal{L} = \{-1, 0, +1\}^m$$

(U, \mathcal{L}) **COM** [Bandelt, Chepoi et Knauer, 2018] ssi

$$(X \circ Y)_i = \begin{cases} X_i & \text{si } X_i \neq 0; \\ Y_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

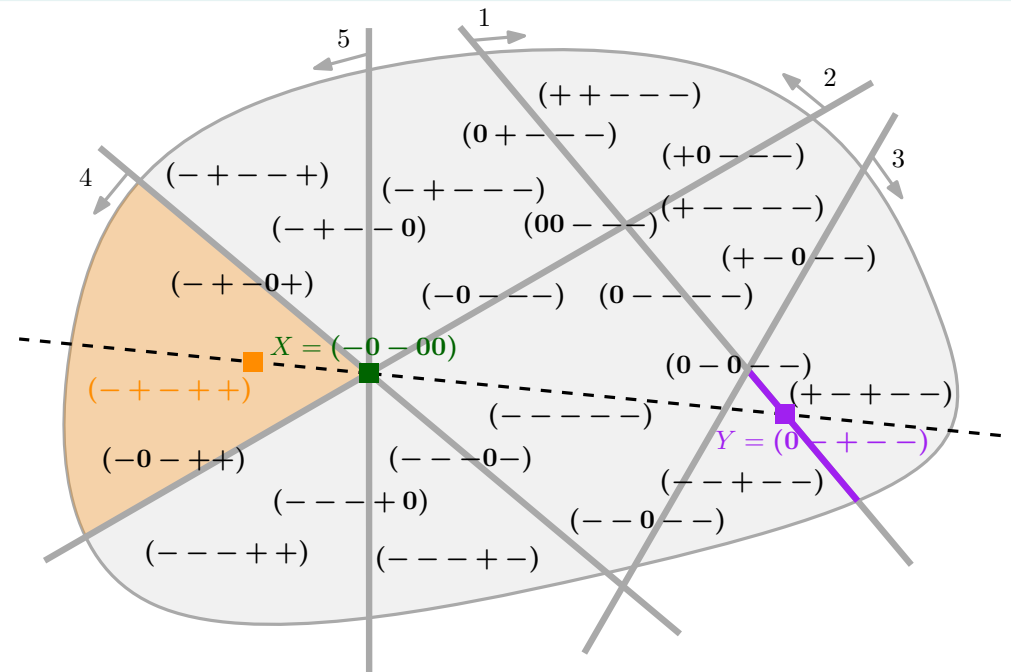
(C) $\forall X, Y \in \mathcal{L}, X \circ Y \in \mathcal{L}$;

(SE) $\forall X, Y \in \mathcal{L}, \forall i \in U$ avec $X_i Y_i = -1, \exists Z \in \mathcal{L}$ tel que $Z_i = 0$ et $Z_j = (X \circ Y)_j$
 $\forall j \in U$ avec $X_j Y_j \neq -1$;

(FS) $\forall X, Y \in \mathcal{L}, X \circ -Y \in \mathcal{L}$.

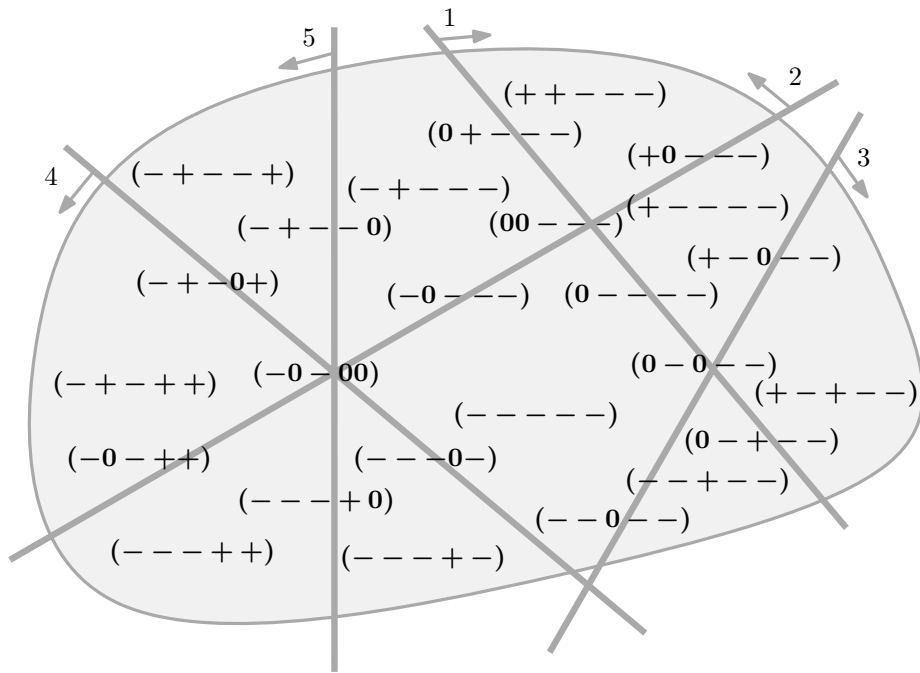
$$\begin{pmatrix} - \\ 0 \\ - \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ - \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ + \\ - \\ - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \\ + \\ - \\ + \\ + \end{pmatrix}$$

$X \qquad Y$

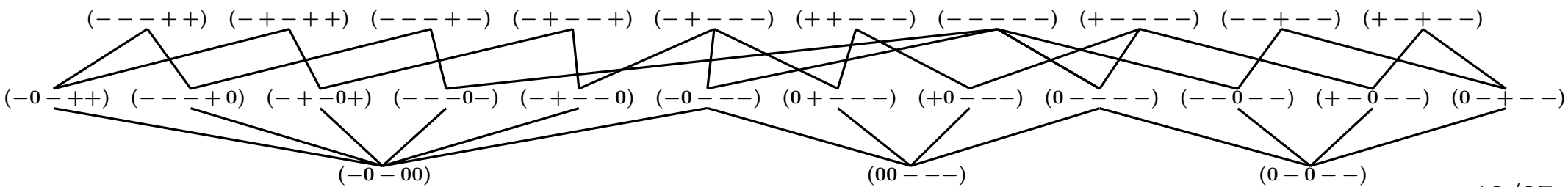


(U, \mathcal{L}) **OM** [Björner et al., 1999] ssi **(C)**, **(SE)**, et **(Sym)** $\mathcal{L} = -\mathcal{L}$.

