UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

SUR LES μ-TREILLIS LIBRES

THÈSE

PRÉSENTÉE

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

PAR

LUIGI SANTOCANALE

JUILLET 2000

J'aimerais remercier mon directeur de thèse Monsieur André Joyal d'abord pour l'amitié qu'il m'a démontré dès le début de mon séjour à Montréal. C'est grâce à lui et à son encouragement que j'ai pu poursuivre les études en mathématiques et compléter mes études de doctorat. Les idées développées dans cette thèse naissent de son attentive analyse du rôle des mathématiques dans l'informatique théorique; les résultats présentés ici sont aussi les fruits des nombreuses conversations que j'ai eu avec lui.

J'aimerais remercier aussi ma famille pour son encouragement à poursuivre ce type d'études, Max Kelly et l'équipe de recherche en Théorie des Catégories de Sydney pour leur hospitalité pendant la période janvier-juin 1999, enfin les travailleurs, les professeurs et les étudiants de l'Université du Québec à Montréal pour le bon temps que j'ai eu pendant mes études doctorales.

RÉSUMÉ

Un μ-treillis est un treillis L avec la propriété que tout polynôme avec coefficients dans L possède à la fois un plus petit point préfixe et un plus grand point postfixe. Dans ce travail nous définissons la quasivariété des μ-treillis et, pour un ensemble partiellement ordonné P, nous construisons un μ-treillis $\mathcal{J}_P$ dont les éléments sont des classes d'équivalence de jeux appartenants à une classe préordonnée $\mathcal{J}(P)$. Nous montrons que le μ-treillis $\mathcal{J}_P$ est libre sur l'ensemble ordonné P et que la relation d'ordre de $\mathcal{J}_P$ est décidable si la relation d'ordre de P est décidable. À l'aide de cette caractérisation nous montrons que la variété équationelle des μ-treillis est engendrée par la classe des treillis complets.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Un théorème classique de la théorie des treillis (Tarski, 1955; Birkhoff, 1967, chapitre 5) affirme que si L est un treillis complet et si $f : L \longrightarrow L$ est une fonction qui préserve l'ordre, alors f possède un point fixe. En effet, on peut choisir comme point fixe l'infimum de l'ensemble des éléments $l \in L$ tels que $f(l) \leq l$. Nous appelons un élément avec cette propriété un point préfixe de f; une façon équivalente de présenter le même résultat est alors la suivante: soient P un ensemble partiellement ordonné et $f : P \longrightarrow P$ une fonction préservant l'ordre, si le plus petit point préfixe de f existe, alors il est un point fixe de f. Un point postfixe de f est défini par dualité, c'est-à-dire qu'il est un point préfixe de f dans P^{op}, et une proposition analogue vaut pour le plus grand point postfixe de f.

Un μ-treillis est un treillis avec la propriété que tout polynôme possède un plus petit point préfixe et un plus grand point postfixe. Un polynôme est ici un opérateur dérivé qui est évalué dans toutes ses variables sauf une. Cependant, dans la théorie que nous allons développer, les opérateurs dérivés sont obtenus à partir des opérateurs élémentaires de la théorie des treillis de deux façons différentes: par substitution et par des opérations qu'on pourrait appeler « de plus petit point préfixe » et « de plus grand point postfixe ». Un polynôme est donc une fonction préservant l'ordre induit par l'évaluation d'une expression formelle construite à partir des variables, des éléments du treillis, des infima et suprema finis, par les opérations de substitution, de plus petit point préfixe et de plus grand point postfixe.

Un morphisme de μ-treillis est un morphisme de treillis entre deux μ-treillis qui préserve aussi les points préfixes et les points postfixes dont on demande l'existence. On définit de cette façon une catégorie qui est en effet une quasi-variété, ce qui est évident du fait que la propriété d'être le plus petit point préfixe d'un opérateur est définissable à l'aide d'implications d'équations.

Un autre théorème classique de la théorie des treillis est du à Philip Whitman (Whitman, 1941), cf. aussi (Freese, Ježek et Nation, 1995). On montre qu'un treillis L est librement engendré par un sous-ensemble $X \subseteq L$ si et seulement si le treillis L et son sous-ensemble X satisfont une liste finie de conditions et à l'aide de cette caractérisation on arrive à résoudre le problème du mot pour la théorie des treillis.

Le but de cette thèse est de donner une construction explicite du μ-treillis $\mathcal{J}_P$ libre sur P, où P est un ensemble partiellement ordonné. À l'aide de cette caractérisation nous serons aussi capables de donner une solution au problème du mot pour la théorie des μ-treillis. Une autre conséquence qu'on peut déduire de cette caractérisation est que la classe des treillis complets engendre la variété équationelle des μ-treillis. Nous allons décrire le μ-treillis $\mathcal{J}_P$ à l'aide d'une classe préordonnée $\mathcal{J}(P)$ de jeux; $\mathcal{J}_P$ est en effet le quotient antisymétrique de $\mathcal{J}(P)$. Les jeux de la classe $\mathcal{J}(P)$ sont des jeux avec information complète et fonction d'utilité qui prend les valeurs dans l'ensemble partiellement ordonné P; ces jeux admettent aussi des parties infinies et dans ce cas un joueur seulement est considéré gagnant. Le préordre de cette classe est défini en construisant un jeu de communication $\langle G, H\rangle$, $G, H \in \mathcal{J}(P)$, et en déclarant que $G \leq H$ si le joueur qu'on appelle « médiateur » possède une stratégie gagnante dans ce jeu.

Le concept algébrique de μ-treillis a été déjà implicitement proposé, il est lié à la notion générale de μ-algèbre, étudiée dans (Niwiński, 1985; Niwiński, 1997), de cette façon: pour toute théorie algébrique $\mathbb{T}$ on peut définir la théorie des μ-algèbres μ-$\mathbb{T}$ de façon que, pour la théorie des treillis, les μ-algèbres sont exactement les μ-treillis. À la fois, le concept de μ-algèbre a été inspiré par le μ-calcul propositionnel (Pratt, 1981; Kozen, 1983). Ce système logique est essentiellement le système modal K auquel on a ajouté les opérations de plus petit et de plus grand point fixe. Rappelons ici une motivation principale qui est à la naissance et a poussé le développement des études sur le μ-calcul propositionnel. Un des problèmes principaux de l'informatique théorique est la vérification des logiciels. On peut représenter un logiciel par un système de transition qui est à la fois un modèle de la logique modale, temporelle ou dynamique, cf. (Goldblatt, 1992). On peut donc développer des outils pour vérifier si un système de transition satisfait une propriété exprimable dans ces logiques. Cependant, quelque propriété d'intérêt informatique, par exemple la terminaison des calculs, est inexprimable à l'aide de ces logiques, d'où l'on a ajouté les opérations de plus petit et plus grand point fixe afin d'en augmenter la puissance d'expression. Rappelons aussi qu'un avantage du μ-calcul propositionnel par rapport à d'autres logiques est que la complexité de calcul des algorithmes de vérification des modèles demeure raisonnable.

Nos motivations pour étudier les μ-treillis libres sont liées au problème de la vérification des logiciels, mais elles peuvent être rapprochés aussi du problème de la théorisation des langages de programmation et de leur sémantique, cf. (Milne et Strachey, 1976; Winskel, 1993). Dans (Joyal, 1997) la solution de P. Whitman au problème du mot pour la théorie des treillis est interprétée et généralisée à l'aide de concepts tels que « jeu », « jeu monétaire » et « communication ». Rappelons qu'un système interactif peut être considéré comme un jeu entre deux joueurs, une machine et un utilisateur, un logiciel étant une stratégie pour la machine qui est gagnante si le logiciel est correct. Cette analogie entre les systèmes interactifs et les jeux, qui est d'ailleurs bien connue (Nerode, Yakhnis et Yakhnis, 1992; McNaughton, 1993; Abramsky et Jagadeesan, 1994), couplée avec le travail sur les jeux et la bicompletion des catégories (Joyal, 1977; Joyal, 1997; Joyal, 1995a; Joyal, 1995b), suggère de modéliser le calcul interactif à l'aide des treillis libres et des catégories bicomplètes libres. Un travail récent (Hu et Joyal, 1997) a déjà poursuivi cette idée et il a montré des liens entre un autre modèle du calcul interactif, les espaces de la cohérence de la logique linéaire (Girard, 1987), et une bicomplétion des catégories.

L'avantage principal de modéliser les systèmes interactifs avec les jeux pour les μ-treillis libres est la présence de parties infinies. En effet, dans un système interactif on pourrait avoir des comportements potentiellement infinis, d'où il en découle la nécessité d'introduire les parties infinies afin de respecter l'analogie avec ces comportements. Cependant, l'analogue algébrique de cette généralisation n'est pas intuitivement clair et à cette fin la théorie des jeux développée dans le contexte des études des relations entre la logique monadique du seconde ordre, le μ-calcul propositionnel et les ensembles d'objets infinis définissables à l'aide de ces logiques (Rabin, 1969; Gurevich et Harrington, 1982; Arnold, 1995; Thomas, 1997; Zielonka, 1998) a été une importante source d'idées. Dans l'appendice A nous donnons une version inductive de la preuve de détermination des jeux de Rabin à chaîne contenue dans (Emerson et Jutla, 1991; Walukiewicz, 1996); cette preuve met en évidence des opérateurs μ et ν sur les jeux et nous a suggéré la possibilité de décrire des treillis libres avec points fixes. En effet, on pourrait dire que les jeux dans la classe $\mathcal{J}(P)$ sont un type particulier de jeu de Rabin à chaîne, mais l'on pourrait aussi affirmer l'inverse. Remarquons que ces opérations μ et ν, qui engendrent les jeux de Rabin à chaîne, ont un rôle principal aussi dans la théorie combinatoire des jeux avec parties infinies (Conway, 1978).

Nous croyons qu'un important aspect de la théorie des μ-treillis libre est que les résultats présentés ici mènent à considérer la possibilité qu'une preuve puisse contenir des cercles vicieux, tout en demeurant une bonne preuve. On arrive à cette considération de la façon suivante. Une tradition récente dans la théorie des preuves interprète les preuves comme des stratégies dans des jeux (Felscher, 1986; Blass, 1992; Abramsky et Jagadeesan, 1994); connexe à cette tradition logique est aussi la sémantique des jeux pour les langages de programmation (Abramsky, Jagadeesan et Malacaria, 1994; Hyland et Ong, 1994); dans tous les cas, on montre que la correspondance entre les jeux, les preuves et les logiciels est suffisamment proche. De plus, on sait bien que les méthodes de la théorie des preuves peuvent être adaptées pour donner des bonnes présentations d'objets algébriques libres, cf. (Lambek et Scott, 1986). Nous allons supposer que la correspondance entre jeux, théorie des preuves et présentations des objets algébriques libres est évidente. Cette correspondance, qui nous mène à la définition formelle du système des preuves circulaires dans l'appendice C, est expliquée de cette façon: un jeu G de la classe $\mathcal{J}(P)$ est un terme, la description d'un jeu de la forme $\langle G, H \rangle$ est une façon de décrire des règles pour un calcul de séquents et enfin une stratégie gagnante dans le jeu $\langle G, H \rangle$ est une preuve sans coupures de $G \leq H$ dans ce calcul. Cependant, la comparaison de cette stratégie avec une preuve mène à considérer des preuves infinies ou bien, en raison du théorème d'existence des stratégies avec mémoire bornée, des preuves circulaires. Une preuve circulaire est ici une preuve où l'arbre sous-jacent usuel est remplacé par un graphe pointé fini. Remarquons aussi que la structure des preuves devient semblable à celle d'un terme.

Nous pouvons donc commenter les résultats contenus dans notre thèse en disant qu'ils montrent que les opérations de point fixe peuvent avoir une bonne théorie des preuves. Cette affirmation doit être interprétée de la façon suivante. Le système C des preuves circulaires pour la théorie des μ-treillis est donné et on montre qu'il est équivalent au système traditionnel T pour cette théorie. En effet, la preuve que l'ensemble $\mathcal{J}_P$ est un μ-treillis montre que dans le système C toute règle du système T est satisfaite et la preuve que $\mathcal{J}_P$ est libre montre la réciproque. Il n'y a pas de raison d'affirmer que le système T satisfait l'élimination des coupures; par contre le système C possède cette propriété et de cette façon on arrive à donner un algorithme pour décider de la relation d'ordre pour la théorie des μ-treillis. La caractéristique principale du système C est que le graphe sous-jacent à une preuve n'est pas une arborescence finie, mais un graphe pointé fini qui pourrait contenir des cycles; pour cette raison nous appelons le système C le système des preuves circulaires.

Par rapport à d'autres contextes logiques où l'on trouve des théorèmes d'élimination de coupures infinis, notre théorie des preuves circulaires est essentiellement finitiste et elle abouti à des algorithmes de décision. Remarquons que des situations analogues se présentent aussi dans la théorie de la complétude du μ-calcul propositionnel (Walukiewicz, 1995): les preuves circulaires sont des analogues des réfutations régulières, cf. aussi (Niwiński et Walukiewicz, 1996), et un lemme d'élimination des coupures joue un rôle important dans la preuve du résultat principal.

CHAPITRE I

DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES

Dans ce chapitre nous définissons le plus petit point préfixe d'un opérateur unaire, c'est-à-dire d'une endo-fonction préservant l'ordre, et nous démontrons ses propriétés élémentaires. Des définitions et propriétés duales sont évidemment valables pour le plus grand point postfixe. Nous définissons donc la notion de μ-treillis et la catégorie des μ-treillis.

Notre exposition a été suggérée par (Niwiński, 1985). Dans ce travail, les propriétés élémentaires du plus petit point préfixe sont aussi développées; dans notre traitement du sujet nous posons aussi l'attention sur le fait que, dans certaines égalités, l'existence d'un des deux membres de l'égalité entraîne l'existence de l'autre. De plus, dans (Niwiński, 1985) est définie la catégorie des μ-algèbres par rapport à une catégorie d'algèbres donnée. Si la catégorie donnée est celle des treillis alors notre définition de la catégorie des μ-treillis et celle des μ-algèbres coïncident. Enfin, il est évident que la catégorie des μ-treillis est une quasi-variété si l'on considère le fait que le plus petit point préfixe est définissable à l'aide d'implications d'équations (dans le cas où l'on peut exprimer une inéquations à l'aide d'équations, comme pour les treillis). Cet approche est développée dans (Niwiński, 1985) car on y construit la μ-algèbre libre sur un ensemble de variables à l'aide d'un calcul logique.

1.1 Préliminaires sur les opérateurs μ et ν

Rappelons qu'un ensemble (partiellement) ordonné est un couple $\langle P, \leq \rangle$, où P est un ensemble et $\leq \subseteq P \times P$ est une relation réflexive, transitive et antisymétrique. Soient $\langle P, \leq \rangle$ et $\langle Q, \leq \rangle$ deux ensembles ordonnés, une fonction $f : P \longrightarrow Q$ préserve l'ordre si $p \leq p'$ entraîne $f(p) \leq f(p')$. Chaque définition qui suit est valable dans la catégorie $\mathcal{O}$ des ensembles (partiellement) ordonnés et opérateurs, les opérateurs étant des fonctions préservant l'ordre.

Définition 1.1.1 Soient P un ensemble ordonné et $\phi : P \longrightarrow P$ un endo-opérateur. Le *plus petit point préfixe* de ϕ, s'il existe, est un élément $\mu.\phi \in P$ tel que:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \phi(\ \mu.\phi\ ) \ \leq \ \mu.\phi\ , \\ \text{(ii)} & \phi(\ p\ ) \leq p \ \ \Rightarrow \ \ \mu.\phi \leq p\ . \end{array}$$

Le *plus grand point postfixe* de ϕ, étant donné qu'il existe, est un élément $\nu.\phi \in P$ tel que:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \nu.\phi \ \leq \ \phi(\ \nu.\phi\ )\ , \\ \text{(ii)} & p \leq \phi(\ p\ ) \ \ \Rightarrow \ \ p \leq \nu.\phi\ . \end{array}$$

Quand nous aurons besoin de souligner la dépendance de ϕ par rapport à une variable nous écrirons aussi $\mu_z.\phi(z)$ et $\nu_z.\phi(z)$ pour $\mu.\phi$ et $\nu.\phi$, respectivement. Le choix de la variable z est arbitraire.

Proposition 1.1.2 Soient P un ensemble ordonné et $\phi : P \longrightarrow P$ un endo-opérateur. On a:

$$\begin{array}{rcl} \mu.\phi & = & \bigwedge\{\ p \mid \phi(\ p\ ) \leq p\ \}\ , \\ \nu.\phi & = & \bigvee\{\ p \mid p \leq \phi(\ p\ )\ \}\ , \end{array}$$

à savoir: l'un des membres de ces égalités existe si et seulement si l'autre existe, et dans ce cas, on a égalité.

Preuve. Supposons que $\mu = \bigwedge\{\ p \mid \phi(\ p\ ) \leq p\ \}$ existe, alors il satisfait évidemment la propriété (ii) qui définit $\mu.\phi$. Considérons maintenant $\phi(\mu)$: si $\phi(p) \leq p$, de $\mu \leq p$ on déduit que $\phi(\mu) \leq \phi(p) \leq p$, donc $\phi(\mu)$ est un minorant de l'ensemble $\{ p \mid \phi(p) \leq p \}$ et l'on déduit que $\phi(\mu) \leq \mu$.

Supposons que $\mu.\phi$ existe. Par (ii), il est un minorant de l'ensemble $\{ p \mid \phi(p) \leq p \}$, il est aussi le plus grand minorant car il appartient à cet ensemble par (i). □

Soient P un ensemble ordonné et $\phi : P \longrightarrow P$ un opérateur. Posons dans la suite:

$$\begin{array}{lcl} \mathit{Préf}_\phi & = & \{ p \mid \phi(p) \leq p \} , \\ \mathit{Post}_\phi & = & \{ p \mid p \leq \phi(p) \} , \\ \mathit{Fix}_\phi & = & \{ p \mid \phi(p) = p \} . \end{array}$$

Si $X \subseteq P$, écrivons $p \leq X$ si pour tout $x \in X$ on a $p \leq x$.

Proposition 1.1.3 Soit P un ensemble ordonné, et soit $\phi : P \longrightarrow P$ un opérateur. Si $\mu.\phi$ existe, alors:

$$\phi(\mu.\phi) \;=\; \mu.\phi ,$$

c'est-à-dire $\mu.\phi \in \mathit{Fix}_\phi$.

Preuve. De $\phi(\mu.\phi) \leq \mu.\phi$, on voit que $\phi(\phi(\mu.\phi)) \leq \phi(\mu.\phi)$, c'est-à-dire $\phi(\mu.\phi) \in \mathit{Préf}_\phi$. Il suit que $\mu.\phi \leq \phi(\mu.\phi)$. On a donc $\mu.\phi \in \mathit{Fix}_\phi$. □

Proposition 1.1.4 Soient $\phi, \psi : P \longrightarrow P$ tels que $\phi \leq \psi$, c'est-à-dire pour tout $p \in P$ $\phi(p) \leq \psi(p)$. Si $\mu.\phi$ et $\mu.\psi$ existent, alors $\mu.\phi \leq \mu.\psi$.