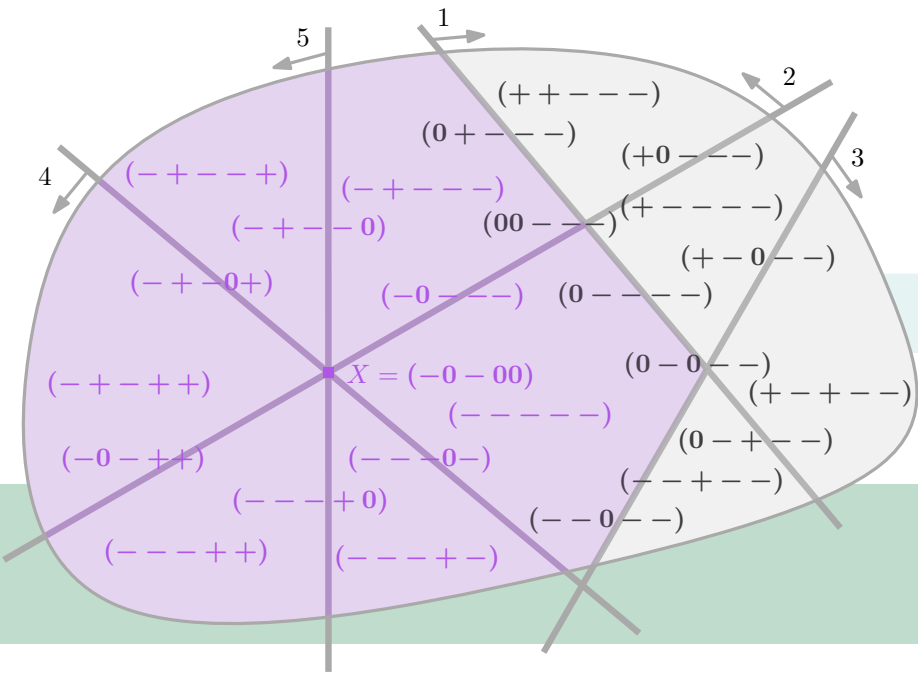
Faces et graphes de topes



poset avec l'ordre $\begin{matrix} - & + \\ & \searrow \nearrow \\ & 0 \end{matrix}$



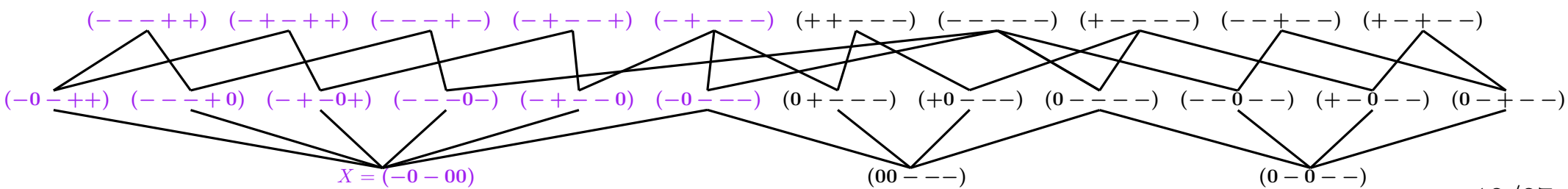
Faces et graphes de topes



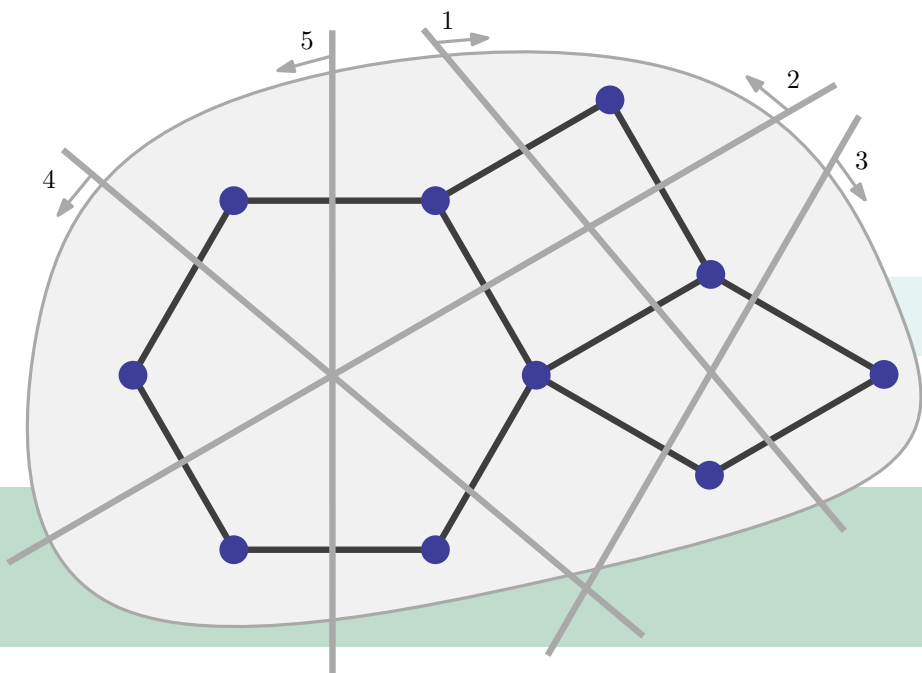
face $F(X) := \{Y \in \mathcal{L} : X \leq Y\}$

Proposition [BCK18]:
 $\forall X \in \mathcal{L}, F(X)$ est un OM

poset avec l'ordre $\begin{matrix} - & + \\ & \searrow \swarrow \\ & 0 \end{matrix}$



Faces et graphes de topes



face $F(X) := \{Y \in \mathcal{L} : X \leq Y\}$

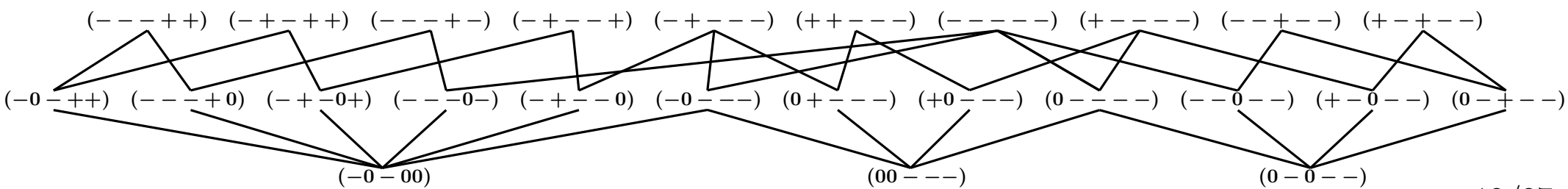
Proposition [BCK18]:

$\forall X \in \mathcal{L}, F(X)$ est un OM

Topes \mathcal{T} : covecteurs sans zéro

Graphe de topes : sous-graphe induit par \mathcal{T} dans l'hypercube $\{+, -\}^m$