Preuve. Soit $p \in P$ tel que $\psi(p) \leq p$. De $\phi(p) \leq \psi(p)$, il suit $\phi(p) \leq \psi(p) \leq p$. On a montré que $\mathit{Préf}_\psi \subseteq \mathit{Préf}_\phi$ et l'on obtient le résultat voulu en passant aux infima. □

Lemme 1.1.5 Soient $\phi : P \longrightarrow Q$ et $\psi : Q \longrightarrow P$ deux opérateurs tels que $\mu.(\psi \circ \phi)$ existe. Alors $\mu.(\phi \circ \psi)$ existe aussi et on a l'égalité:

$$\mu.\phi \circ \psi \;=\; \phi(\mu.\psi \circ \phi) .$$

Preuve. Montrons que $\phi(\ \mu.\psi \circ \phi\ ) \in Fix_{\phi\circ\psi} \subseteq Préf_{\phi\circ\psi}$:

$$\begin{aligned}(\phi \circ \psi)(\ \phi(\ \mu.\psi \circ \phi\ )\ ) &= \phi(\ \psi \circ \phi(\ \mu.\psi \circ \phi\ )\ ) \\ &= \phi(\ \mu.\psi \circ \phi\ )\ .\end{aligned}$$

Soit maintenant $q \in Q$ tel que $\phi \circ \psi(q) \leq q$. Il suit que $\psi \circ \phi(\psi(q)) \leq \psi(q)$ et donc $\mu.\psi \circ \phi \leq \psi(q)$. Donc on a aussi $\phi(\mu.\psi \circ \phi) \leq \phi \circ \psi(q) \leq q$. □

Corollaire 1.1.6 Soit $n \geq 1$ et $\phi : P \longrightarrow P$ un opérateur tel que $\mu.\phi^n$ existe. Alors $\mu.\phi$ existe aussi et l'on a $\mu.\phi = \mu.\phi^n$.

Preuve. Soit p tel que $\phi(p) \leq p$. Alors on a aussi $\phi^n(p) \leq p$. Donc $Préf_\phi \subseteq Préf_{\phi^n}$ et $\mu.\phi^n$ est un minorant de l'ensemble $Préf_\phi$. Par contre, à cause du lemme 1.1.5 avec $\psi = \phi^{n-1}$, on a aussi $\mu.\phi^n = \phi(\mu.\phi^n)$, à savoir $\mu.\phi^n \in Préf_\phi$. Il suit que $\mu.\phi = \mu.\phi^n$. □

Proposition 1.1.7 Soit L un treillis, et soit $\phi : L \longrightarrow L$ un opérateur. Définissons:

$$\begin{aligned}q_0(z) &= \phi(z), \\ q_{n+1}(z) &= \phi(z \wedge q_n(z))\ .\end{aligned}$$

Si $\mu.q_n$ existe, alors $\mu.q_m$ existe pour tout $m \leq n$ et l'on a $\mu.q_m = \mu.q_n$.

Preuve. Pour tout $n \geq 0$ on a $q_{n+1} \leq q_n$. En effet $q_1(z) = \phi(z \wedge \phi(z)) \leq \phi(z) = q_0(z)$. Supposons que $q_n(z) \leq q_{n-1}(z)$, il suit que $q_{n+1}(z) = \phi(z \wedge q_n(z)) \leq \phi(z \wedge q_{n-1}(z)) = q_n(z)$.

Or, supposons que $\mu = \mu.q_{n+1}$ existe. Il suit que $\mu = q_{n+1}(\mu) \leq q_n(\mu)$ et donc $\mu = \mu \wedge q_n(\mu)$. On obtient $\phi(\mu) = \phi(\mu \wedge q_n(\mu)) = q_{n+1}(\mu) = \mu$, donc $\mu \in Préf_\phi$. Comme $Préf_\phi \subseteq Préf_{q_{n+1}}$, il en découle que $\mu \leq Préf_\phi$. Cela suffit pour démontrer la proposition. □

Définition 1.1.8 Plus généralement, soit $\phi : P^{n+1} \longrightarrow P$ un opérateur. Soit $s \in \{1, \ldots, n+1\}$. Définissons $\mu_s.\phi : P^n \longrightarrow P$, $\nu_s.\phi : P^n \longrightarrow P$ par:

$$\begin{aligned}(\mu_s.\phi)(\rho) &= \mu.\phi_{s,\,\rho}\ , \\ (\nu_s.\phi)(\rho) &= \nu.\phi_{s,\,\rho}\ ,\end{aligned}$$

où $\phi_{s,\,\rho}(x) = \phi(\rho_1, \dots, \rho_{s-1}, x, \rho_s, \dots, \rho_n)$, pour tout $x \in P$. Disons que $\mu_s.\phi$ ($\nu_s.\phi$) existe (ou est une fonction totale) ssi pour tout vecteur $\rho \in P^n$ $\mu.\phi_{s,\,\rho}$ ($\nu.\phi_{s,\,\rho}$) existe.

Proposition 1.1.9 Soit $\phi : P^{n+1} \longrightarrow P$ un opérateur et supposons que $\mu_s.\phi$ existe. Alors $\mu_s.\phi$ est aussi un opérateur.

Preuve. Soit $(p_1, \dots, p_n) \leq (q_1, \dots, q_n)$. Il suit que $\phi_{s,\,(p_1,\dots,p_n)} \leq \phi_{s,\,(q_1,\dots,q_n)}$ et ensuite $\mu.\phi_{s,\,(p_1,\dots,p_n)} \leq \mu.\phi_{s,\,(q_1,\dots,q_n)}$. $\square$

Proposition 1.1.10 Soit $\phi : P^2 \longrightarrow P$ un opérateur et soit $\Delta : P \longrightarrow P^2$ l'opérateur diagonal. Supposons que $\psi = \mu_1.\phi$ existe. Alors:

$$\mu.\psi \quad = \quad \mu.\phi \circ \Delta \ ,$$

c'est-à-dire l'un des membres de cette égalité existe si et seulement si l'autre existe et, dans ce cas, on a égalité.

Preuve. Supposons que $\mu.\psi$ existe et posons $l = \mu.\psi$. Montrons que $l \in Préf_{\phi\circ\Delta}$, c'est-à-dire $\phi(l, l) \leq l$. On sait que $\psi(l) = l$, mais aussi que $\phi(\,\psi(l), l\,) \leq \psi(l)$, car $\phi(\,\psi(l), l\,) = \phi_{1,\,l}(\,\psi(l)\,) = \phi_{1,\,l}(\,\mu.\phi_{1,\,l}\,) \leq \mu.\phi_{1,\,l} = \psi(l)$. Il suit que $\phi(l, l) = \phi(\psi(l), l) \leq \psi(l) \leq l$. Montrons que $l \leq Préf_{\phi\circ\Delta}$. Soit t tel que $\phi(t, t) \leq t$. Cette relation montre que $\phi_{1,\,t}(t) \leq t$ et donc $\psi(t) = \mu.\phi_{1,\,t} \leq t$. On obtient alors $l = \mu.\psi \leq t$. On a donc montré que dans l'hypothèse que $\mu.\psi$ existe, alors $\mu.(\phi \circ \Delta)$ existe aussi et on a l'égalité entre les deux.

Supposons maintenant que $\mu.(\phi \circ \Delta)$ existe et posons $t = \mu.(\phi \circ \Delta)$. Montrons que $t \in Préf_{\psi}$, c'est-à-dire $\psi(t) \leq t$. Or $\psi(t) = \mu.\phi_{1,\,t}$, il suffit donc montrer que t est un point préfixe de l'opérateur $\phi_{1,\,t}$, c'est-à-dire $\phi(t, t) \leq t$, ce qui est vrai. Montrons que $t \leq Préf_{\psi}$. Soit l tel que $\psi(l) \leq l$. Or $\psi(l) = \mu.\phi_{1,\,l}$ et donc $\phi(\psi(l), l) = \phi_{1,\,l}(\psi(l)) \leq \psi(l)$. Il suit que $\phi(\psi(l), \psi(l)) \leq \phi(\psi(l), l) \leq \psi(l)$, $\psi(l) \in Préf_{\phi\circ\Delta}$ et donc $t \leq \psi(l) \leq l$. On a donc montré que dans l'hypothèse que $\mu.(\phi \circ \Delta)$ existe, alors $\mu.\psi$ existe aussi et on a l'égalité entre les deux. $\square$

Définition 1.1.11 On peut généraliser encore plus. Soit $\phi : P^{n+k} \longrightarrow P$ un opérateur et soit $S \subseteq \{1, \ldots, n+k\}$ tel que $\mathrm{card}\, S = k$. Définissons $\mu_S.\phi : P^n \longrightarrow P$, $\nu_S.\phi : P^n \longrightarrow P$ par:

$$\begin{aligned}
(\mu_S.\phi)(\rho) &= \mu.\phi_{S,\,\rho}\ , \\
(\nu_S.\phi)(\rho) &= \nu.\phi_{S,\,\rho}\ ,
\end{aligned}$$

où $\phi_{S,\,\rho}(x) = \phi(\rho^{S,x})$, pour tout $x \in P$, et $\rho^{S,x} : n+k \longrightarrow P$ est l'unique vecteur tel que:

$$\begin{aligned}
\rho^{S,x} \circ \epsilon^S &= \rho\ , \\
\rho^{S,x}(i) &= x, \ \text{ si } i \in S\ .
\end{aligned}$$

Ici ϵ^S est l'unique injection de n vers $n+k$ qui préserve l'ordre et telle que l'image de n est $n+k \setminus S$. Disons que $\mu_S.\phi$ ($\nu_S.\phi$) existe (ou est une fonction totale) ssi pour tout vecteur $\rho \in P^n$ $\mu.\phi_{S,\,\rho}$ ($\nu.\phi_{S,\,\rho}$) existe.