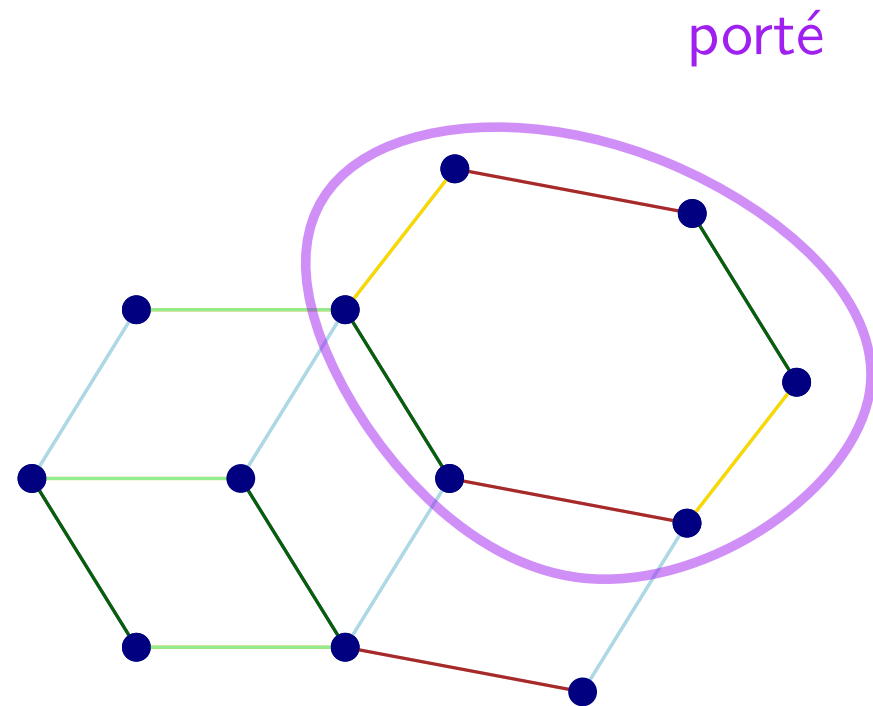
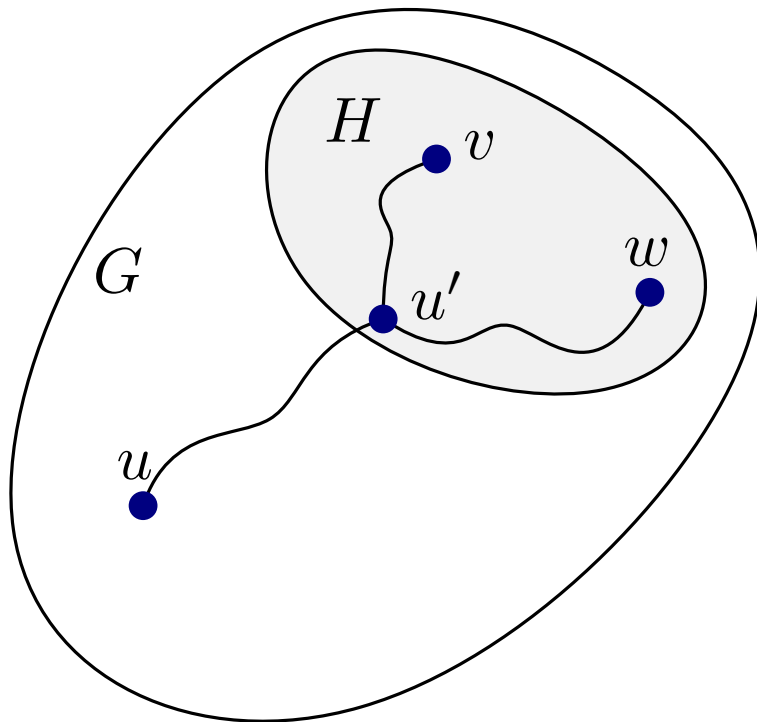
poset avec l'ordre $\begin{matrix} - & & + \\ & \searrow & / \\ & 0 & \end{matrix}$



Sous-graphes portés et antipodaux

porte de u

$H \subseteq G$ **porté** si $\forall u \in V(G), \exists u' \in V(H)$ tels que $\forall v \in V(H), u' \in I(u, v)$.

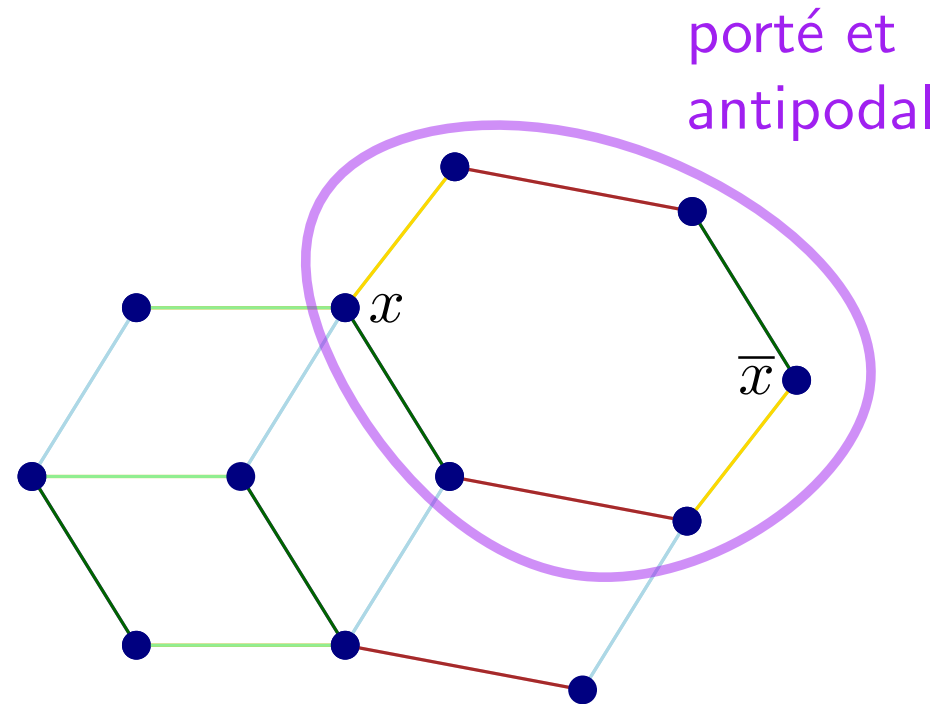
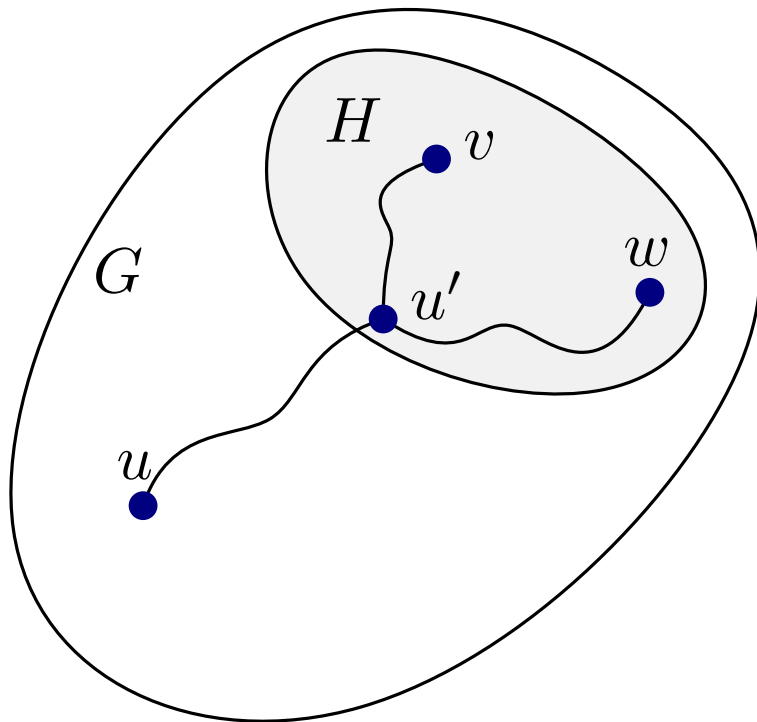


Sous-graphes portés et antipodaux

porte de u

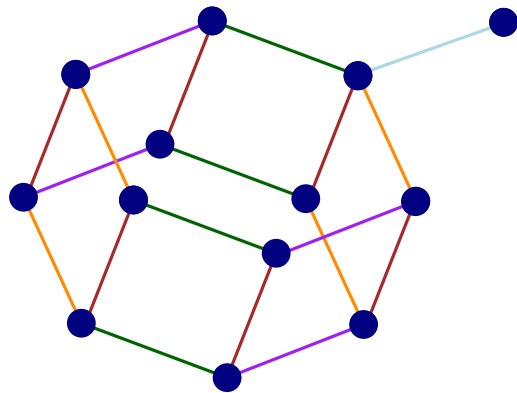
$H \subseteq G$ **porté** si $\forall u \in V(G), \exists u' \in V(H)$ tels que $\forall v \in V(H), u' \in I(u, v)$.

G **antipodal** si $\forall x \in V(G), \exists \bar{x} \in V(G)$ tels que $G = I_G(x, \bar{x})$.

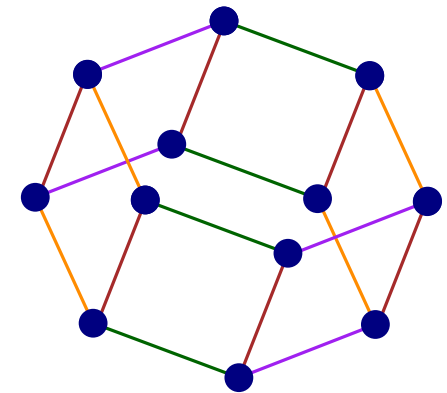


Classes de cubes partiels

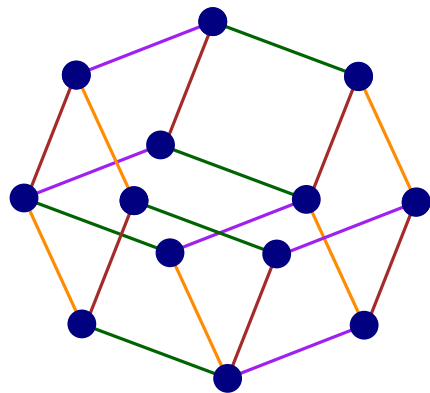
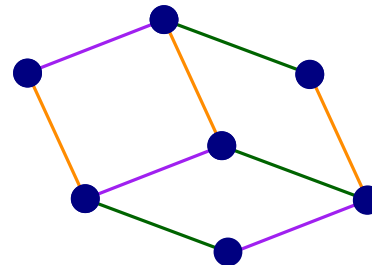
\mathcal{G}_{COM} : antipodal \Rightarrow porté
[Knauer et Marc, 2020]



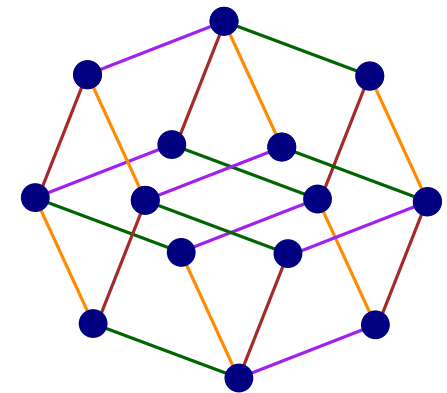
\mathcal{G}_{OM} : \mathcal{G}_{COM} antipodal
[Da Silva, 1995]



\mathcal{G}_{AMP} : \mathcal{G}_{COM} t.q.
antipodal \Rightarrow hypercube
[Lawrence, 1983]



$\mathcal{G}_{\text{CUOM}}$: \mathcal{G}_{COM} t.q.
antipodal propre $\in \mathcal{G}_{\text{UOM}}$



\mathcal{G}_{UOM} : \mathcal{G}_{OM} t.q.
antipodal propre \Rightarrow hypercube

Complétions amples

G **complétion ample** de H ssi

- H sous-graphe isométrique de G ;
- G ample.

Théorème 2 [Chepoi, Knauer, et P., SIDMA (à paraître)]:

Le graphe de topes d'un OM de VC-dimension d peut être complété en cube partiel ample de VC-dimension d .

Théorème 3 [Chepoi, Knauer, et P., SIDMA (à paraître)]:

Le graphe de topes d'un CUOM de VC-dimension d peut être complété en cube partiel ample de VC-dimension d .

Preuve du Théorème 3 (1/2)

Le graphe de topes d'un CUOM peut être complété en cube partiel ample de même VC-dimension.

Idée de la preuve :

- 1) Compléter de manière indépendante les facettes en cube partiel ample
- 2) Prendre l'union de ces complétions

Preuve du Théorème 3 (1/2)

Le graphe de topes d'un CUOM peut être complété en cube partiel ample de même VC-dimension.

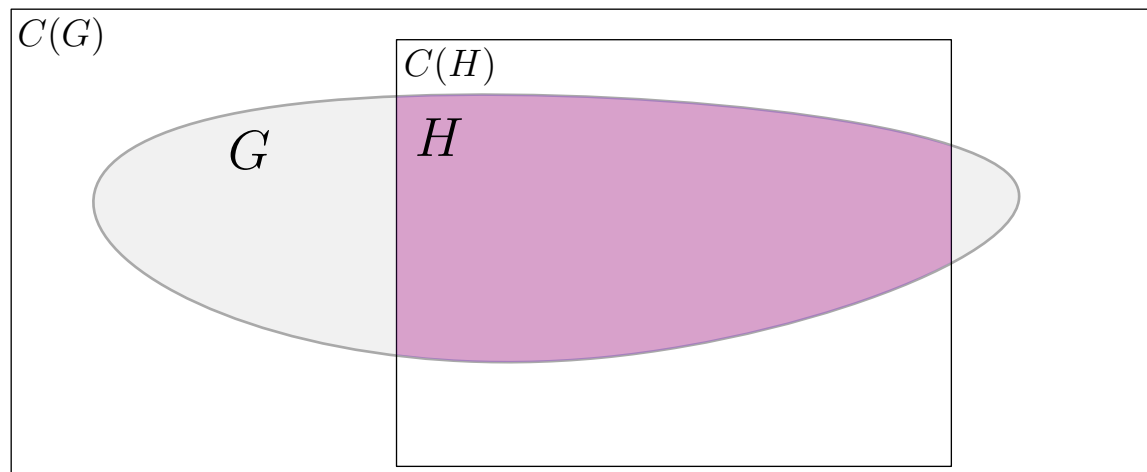
Idée de la preuve :

- 1) Compléter de manière indépendante les facettes en cube partiel ample
- 2) Prendre l'union de ces complétions

Lemme 1 :

G cube partiel, $H \subseteq G$ porté et H' cube partiel tel que $H \subseteq H' \subseteq C(H)$

- (i) G' cube partiel;
- (ii) $H' \subseteq G'$ porté;
- (iii) $\text{VC-dim}(G') = \max\{\text{VC-dim}(G), \text{VC-dim}(H')\}$.