Remarque 1.1.12 Les deux conditions qui définissent $\rho^{S,x}$ sont équivalente à dire que $\rho^{S,x}$ est l'unique fonction telle que les diagrammes suivants sont commutatifs:

$$\begin{tikzcd}
n \arrow[r, "\epsilon^S"] \arrow[dr, "\rho"'] & n+k \arrow[d, dotted, "\rho^{S,x}"] & S \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\
& P & 1 \arrow[l, "x"'] \ .
\end{tikzcd}$$

Pour $S = \emptyset$ on a aussi $\rho^{S,x} = \rho$ et par conséquent $\mu_\emptyset.\phi = \nu_\emptyset.\phi = \phi$. Comme $(\rho_1, \ldots, \rho_{s-1}, x, \rho_s, \ldots, \rho_n) = \rho^{\{s\},x}$, nous allons écrire $\rho^{s,x}$ en lieu de $\rho^{\{s\},x}$.

Proposition 1.1.13 Soit $\phi : P^{n+k} \longrightarrow P$ et $S \subseteq n+k$ avec $\mathrm{card}\, S = k$, c'est-à-dire $S = \{s_1 < s_2 < \ldots < s_k\}$. Posons $\phi_0 = \phi$ et pour $j = 1, \ldots, k$ soit $\phi_{j+1} = \mu_{s_{k-j}}.\phi_j : P^{n+k-j} \longrightarrow P$, et supposons que tous les ϕ_j existent. On a alors que:

$$\mu_S.\phi \ = \ \phi_k \ ,$$

à savoir l'opérateur sur la gauche existe aussi et on a égalité.

Preuve. Par induction sur k. Si $\operatorname{card} S = 1$ on se réduit à observer que:

$$\mu_{\{s\}}.\phi \;=\; \mu_s.\phi \;,$$

ce qui se découle du fait que $(\rho_1, \ldots, \rho_{s-1}, x, \rho_s, \ldots, \rho_n) = \rho^{\{s\},x}$.

Soit donc $\phi : P^{n+k+1} \longrightarrow P$, $S = \{s_1 < s_2 < \ldots < s_{k+1}\} \subseteq n+k+1$ et supposons que les ϕ_j existent pour $j = 1, \ldots, k+1$.

Soit $S' = S \backslash \{s_1\}$ et soit $\rho \in P^n$ un vecteur fixé. Puisque $\epsilon^S = \epsilon^{S'} \circ \epsilon^{s_1}$, on voit que:

$$\rho^{S,x} \;=\; (\rho^{s_1,x})^{S',x} \;.$$

Or, $\operatorname{card} S' = k$ et par hypothèse d'induction $\mu_{S'}.\phi = \phi_k : P^{n+1} \longrightarrow P$. On sait aussi que $\mu_{s_1}.\phi_k$ existe et on peut utiliser la proposition 1.1.10:

$$\begin{aligned}
(\ \mu_S.\phi\ )(\rho) &= \mu_z.\phi(\ \rho^{S,z}\ ) \\
&= \mu_z.\phi(\ (\rho^{s_1,z})^{S',z}\ ) \\
&= \mu_{z_1}.\mu_{z_2}.\phi(\ (\rho^{s_1,z_1})^{S',z_2}\ ) \\
&= \mu_z.(\ (\mu_{S'}.\phi)(\rho^{s_1,z})\ ) \\
&= \mu_z.(\ \phi_k(\rho^{s_1,z}\ )\ ) \\
&= (\mu_{s_1}.\phi_k)(\rho) \\
&= \phi_{k+1}(\rho) \;.
\end{aligned}$$

□

Définition 1.1.14 Soit P un ensemble ordonné avec $\perp$ élément minimum. Soit $\phi : P \longrightarrow P$ un opérateur. Définissons $\phi^\alpha(\perp)$ pour tout ordinal α:

$$\begin{aligned}
\phi^0(\perp) &= \perp\,, \\
\phi^{\alpha+1}(\perp) &= \phi(\ \phi^\alpha(\perp)\ )\,, \\
\phi^\beta(\perp) &= \bigvee_{\alpha<\beta} \phi^\alpha(\perp)\ , \text{ si } \beta \text{ est un ordinal limite.}
\end{aligned}$$

La définition est conditionellle à l'existence de tels suprema. En particulier si P est complet ou possède seulement les suprema des ensembles filtrants, alors $\phi^\alpha(\perp)$ existe pour tout ordinal α. De même, définissons:

$$\begin{aligned} \phi^0(\top) &= \top \,, \\ \phi^{\alpha+1}(\top) &= \phi(\ \phi^\alpha\ )\,, \\ \phi^\beta(\top) &= \bigwedge_{\alpha<\beta} \phi^\alpha(\top)\,, \text{ si } \beta \text{ est un ordinal limite.} \end{aligned}$$

Lemme 1.1.15 Soient P un ensemble ordonné avec $\perp$ élément minimum et $\phi : P \longrightarrow P$ un opérateur. Supposons que $\phi^\alpha(\perp)$ existe pour tout ordinal α. Soit β un cardinal tel que $\beta > \operatorname{card} P$. Alors il existe un ordinal $\gamma < \beta$ tel que pour tout ordinal $\alpha \geq \gamma$ on a:

$$\phi^\alpha(\perp) \;=\; \phi^\gamma(\perp).$$

Preuve. Si la propriété n'est pas vraie alors les inégalités de la suite

$$\perp \leq \phi(\perp) \leq \ldots \leq \phi^\beta(\perp)$$

sont propres. Il existe alors un sous-ensemble de P de cardinalité strictement plus grande que la cardinalité de P, ce qui est impossible. $\square$

Définition 1.1.16 Soient P un ensemble ordonné avec $\perp$ élément minimum et ϕ : $P \longrightarrow P$ un opérateur. Supposons que $\phi^\alpha(\perp)$ existe pour tout ordinal α. Posons:

$$\bigvee_{\alpha\in Ord} \phi^\alpha(\perp) \;=\; \phi^\beta(\perp)\,,$$

où β est un cardinal plus grand que $\operatorname{card} P$.

Proposition 1.1.17 Soient P un ensemble ordonné avec $\perp$ élément minimum et ϕ : $P \longrightarrow P$ un opérateur. Supposons que $\bigvee_{\alpha\in Ord} \phi^\alpha(\perp)$ existe. Alors:

$$\mu.\phi \;=\; \bigvee_{\alpha\in Ord} \phi^\alpha(\perp)\ .$$

Preuve. On a vu que $\phi(\bigvee_{\alpha\in Ord} \phi^\alpha(\perp)) = \phi(\phi^\beta(\perp)) = \phi^{\beta+1}(\perp) = \phi^\beta(\perp) = \bigvee_{\alpha\in Ord} \phi^\alpha(\perp)$ où β est un cardinal plus gros que $\operatorname{card} P$. Donc $\bigvee_{\alpha\in Ord} \phi^\alpha(\perp)$ est un point fixe. Soit $x \in P$ tel que $\phi(x) \leq x$. Par induction on voit que $\phi^\alpha(\perp) \leq x$ pour tout ordinal α. Donc $\bigvee_{\alpha\in Ord} \phi^\alpha(\perp) \leq x$. $\square$

Proposition 1.1.18 Des résultats analogues à ceux des numéros 1.1.3-1.1.17 sont valables pour les opérateurs $\nu_s.\phi$.

Proposition 1.1.19 Soit L un treillis et soient $\psi_1, \psi_2 : L \longrightarrow L$. Soit $\phi = \psi_1 \wedge \psi_2$ et supposons que $\mu.\phi$ existe. Posons $\phi'(x) = (\psi_1(x) \vee x) \wedge \psi_2(x)$, alors $\mu.\phi'$ existe aussi et l'on a $\mu.\phi' = \mu.\phi$.

Preuve. De $\phi \leq \phi'$ il suit que $\mathit{Préf}_{\phi'} \subseteq \mathit{Préf}_{\phi}$, et donc $\mu.\phi \leq \mathit{Préf}_{\phi'}$. Mais on a aussi $Fix_\phi \subseteq Fix_{\phi'}$: soit μ tel que $\mu = \psi_1(\mu) \wedge \psi_2(\mu)$. Alors:

$$\begin{aligned}
(\ \psi_1(\mu) \vee \mu\ ) \wedge \psi_2(\mu) &= (\ \psi_1(\mu) \vee (\ \psi_1(\mu) \wedge \psi_2(\mu)\ )\ ) \wedge \psi_2(\mu) \\
&= \psi_1(\mu) \wedge \psi_2(\mu) \\
&= \mu\ .
\end{aligned}$$

Il suit que $\mu.\phi \in \mathit{Préf}_{\phi'}$ et donc $\mu.\phi' = \mu.\phi$. □

1.2 μ-treillis et μ-treillis libres

Définition 1.2.1 Soit P un ensemble ordonné. Posons:

$$P_* = \sum_{n \geq 0} [P^n, P]\ ,$$

où $[P^n, P]$ est l'ensemble des fonctions préservant l'ordre de P^n vers P.

Un sous-ensemble $S \subseteq P_*$ est *algébriquement fermé* s'il satisfait les conditions suivantes:

1. si $\bigwedge^n : P^n \longrightarrow P$ est défini, alors il appartient à S;

2. si $\bigvee^n : P^n \longrightarrow P$ est défini, alors il appartient à S;

3. si $\phi_i : P^{k_i} \longrightarrow P \in S$, pour $i = 1, \ldots, n$, et si $\phi : P^n \longrightarrow P \in S$, alors $\phi \circ (\phi_1, \ldots, \phi_n) : P^k \longrightarrow P$ appartient à S, où $k = \sum_{i=1,\ldots,n} k_i$;

4. si $\phi : P^{n+1} \longrightarrow P$ est dans S et si $\mu_s.\phi : P^n \longrightarrow P$ existe, alors $\mu_s.\phi$ est dans S;

5. si $\phi : P^{n+1} \longrightarrow P$ est dans S et si $\nu_s.\phi : P^n \longrightarrow P$ existe, alors $\nu_s.\phi$ est dans S.

Définition 1.2.2 L'intersection d'une famille de sous-ensembles algébriquement fermés est encore un sous-ensemble algébriquement fermé. Appelons $\mathcal{A}_P$ le plus petit ensemble algébriquement fermé.

Définition 1.2.3 Un *μ-treillis* est un treillis L satisfaisant les deux conditions suivantes:

- si $\phi : L^{n+1} \longrightarrow L$ est dans $\mathcal{A}_L$, alors $\mu_s.\phi$ existe, pour tout $s \in \{1, \ldots, n+1\}$;
- si $\phi : L^{n+1} \longrightarrow L$ est dans $\mathcal{A}_L$, alors $\nu_s.\phi$ existe, pour tout $s \in \{1, \ldots, n+1\}$.

Exemple 1.2.4 Soit L un treillis complet, alors L est un μ-treillis. En effet, dans un treillis complet, le plus petit point préfixe et le plus grand point postfixe d'un opérateur unaire existent toujours, à cause des relations de la proposition 1.1.2. En particulier, chaque treillis fini est un μ-treillis.

Proposition 1.2.5 Tout treillis distributif L est un μ-treillis.

Preuve. Nous allons dénoter par $\mathcal{P}_L \subseteq L_*$ le plus petit ensemble d'opérateurs satisfaisant les conditions 1-3 de la définition 1.2.1. Nous allons dire que $\psi : L^m \longrightarrow L$ est un polynôme s'il existe $\phi \in \mathcal{P}_L$, $\phi : L^n \longrightarrow L$ et une fonction $f : n \longrightarrow m$ tels que $\psi(\lambda) = \phi(\lambda \circ f)$. Si $\psi : L^{n+1} \longrightarrow L$ est un polynôme et $\lambda \in L^n$, comme L est distributif, on peut écrire:

$$\psi_{s,\lambda}(z) \quad = \quad (z \wedge \psi_1(\lambda)) \vee \psi_2(\lambda) \ ,$$

ou bien:

$$\psi_{s,\lambda}(z) \quad = \quad (z \vee \psi_1(\lambda)) \wedge \psi_2(\lambda) \ ,$$

où les $\psi_i : L^n \longrightarrow L$ sont des polynômes. En observant que:

$$\begin{aligned} \mu_z.(z \wedge a) \vee b \quad &= \quad b \ , \\ \nu_z.(z \wedge a) \vee b \quad &= \quad a \vee b \ , \end{aligned}$$

et que des propriétés duales sont vraies, on conclut que $\mu_s.\psi$, $\nu_s.\psi$ existent et qu'ils sont des polynômes.

On arrive à la conclusion en observant que tout opérateur $\phi \in \mathcal{A}_L$ est un polynôme. □

Afin de pouvoir définir la notion de morphisme de μ-treillis, nous allons introduire des termes pour désigner les éléments des ensembles $\mathcal{A}_L$, où L est un μ-treillis.

Définition 1.2.6 L'ensemble $\mathcal{A}$ des termes algébriques et la fonction d'arité $a : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{N}$ sont définis par induction de la façon suivante:

1. $\bigwedge^n \in \mathcal{A}$ et $a(\bigwedge^n) = n$;
2. $\bigvee^n \in \mathcal{A}$ et $a(\bigvee^n) = n$;
3. si $\phi_i \in \mathcal{A}$, $a(\phi_i) = k_i$, pour $i = 1, \ldots, n$, et si $\phi \in \mathcal{A}$, $a(\phi) = n$, alors $\phi \circ (\phi_1, \ldots, \phi_n) \in \mathcal{A}$ et $a(\phi \circ (\phi_1, \ldots, \phi_n)) = \sum_{i=1,\ldots,n} k_i$;
4. si $\phi \in \mathcal{A}$, $a(\phi) = n+1$, alors $\mu_s.\phi \in \mathcal{A}$ et $a(\mu_s.\phi) = n$, $s = 1, \ldots, n+1$;
5. si $\phi \in \mathcal{A}$, $a(\phi) = n+1$, alors $\nu_s.\phi \in \mathcal{A}$ et $a(\nu_s.\phi) = n$, $s = 1, \ldots, n+1$.

L'ensemble $\mathcal{P}$ des polynômes est le plus petit sous-ensemble de $\mathcal{A}$ fermé sous les règles 1-3 précédentes.

Définition 1.2.7 Soit L un μ-treillis. Définissons par induction l'interprétation de tout terme $\phi \in \mathcal{A}$ dans l'ensemble $\mathcal{A}_L$:

1. $|\bigwedge^n| = \bigwedge^n \in \mathcal{A}_L$;
2. $|\bigvee^n| = \bigvee^n \in \mathcal{A}_L$;
3. supposons que $|\phi_i|, |\phi| \in \mathcal{A}_L$, alors $|\phi| \circ (|\phi_1|, \ldots, |\phi_n|) \in \mathcal{A}_L$, soit donc $|\phi \circ (\phi_1, \ldots, \phi_n)| = |\phi| \circ (|\phi_1|, \ldots, |\phi_n|)$;
4. supposons que $|\phi| \in \mathcal{A}_L$, alors $\mu_s.|\phi|$ existe et $\mu_s.|\phi| \in \mathcal{A}_L$. Soit $|\mu_s.\phi| = \mu_s.|\phi|$;
5. supposons que $|\phi| \in \mathcal{A}_L$, alors $\nu_s.|\phi|$ existe et $\nu_s.|\phi| \in \mathcal{A}_L$. Soit $|\nu_s.\phi| = \nu_s.|\phi|$.

Définition 1.2.8 Une fonction préservant l'ordre $f : L \longrightarrow T$ est un *morphisme de μ-treillis* si pour tout $\phi \in \mathcal{A}$, avec $a(\phi) = n$, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} L^n \arrow[r, "|\phi|"] \arrow[d, "f^n"'] & L \arrow[d, "f"] \\ T^n \arrow[r, "|\phi|"] & T \end{tikzcd} \quad .$$

Dénotons par $\mu\mathcal{T}$ la catégorie dont les objets sont les μ-treillis et dont une flèche entre deux objets est un morphisme de μ-treillis. Dans ce qui suit, on va noter l'interprétation d'un terme $\phi \in \mathcal{A}$, $a(\phi) = n$, dans l'ensemble $\mathcal{A}_L$ par $\phi : L^n \longrightarrow L$.

Définition 1.2.9 Soient P un ensemble partiellement ordonné et L un μ-treillis. Nous allons dire que *L est libre sur P* s'il vient avec une fonction préservant l'ordre $\eta : P \longrightarrow L$ avec la propriété universelle suivante: *soient T un μ-treillis et $f : P \longrightarrow T$ une autre fonction préservant l'ordre; il existe alors un unique morphisme de μ-treillis $\tilde{f} : L \longrightarrow T$ tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "f"'] & L \arrow[dl, dotted, "\tilde{f}"] \\ T & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Remarque 1.2.10 On pourrait avoir l'impression que la définition de notre catégorie n'est pas suffisante à nos fins, c'est-à-dire qu'un objet dans la catégorie des μ-treillis « ne possède pas assez de points fixes ». Par exemple, on aimerait donner la définition 1.2.11 suivante. Dans cette définition et dans ce qui suit, nous utilisons la notation n aussi pour désigner l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, dont les éléments sont des nombres. On peut alors identifier le produit cartésien P^m avec l'ensemble des fonctions $\rho : m \longrightarrow P$. Si $f : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, m\}$, la fonction $P^f : P^m \longrightarrow P^n$ est définie par

$$P^f(\rho) \;=\; \rho \circ f \; .$$

Définition 1.2.11 Soit P un ensemble ordonné. Un sous-ensemble $S \subseteq P_*$ est *fermé* s'il satisfait les conditions 1 à 5 de la définition 1.2.1 et de plus la condition:

6. si $f : n \longrightarrow m$ est une fonction et si $\phi : P^n \longrightarrow P$ est dans S, alors $\phi \circ P^f : P^m \longrightarrow P$ est dans S.

Appelons $\mathcal{A}'_P$ le plus petit ensemble fermé. Disons qu'un treillis L est un objet de point fixe si tout opérateur dans $\mathcal{A}'_L$'a un plus petit (resp. grand) point préfixe (resp. postfixe).

Il est clair que chaque objet de point fixe est un μ-treillis. La proposition suivante montre l'inverse.

Proposition 1.2.12 Soit L une μ-treillis. Alors:

$$\mathcal{A}'_L \;=\; \{\, \phi \circ L^f \mid \phi \in \mathcal{A}_L,\; f : n \longrightarrow m \,\}\ .$$

De plus L est un objet de point fixe.

Preuve. Dénotons par $\mathcal{B}$ l'ensemble de droite et observons que nécessairement $\mathcal{A}'_L \supseteq \mathcal{B}$. Il suffit de montrer que l'ensemble $\mathcal{B}$ est fermé sous les opérations voulues.

Soit $\phi \circ L^f \in \mathcal{B}$ où $f : n \longrightarrow m$ et soit $g : m \longrightarrow k$, évidemment $(\phi \circ L^f) \circ L^g = \phi \circ (L^f \circ L^g) = \phi \circ (L^{g \circ f}) \in \mathcal{B}$.