Preuve du Théorème 3 (1/2)

Le graphe de topes d'un CUOM peut être complété en cube partiel ample de même VC-dimension.

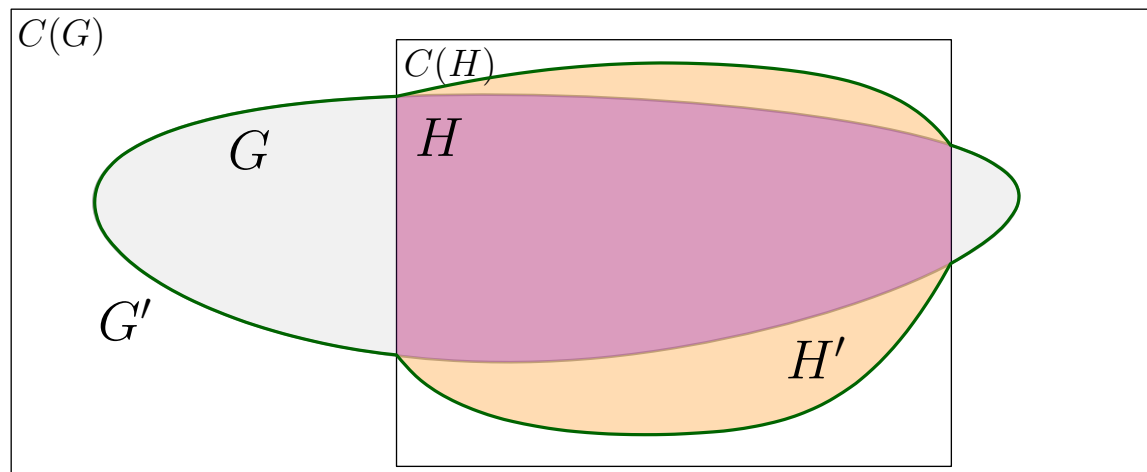
Idée de la preuve :

- 1) Compléter de manière indépendante les facettes en cube partiel ample
- 2) Prendre l'union de ces complétions

Lemme 1 :

G cube partiel, $H \subseteq G$ porté et H' cube partiel tel que $H \subseteq H' \subseteq C(H)$

- (i) G' cube partiel;
- (ii) $H' \subseteq G'$ porté;
- (iii) $\text{VC-dim}(G') = \max\{\text{VC-dim}(G), \text{VC-dim}(H')\}$.



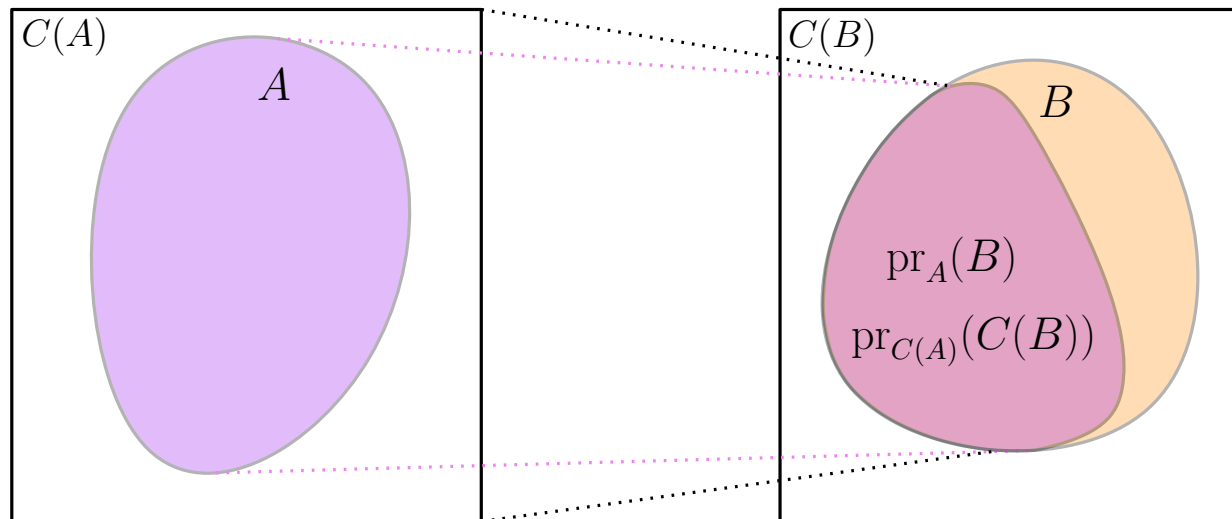
Preuve du Théorème 3 (2/2)

Le graphe de topes d'un CUOM peut être complété en cube partiel ample de même VC-dimension.

projection mutuelle $\text{pr}_B(A) := \{a \in A : d(a, B) = d(A, B)\}$.

Lemme 2 :

A, B facettes du graphe de topes G d'un CUOM \Rightarrow
 $\text{pr}_B(A) = \text{pr}_{C(B)}(C(A))$ et $\text{pr}_A(B) = \text{pr}_{C(A)}(C(B))$.