Or, il est facile à voir que les opérateurs dans $\mathcal{B}$ sont aussi fermés sous la substitution.

Montrons donc que les opérateurs dans $\mathcal{B}$ sont fermés sous le plus petit point préfixe. Soit $\phi \circ L^f : L^{m+1} \longrightarrow L$ un opérateur dans $\mathcal{B}$. Supposons que $f : m' \longrightarrow m+1$, et donc $\phi : L^{m'} \longrightarrow L$ est un opérateur dans $\mathcal{A}_L$. Choisissons $s \in \{1, \ldots, m+1\}$ de façon que l'on peut écrire $m' = n + k$ où $k = \mathrm{card}\, f^{-1}(s)$.

On peut aussi choisir $\tilde{f} : n \longrightarrow m$ de façon que le carré commutatif $\epsilon^s \circ \tilde{f} = f \circ \epsilon^{f^{-1}(s)}$ est un produit fibré. L'inspection du diagramme

$$\begin{tikzcd}
n \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\epsilon^{f^{-1}(s)}"'] \arrow[dr, phantom, very near start, "\lrcorner"] & m \arrow[d, "\epsilon^s"'] \arrow[ddr, "\lambda"] & \\
n+k \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "(\lambda \circ \tilde{f})^{f^{-1}(s),x}"'] & m+1 \arrow[dr, "\lambda^{s,x}"] & \\
 & & L
\end{tikzcd}$$

montre que:

$$\lambda^{s,x} \circ f \quad = \quad (\lambda \circ \tilde{f})^{f^{-1}(s),x} \ ,$$

et donc:

$$\begin{aligned}
\mu_s.(\phi \circ L^f)(\lambda) &= \mu_z.(\,\phi \circ L^f(\lambda^{s,z})\,) \\
&= \mu_z.(\,\phi(\lambda^{s,z} \circ f)\,) \\
&= \mu_z.(\,\phi(\,(\lambda \circ \tilde{f})^{f^{-1}(s),z}\,)\,) \\
&= \mu_{f^{-1}(s)}.\phi(\lambda \circ \tilde{f}) \\
&= (\mu_{f^{-1}(s)}.\phi) \circ L^{\tilde{f}}(\lambda)\ .
\end{aligned}$$

La proposition 1.1.13 montre que $\mu_{f^{-1}(s)}.\phi$ existe et qu'il est un élément de $\mathcal{A}_L$. On peut donc conclure que $\mu_s.(\phi \circ L^f) = (\mu_{f^{-1}(s)}.\phi) \circ L^{\tilde{f}}$ appartient à l'ensemble $\mathcal{B}$.

Un raisonnement analogue sert à montrer que $\mathcal{B}$ est fermé sous le plus grand point postfixe. $\square$

La proposition suivante est l'outil principal pour montrer qu'un morphisme de treillis est aussi un morphisme de μ-treillis.

Proposition 1.2.13 Chaque morphisme entre deux μ-treillis est un morphisme de treillis. Par contre, soit $f : L \longrightarrow T$ un morphisme de treillis entre deux μ-treillis. Supposons que pour tout $\phi \in \mathcal{A}$ tel que $a(\phi) = n+1$ et $s \in \{1, \ldots, n+1\}$, la relation

$f \circ \phi = \phi \circ f^{n+1}$ entraîne que:

$$\begin{aligned} f(\ \mu.\phi_{s,\,\lambda}\ ) &= \mu.\phi_{s,\,f\circ\lambda}\ , \\ f(\ \nu.\phi_{s,\,\lambda}\ ) &= \nu.\phi_{s,\,f\circ\lambda}\ , \end{aligned}$$

quelque soit $\lambda \in L^n$. Alors f est un morphisme de μ-treillis.

Preuve. La première implication est évidente.

Soient $\phi \in \mathcal{A}$, $a(\phi) = n+1$ et $s \in \{1, \ldots, n+1\}$, montrons que la première équation est satisfaite pour tout $\lambda \in L^n$ ssi $f \circ \mu_s.\phi = \mu_s.\phi \circ f^n$. Cela est vrai ssi pour tout $\lambda \in L^n$ on a $f(\mu_s.\phi(\lambda)) = \mu_s.\phi(f^n(\lambda))$. Puisque $f^n(\lambda) = f \circ \lambda$ et $\mu_s.\phi(\lambda) = \mu.\phi_{s,\lambda}$, on arrive à établir l'équivalence. De même, la seconde équation est satisfaite pour tout $\lambda \in L^n$ ssi $f \circ \nu_s.\phi = \nu_s.\phi \circ f^n$.

Soit donc $f : L \longrightarrow T$ un morphisme de treillis entre deux μ-treillis qui satisfait aux hypothèses de la proposition. Par induction structurale, montrons que pour tout $\phi \in \mathcal{A}$ tel que $a(\phi) = n$ on a $f \circ \phi = \phi \circ f^n$.

La fonction f est un morphisme des treillis, et donc $f \circ \bigvee^n = \bigvee^n \circ f^n$ et $f \circ \bigwedge^n = \bigwedge^n \circ f^n$, pour tout $n \geq 0$.

Considérons le cas de la substitution: soient $\phi \in \mathcal{A}$, $a(\phi) = n$ et $\phi_i \in \mathcal{A}$, $a(\phi_i) = k_i$, pour $i = 1, \ldots, n$. Supposons la propriété vraie pour ϕ et pour les ϕ_i. On a que $f \circ \phi \circ (\phi_1, \ldots, \phi_n) = \phi \circ f^n \circ (\phi_1, \ldots, \phi_n) = \phi \circ (f \circ \phi_1, \ldots, f \circ \phi_n) = \phi \circ (\phi_1 \circ f^{k_1}, \ldots, \phi_n \circ f^{k_n}) = \phi \circ (\phi_1, \ldots, \phi_n) \circ f^k$, où $k = \sum_{i=1,\ldots,n} k_i$.

Enfin, soit $\phi \in \mathcal{A}$ tel que $a(\phi) = n+1$, et soit $s \in \{1, \ldots, n+1\}$. Supposons la propriété vraie pour ϕ, i.e. $f \circ \phi = \phi \circ f^n$. Alors, pour tout $\lambda \in L^n$, on a que $f(\ \mu.\phi_{s,\,\lambda}\ ) = \mu.\phi_{s,\,f\circ\lambda}$, c'est-à-dire $f \circ \mu_s.\phi = (\mu_s.\phi) \circ f^n$. De même, $f \circ \nu_s.\phi = (\nu_s.\phi) \circ f^n$. $\square$

Remarque 1.2.14 Soit $f : P_1 \longrightarrow P_2$ un opérateur tel que $f \circ \phi_1 = \phi_2 \circ f$, où $\phi_i : P_i \longrightarrow P_i$, $i = 1, 2$, sont deux opérateurs pour lequels $\mu.\phi_i$ et $\nu.\phi_i$ existent. Alors on a les inégalités suivantes:

$$
\begin{aligned}
f(\mu.\phi_1) &\geq \mu.\phi_2 \ , \\
f(\nu.\phi_1) &\leq \nu.\phi_2 \ .
\end{aligned}
$$

Ces inégalités découlent du fait que si $p \leq \phi_1(p)$, alors $f(p) \leq f(\phi_1(p)) = \phi_2(f(p))$, en particulier $f(\nu.\phi_1) \leq \phi_2(f(\nu.\phi_1))$. Donc $f(\nu.\phi_1)$ est un point postfixe de ϕ_2, donc plus petit que son plus grand point postfixe. On raisonne de la même façon pour montrer que $f(\mu.\phi_1) \geq \mu.\phi_2$. Remarquons que ces inégalités sont vraies seulement si l'on suppose que $f \circ \phi_1 = \phi_2 \circ f$.

Proposition 1.2.15 Soit L un treillis fini et soit $f : L \longrightarrow M$ un morphisme de treillis, où M est un μ-treillis. Alors f est un morphisme de μ-treillis.

Preuve. Soit $\phi \in \mathcal{A}$ tel que $a(\phi) = n + 1$ et supposons que $f \circ \phi = \phi \circ f^{n+1}$. Si $s \in \{1, \ldots, n+1\}$ et $\lambda \in L^n$, posons $\psi = \phi_{s,\lambda}$ et $\psi' = \phi_{s,f\circ\lambda}$. On a donc $\psi' \circ f = f \circ \psi$. Puisque L est fini on a que $\mu.\psi = \psi^k(\bot)$, où $k \geq 0$. On déduit:

$$
\begin{aligned}
f(\mu.\psi) &= f(\psi^k(\bot)) \\
&= \psi'^k(\bot) \\
&\leq \mu.\psi' \ .
\end{aligned}
$$

On a vu (voir la remarque 1.2.14) que $f(\mu.\psi) \geq \mu.\psi'$ et donc $f(\mu.\psi) = \mu.\psi'$. On raisonne d'une façon semblable pour montrer que $f(\nu.\psi) = \nu.\psi'$. $\square$

Définition 1.2.16 Un μ-treillis L est dit *fondé* si, pour tout $\phi \in \mathcal{A}$ tel que $a(\phi) = n+1$, pour tout $s \in \{1, \ldots, n+1\}$ et pour tout $\lambda \in L^n$, $\phi^\alpha_{s,\lambda}(\bot)$ et $\phi^\alpha_{s,\lambda}(\top)$ existent (voir définition 1.1.14). Dans ce cas, les égalités suivantes sont vraies:

$$
\begin{aligned}
\mu.\phi_{s,\,\lambda} &= \textstyle\bigvee_{\alpha \in Ord} \phi^\alpha_{s,\,\lambda}(\bot) \ , \\
\nu.\phi_{s,\,\lambda} &= \textstyle\bigwedge_{\alpha \in Ord} \phi^\alpha_{s,\,\lambda}(\top) \ .
\end{aligned}
$$

En particulier, tout treillis complet est un μ-treillis fondé.