Résultats

Caractérisations des cubes partiels de VC-dimension ≤ 2

Complétions amples des OMs et des CUOMs

Compression de taille d pour les COMs

Caractérisations des grilles et cylindres partiels

Rectangles axes-parallèles

compression

reconstruction

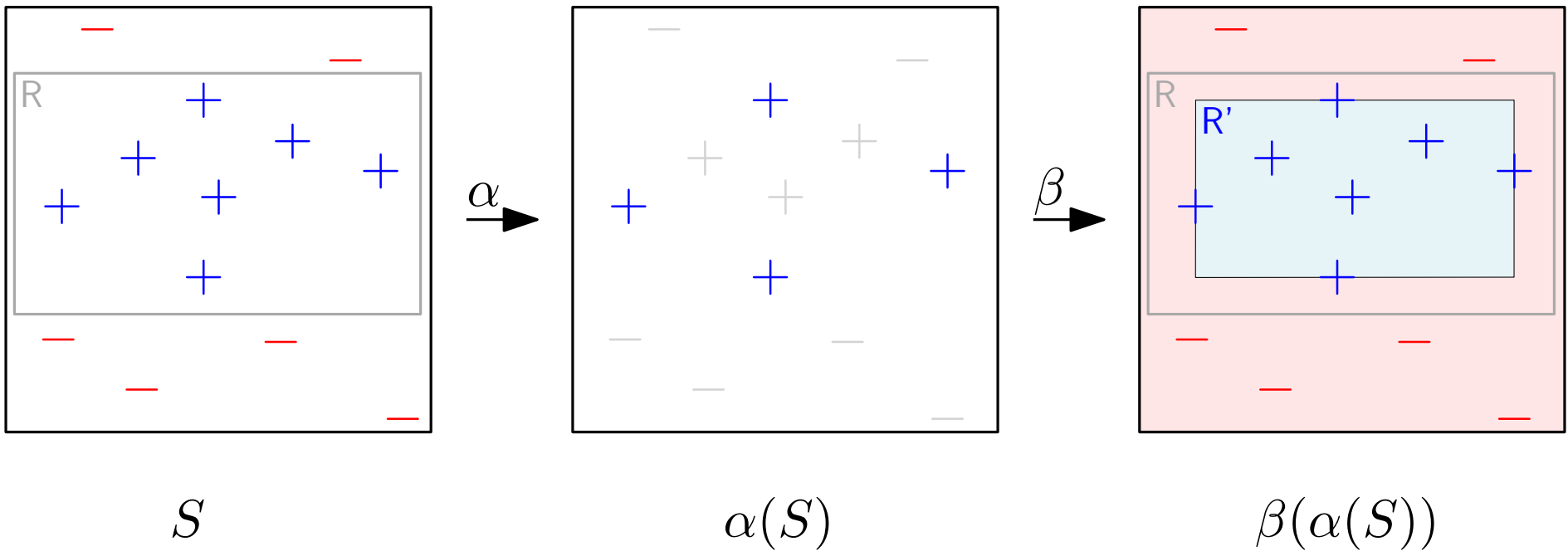


Schéma de compression

univers U

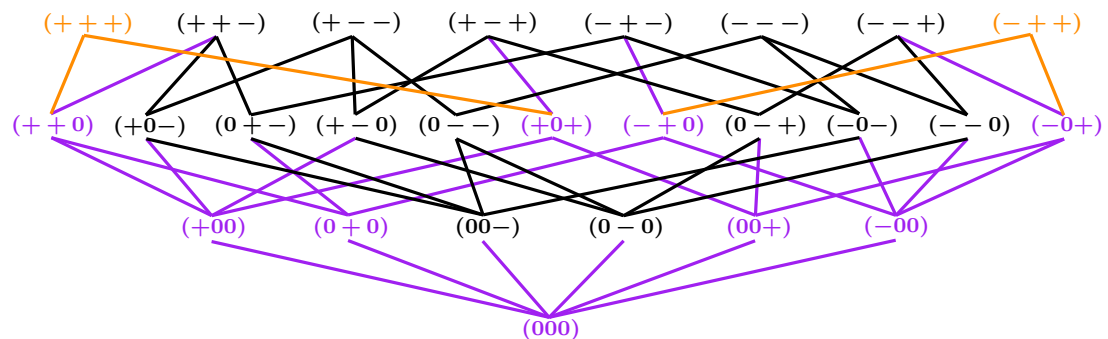
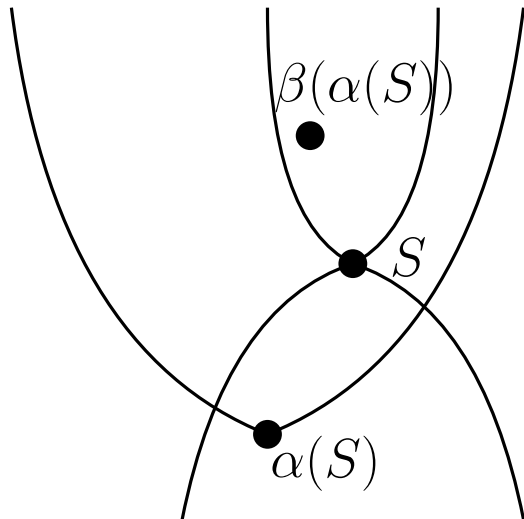
classe de concepts $\mathcal{C} \subseteq \{-, +\}^U$

échantillons réalisables $\downarrow\mathcal{C} := \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \{S \in \{-, 0, +\}^U : S \leq C\}$

Un **schéma de compression étiqueté de taille k** :

- **compresseur** $\alpha : \downarrow\mathcal{C} \rightarrow \{-, 0, +\}^U$
- **reconstructeur** $\beta : \{-, 0, +\}^U \rightarrow \{-, +\}^U$

t.q. $\forall S \in \downarrow\mathcal{C}, \alpha(S) \leq S \leq \beta(\alpha(S))$ et $|\alpha(S)| \leq k$

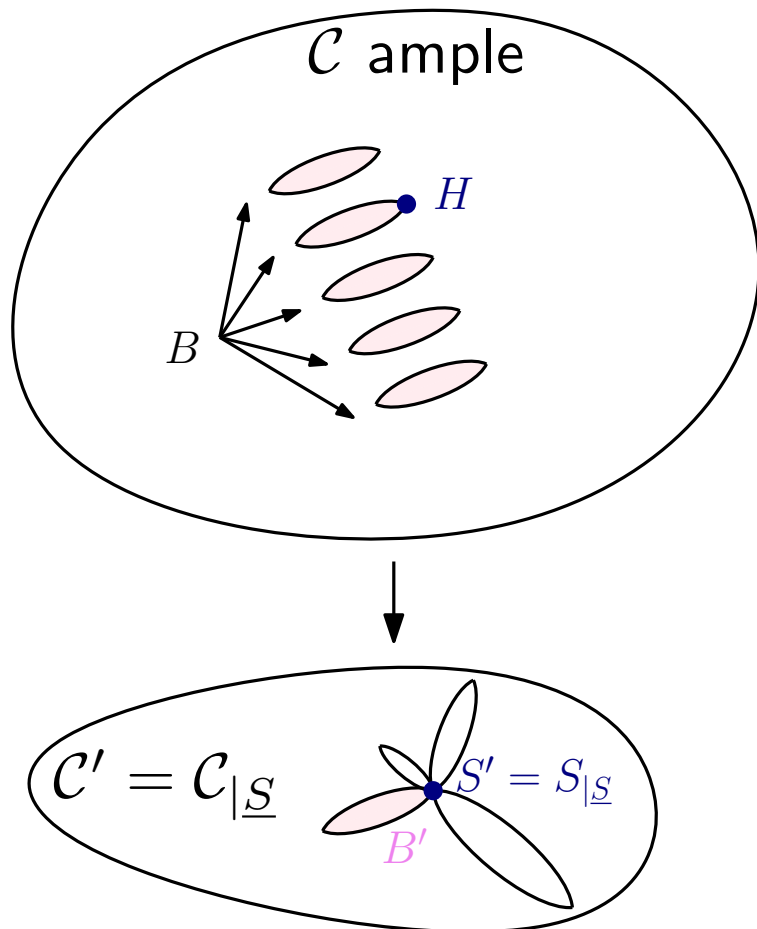


Un schéma est dit **propre** si $\forall S \in \mathcal{C}, \beta(\alpha(S)) \in \mathcal{C}$

Compression pour les amples

Théorème [Moran et Warmuth, 2016] :

Tout cube partiel ample de VC-dimension d admet un schéma de compression étiqueté propre de taille d .



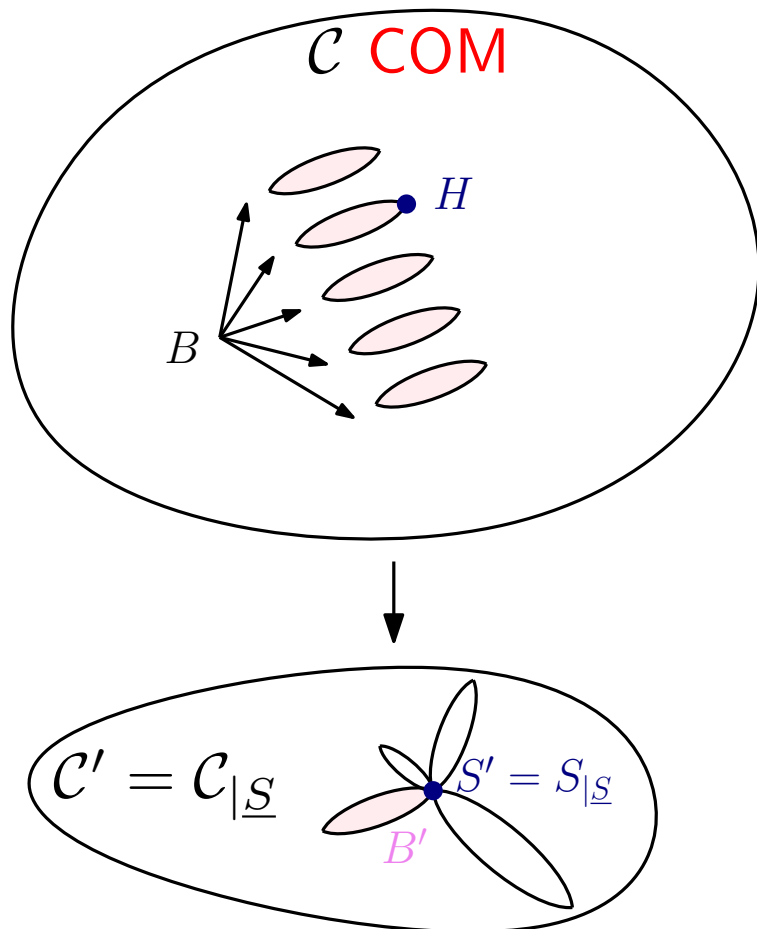
$$\mathcal{C} \subseteq \{-, +\}^U \text{ et } S \in \downarrow \mathcal{C}$$

- clos par contractions;
- les faces maximales de \mathcal{C}' contenant S' sont des hypercubes;
- $\text{VC-dim}(B') \leq \text{VC-dim}(\mathcal{C}') \leq \text{VC-dim}(\mathcal{C})$;
- $\forall v \in V(B'), \text{deg}_{B'}(v) = \text{VC-dim}(B')$.

$$\alpha(S) := S|_{\dim(B')}$$

$\beta(\alpha(S)) :=$ n'importe quel concept H appartenant à un hypercube B de \mathcal{C} et consistant avec $\alpha(S)$

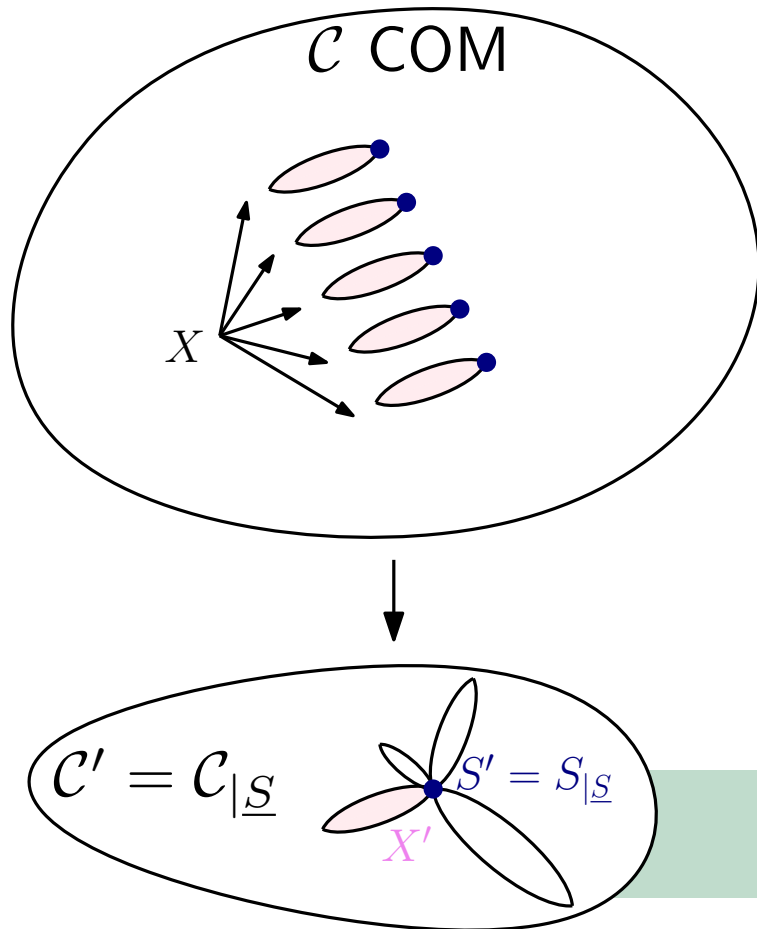
Compression pour les COMs



$\mathcal{C} \subseteq \{-, +\}^U$ et $S \in \downarrow \mathcal{C}$

- clos par contractions;
- les faces maximales de \mathcal{C}' contenant S' sont des OMs;
- $\text{VC-dim}(B') \leq \text{VC-dim}(\mathcal{C}') \leq \text{VC-dim}(\mathcal{C})$;
- $\forall v \in V(B'), \text{deg}_{B'}(v) \geq \text{VC-dim}(B')$.

Lemme de localisation



$$\mathcal{H}_{S, X'} := \{X \in \mathcal{L} : X \setminus S^0 = X', \text{ et } \text{VC-dim}(X) = \text{VC-dim}(X')\}$$

$$\alpha(S) \text{ et } D := \underline{\alpha}(S)$$

$$\mathcal{H}_D := \{X \in \mathcal{L} : \mathcal{M} \setminus \underline{X} \text{ max-pulvérisé } D\}$$

Lemme de localisation : $\emptyset \neq \mathcal{H}_{S, X'} = \mathcal{H}_D$.

Compression propre pour les COMs

Compresseur :

$$\alpha(S)_e := \begin{cases} S_e & \text{si } e \in f_{\mathcal{M}' \setminus \underline{X}'}(S'); \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Reconstructeur :

$\alpha(S)$ et $D := \underline{\alpha}(S)$

Il existe $X \in \mathcal{L}$ t.q. $\mathcal{M} \setminus \underline{X}$ max-pulvérise D

Soit $\tilde{S} \in \downarrow \mathcal{L}$ un échantillon vérifiant :

- | | |
|--|--|
| (1) $\tilde{S} \geq X$; | (3) \tilde{S} est plein dans $\mathcal{M} \setminus \underline{X}$; |
| (2) $\text{Sep}(\tilde{S}, \alpha(S)) = \emptyset$; | (4) $f_{\mathcal{M} \setminus \underline{X}}(\tilde{S}) = D$. |

$\beta(\alpha(S)) :=$ n'importe quel tope T de \mathcal{M} avec $T \geq \tilde{S}$

Théorème 4 [Chepoi, Knauer, et P.]:

L'ensemble des topes d'un COM de VC-dimension d admet un schéma de compression étiqueté propre de taille d .