Définition 1.2.17 Soient L, M deux treillis et $f : L \longrightarrow M$ un morphisme de treillis. On dit que f est *continu* ssi pour tout sous-ensemble filtrant $I \subseteq L$, si $\bigvee I$ existe, alors on a $f(\bigvee I) = \bigvee f(I)$. On dit que f est *bicontinu* ssi il possède aussi la propriété duale.

Proposition 1.2.18 Soient L, M deux μ-treillis fondés et soit $f : L \longrightarrow M$ un morphisme bicontinu de treillis. Alors f est un morphisme de μ-treillis.

Preuve. Soit $\phi \in \mathcal{A}$ tel que $a(\phi) = n+1$ et supposons que $\phi \circ f^{n+1} = f \circ \phi$. Soient $s \in \{1, \ldots, n+1\}$, $\lambda \in L^n$ et posons $\psi = \phi_{s,\,\lambda}$, $\psi' = \phi_{s,\,f\circ\lambda}$, on a donc $\psi' \circ f = f \circ \psi$. Montrons par induction que $f(\ \psi^{\alpha}(\bot)\ ) = \psi'^{\alpha}(\bot)$, pour tout $\alpha \in Ord$. En effet, $f(\psi^0(\bot)) = f(\bot) = \bot = \psi'^0(\bot)$. Supposons que $f(\psi^{\alpha}(\bot)) = \psi'^{\alpha}(\bot)$. Alors $f(\psi^{\alpha+1}(\bot)) = f(\psi(\psi^{\alpha}(\bot)) = \psi'(f(\psi^{\alpha}(\bot))) = \psi'(\psi'^{\alpha}(\bot)) = \psi'^{\alpha+1}(\bot)$. Enfin soit β un ordinal limite et supposons que pour tout $\alpha < \beta$ il est vrai que $f(\psi^{\alpha}(\bot)) = \psi'^{\alpha}(\bot)$. On a que $f(\bigvee_{\alpha<\beta} \psi^{\alpha}(\bot)) = \bigvee_{\alpha<\beta} f(\psi^{\alpha}(\bot)) = \bigvee_{\alpha<\beta} \psi'^{\alpha}(\bot) = \psi'^{\beta}(\bot)$, par continuité de f.

Enfin soit $\chi \geq \max(\operatorname{card} L, \operatorname{card} T)$. On a alors:

$$\begin{aligned} f(\mu.\psi) &= f(\psi^{\chi}(\bot)) \\ &= \psi'^{\chi}(\bot) \\ &= \mu.\psi' \,. \end{aligned}$$

Par dualité on obtient $f(\nu.\psi) = \nu.\psi'$. □

Corollaire 1.2.19 Soit L un μ-treillis fondé. Il existe un plongement $i : L \rightarrowtail C$ dans un treillis complet. Ce plongement est aussi un morphisme de μ-treillis.

Preuve. Pour tout treillis L il existe un plongement bicontinu dans un treillis complet, il s'agit de la complétion de Dedekind-MacNeille (McKenzie, McNulty et Taylor, 1987, §2.2). Si L est un μ-treillis fondé, alors ce plongement est aussi un morphisme de μ-treillis. □

Corollaire 1.2.20 Tout treillis fini est un μ-treillis, et tout morphisme entre treillis finis est un morphisme de μ-treillis.

Preuve. On a déjà vu cela dans la proposition 1.2.15. On peut aussi raisonner comme suit: tout treillis fini est un treillis complet et donc un μ-treillis fondé, et tout morphisme de treillis dont le domaine est un treillis fini est bicontinu. □

CHAPITRE II

LE μ-TREILLIS $\mathcal{J}_P$

Le but de ce chapitre est de décrire explicitement un μ-treillis $\mathcal{J}_P$, où P est un ensemble partiellement ordonné arbitraire.

Nous allons d'abord définir la notion de jeu partiel pointé et les opérations associées sur l'espace des jeux partiels pointés.

Nous développons la théorie de la communication par rapport aux jeux partiels pointés. Cette théorie est une sorte d'introduction à la structure d'ordre de l'espace des jeux partiels, on peut dire qu'elle correspond aux théorèmes d'élimination des coupures et des identités en logique; les idées et les outils nécessaires sont déjà présents dans les articles (Blass, 1972; Blass, 1992; Joyal, 1997). En développant cette théorie pour les jeux partiels, on veut obtenir une meilleure clarté d'exposition et, à la fois, on veut montrer que la structure du μ-treillis $\mathcal{J}_P$ pourrait être enrichie aisément par des opérateurs de la forme:

$$\begin{aligned} G \odot H &= \langle G^{op}, H \rangle \,, \\ G \otimes H &= (G^{op} \odot H^{op})^{op} \,, \end{aligned}$$

afin de pouvoir interpréter les opérations multiplicatives de la logique linéaire.

Nous allons considérer une classe $\mathcal{X}$ de jeux partiels, que l'on suppose à la fois fermée (cf. 2.1.12) et juste (cf. 2.2.1), et un ensemble ordonné P arbitraire. Avec ces ingrédients, nous définissons une classe $\mathcal{X}(P)$ de jeux à utilité dans P et un préordre sur cette classe. Nous démontrons que le quotient antisymétrique $\mathcal{X}_P$ de cette classe possède une structure de μ-treillis, en particulier que $\mathcal{X}_P$ possède les points fixes que l'on veut (cf. 2.4.13). Le résultat est donc valide pour la plus petite classe fermée, que l'on appelle $\mathcal{J}$, et on obtient de cette façon la construction du μ-treillis $\mathcal{J}_P$. Encore une fois, en montrant que ce résultat est valable pour une classe plus générale $\mathcal{X}$, notre intention est de suggérer que les techniques utilisées ici peuvent être adaptées à des contextes algébriques plus riches.

2.1 Jeux partiels et opérations sur les jeux partiels

Définition 2.1.1 (Cf. A.1.1). Un jeu partiel pointé est un quadruplet $G = \langle G, g_0, \epsilon, W_\sigma \rangle$ où:

- $G = \langle G_0, G_1 \rangle$ est un graphe de positions et de mouvements. Le sommet $g_0 \in G_0$ est la position de départ.
- $\epsilon : G_0 \longrightarrow \{\pi, \sigma, 0\}$ est une règle qui associe à chaque position le joueur, σ ou π, qui doit choisir le prochain mouvement. Cette règle satisfait:

  $$\epsilon x = 0 \quad \Rightarrow \quad \{\, x' \mid x \;\rightarrow\; x' \,\} = \emptyset \, .$$

  Si $\epsilon x = 0$, nous appelons x une position finale ou terminale neutre.
- $W_\sigma \subseteq \mathrm{Graphes}(\hat{\omega}, G)$ est l'ensemble des parties infinies gagnantes pour le joueur σ. On demande que:

  $$\gamma \in W_\sigma \quad \Leftrightarrow \quad \partial\gamma \in W_\sigma \; ,$$

  où $\partial(\,\gamma(0) \rightarrow \gamma(1) \rightarrow \dots\,) \;=\; \gamma(1) \rightarrow \gamma(2) \rightarrow \dots\;.$

Dans cette définition $\hat{\omega}$ est le graphe $0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow \dots$ et $\mathrm{Graphes}(\hat{\omega}, G)$ est l'ensemble des morphismes de graphes de $\hat{\omega}$ vers G.

Notation

On va noter $W_\pi \subseteq \mathrm{Graphes}(\hat{\omega}, G)$ le complémentaire de W_σ: W_π est l'ensemble des parties infinies gagnantes pour le joueur π. Dans la suite nous allons utiliser aussi le mot « jeu » pour le mot « jeu partiel pointé ». Avec la notation $G[X]$ on va noter un couple (G, X) où G est un jeu partiel et X est un sous-ensemble de positions finales neutres, c'est-à-dire que $X \subseteq \epsilon^{-1}(0)$. Nous allons aussi utiliser la notation $G[x]$ pour le couple $(G, \{x\})$ et la notation $G[x, y]$ pour le couple $(G, \{x, y\})$; dans ce dernier cas, on sous-entend que $x \neq y$. Plus généralement, si G est un jeu, on va noter X_G l'ensemble des positions finales neutres $\epsilon^{-1}(0)$. Nous allons dire qu'un jeu G est complet si $X_G = \emptyset$. Observons que nos conventions sont ici un peu différentes de celles utilisées dans l'appendice A.

Définition 2.1.2 Un morphisme f entre deux jeux G et H, noté $f : G \longrightarrow H$, est un morphisme des graphes sous-jacents $f : G \longrightarrow H$ tel que $f(g_0) = h_0$, $\epsilon_G = \epsilon_H \circ f$ et tel que $\gamma \in W_\sigma(G)$ si et seulement si $f \circ \gamma \in W_\sigma(H)$. Un morphisme f est un isomorphisme s'il existe un morphisme de graphes $g : H \longrightarrow G$ tel que $g \circ f = Id_G$ et $f \circ g = Id_H$; dans ce cas, g est aussi un morphisme de jeux. Écrivons $G \equiv H$ pour dire qu'il existe un isomorphisme entre ces jeux.

Définition 2.1.3 Un morphisme $f : G \longrightarrow H$ entre deux jeux est *étale*, ou encore il est un *revêtement*, s'il satisfait la condition suivante: pour tout $g \in G_0$ et $\tau \in H_1$ tels que $\tau : f(g) \to h'$ il existe un unique $\kappa : g \to g'$ tel que $f(\kappa) = \tau$. Écrivons $G \simeq H$ pour dire qu'il existe un jeu K et deux morphismes étales $p_G : K \longrightarrow G$ et $p_H : K \longrightarrow H$; cela est en effet une relation d'équivalence.