Résultats

Caractérisations des cubes partiels de VC-dimension ≤ 2

Complétions amples des OMs et des CUOMs

Compression de taille d pour les COMs

Caractérisations des grilles et cylindres partiels

Grilles et cylindres partiels

$\mathcal{F}^*(\mathcal{X})$: cubes partiels ne contenant aucun élément de \mathcal{X} dans ses pc-mineurs comme sous-graphe isométrique

Théorème 5 [Chepoi, Knauer, et P.]:

G plongeable isométriquement dans \mathbb{Z}^2 ssi $G \in \mathcal{F}^*(\text{cyclo}, \text{star}, \text{cube})$.

Grilles et cylindres partiels

$\mathcal{F}^*(\mathcal{X})$: cubes partiels ne contenant aucun élément de \mathcal{X} dans ses pc-mineurs comme sous-graphe isométrique

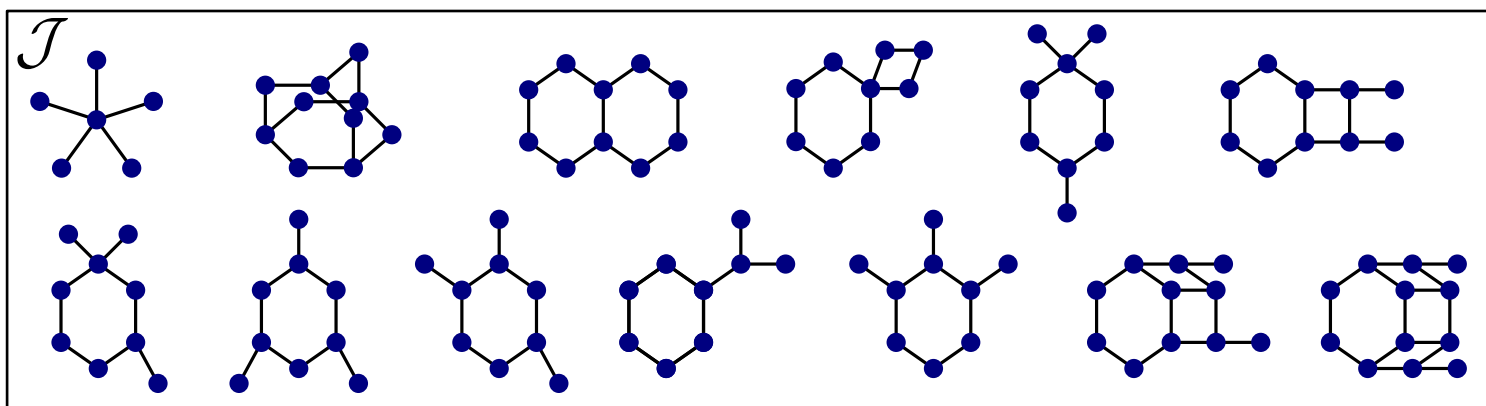
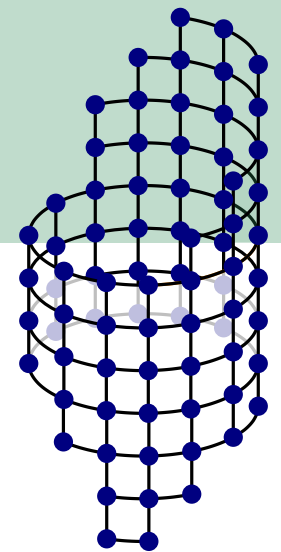
Théorème 5 [Chepoi, Knauer, et P.]:

G plongeable isométriquement dans \mathbb{Z}^2 ssi $G \in \mathcal{F}^*(\text{cyclohexane}, \text{star}, \text{cube})$.

Théorème 6 [Chepoi, Knauer, et P.]:

G cube partiel avec cycle convexe C de longueur ≥ 6 .

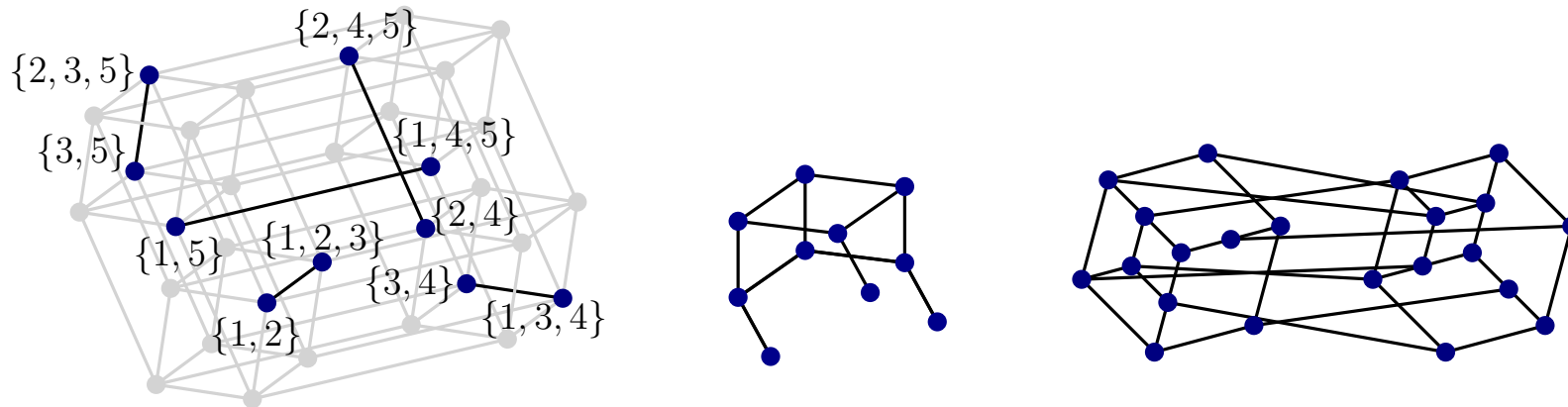
G plongeable isométriquement dans $C \square P_n$ ssi $G \in \mathcal{F}^*(\mathcal{J})$.



Perspectives

Complétions :

quelconque \rightarrow connexe \rightarrow cube partiel $\rightarrow \mathcal{G}_{\text{COM}} \rightarrow$ ample



Compression :

Schémas de compression non étiquetés de taille d pour les COMs ?

\rightarrow ouvert pour les amples [Chalopin, Chepoi, Moran, et Warmuth, 2018]

Plongement :

Un graphe médian est plongéable isométriquement dans \mathbb{Z}^d avec $d \geq 3$ ssi chacun de ses pc-mineurs a $\leq 2d$ demi-espaces minimaux ?