Définition 2.1.4 Le jeu x est le jeu avec une seule position x telle que $\epsilon x = 0$.

Définition 2.1.5 Soit I un ensemble fini. Le jeu $\bigwedge_I$ est le jeu où le graphe sous-jacent $\langle G_0, G_1 \rangle$ est de la forme $G_0 = \{\wedge_0\} \cup I$, où $\wedge_0 \notin I$, et $\wedge_0 \to i$ pour tout $i \in I$. On a que $\epsilon \wedge_0 = \pi$ et $\epsilon i = 0$ pour $i \in I$. La position de départ est $\wedge_0$ et nous observons que $X_{\bigwedge_I} = I$. Nous allons utiliser la notation $\top$ pour le jeu $\bigwedge_\emptyset$.

Le jeu $\bigvee_I$ est le jeu où le graphe sous-jacent $\langle G_0, G_1 \rangle$ est de la forme $G_0 = \{\vee_0\} \cup I$, où

$\vee_0 \notin I$, et $\vee_0 \to i$ pour tout $i \in I$. On a que $\epsilon\vee_0 = \sigma$ et $\epsilon i = 0$ pour $i \in I$. La position de départ est $\vee_0$ et $X_{\bigvee_I} = I$. Nous allons utiliser la notation $\perp$ pour le jeu $\bigvee_\emptyset$.

Définition 2.1.6 Soient $G[x], H$ deux jeux. Le jeu $G[H] = \langle G[H], v, \epsilon', W_\sigma \rangle$, noté aussi $G[x = H]$, est défini de la façon suivante:

- $G[H]_0 = G_0 \setminus \{x\} + H_0$,
- $$\begin{aligned} G[H]_1 \quad = \quad & \{\ g \to g' \mid g, g' \in G_0 \backslash \{x\},\ g \to g' \in G_1\ \} \\ & \cup\ \{\ h \to h' \mid h, h' \in H_0,\ h \to h' \in H_1\ \} \\ & \cup\ \{\ g \to h_0 \mid g \to x \in G_1\ \}\ , \end{aligned}$$
- $v = g_0$ ou $v = h_0$ dans le cas que $x = g_0$,
- $\epsilon'(g) = \epsilon_G(g)$ si $g \in G_0 \setminus \{x\}$ et $\epsilon'(h) = \epsilon_H(h)$ si $h \in H_0$,
- $\gamma \in W_\sigma$ si et seulement si $\gamma \in W_\sigma(G)$ ou $\gamma \in_{ev} W_\sigma(H)$.

Dans cette définition (cf. A.1.2) $\gamma \in_{ev} W$ si et seulement s'il existe $n \geq 0$ tel que $\partial^n \gamma \in W$. Observons que $X_{G[H]} = (X_G \setminus \{x\}) + X_H$.

Définition 2.1.7 Soit $G[x]$ un jeu. Le jeu $\mu_x.G[x] = \langle H, h_0, \epsilon', W_\sigma \rangle$ est défini de la façon suivante:

- $H_0 = G_0$,
- $H_1 = G_1 \cup \{x \to g_0\}$,
- $h_0 = x$,
- $\epsilon' x = \sigma$ et $\epsilon' g = \epsilon g$ si $g \in G_0 \setminus \{x\}$,
- $\gamma \in W_\sigma(\mu_x.G[x])$ si et seulement si $\gamma \in_{ev} W_\sigma(G[x])$.

Observons que $X_{\mu_x.G[x]} = (X_G \setminus \{x\})$. Soit:

$$\mathrm{In}(\gamma) \quad = \quad \{\ g \in G_0 \mid \mathrm{card}\, \gamma^{-1}(g) = \infty\ \}\ .$$

Si $x \in \mathrm{In}(\gamma)$ alors $\gamma \notin W_\sigma(\mu_x.G[x])$.

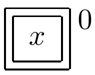
Définition 2.1.8 Soit $G[x]$ un jeu. Le jeu $\nu_x.G[x] = \langle H, h_0, \epsilon', W_\sigma \rangle$ est défini de la façon suivante:

- $H_0 = G_0$,
- $H_1 = G_1 \cup \{x \to g_0\}$,
- $h_0 = x$,
- $\epsilon' x = \pi$ et $\epsilon' g = \epsilon g$ si $g \in G_0 \setminus \{x\}$,
- $\gamma \in W_\sigma(\nu_x.G[x])$ si et seulement si $\gamma \in_{ev} W_\sigma(G[x])$ ou $x \in \mathrm{In}(\gamma)$.

Observons que $X_{\nu_x.G[x]} = (X_G \setminus \{x\})$ et que $\gamma \in W_\sigma(\nu_x.G[x])$ si et seulement si $\neg(\gamma \in_{ev} W_\pi(G))$.

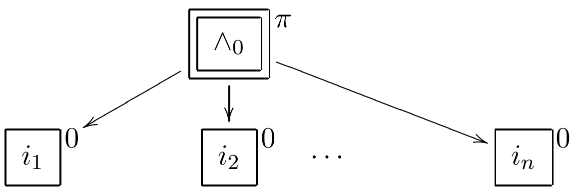
Afin d'aider le lecteur, nous allons introduire ici des dessins pour décrire ces opérations.

Le jeu x est le jeu avec une seule position neutre x:



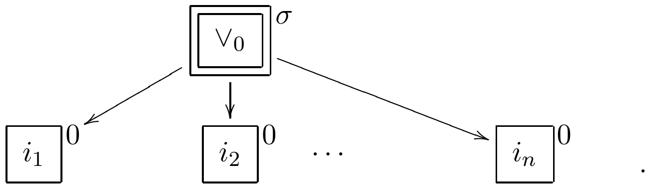
.

Soit $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ un ensemble fini. Le jeu $\bigwedge_I$ est le jeu suivant:

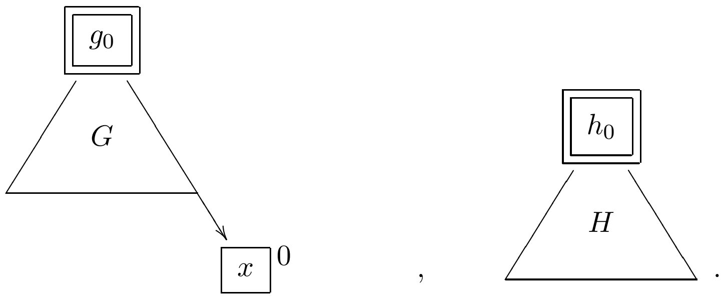


.

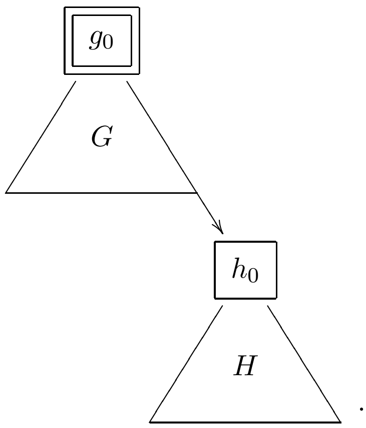
Le jeu $\bigvee_I$ est le jeu suivant:



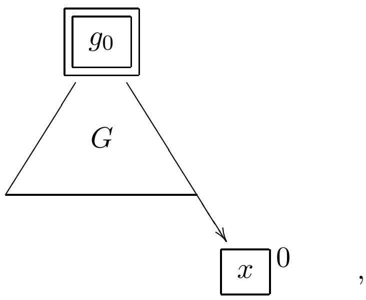
Soient G et H des jeux, de plus soit $x \in X_G$:



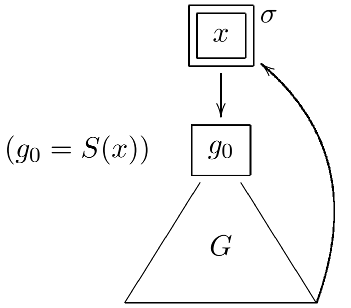
Le jeu $G[x = H]$ est:



Encore, soient G un jeu et $x \in X_G$:

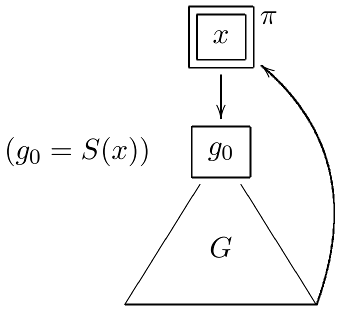


le jeu $\mu_x.G[x]$ est:



,

et le jeu $\nu_x.G[x]$ est:



.

Proposition 2.1.9 On a les isomorphismes suivants:

$$\begin{array}{lcl}
G[\ y = x\ ] & \equiv & G[\ y\ ]\ , \\
x[\ x = H\ ] & \equiv & H\ , \\
G[\ x = (\ H[y = K]\ )\ ] & \equiv & (\ G[\ x = H\ ]\ )[\ y = K\ ]\ , \\
(\ G[\ x = H, y\ ]\ )[\ y = K\ ] & \equiv & (\ G[\ x, y = K\ ]\ )[\ x = H\ ]\ , \\
(\ Q_y.G[\ x, y\ ]\ )[\ x = H\ ] & \equiv & Q_y.(\ G[\ x = H, y\ ]\ )\ ,
\end{array}$$

où $Q \in \{\mu, \nu\}$.

Pour montrer cette proposition nous allons étudier la propriété universelle de la substitution $G[x = H]$.

Définition 2.1.10 Soient G un jeu et $g' \in G_0$ une position. Dénotons par (G, g') le jeu qui diffère de G seulement à cause du fait que la position de départ est g'.

Proposition 2.1.11 Soient $G[x]$, H deux jeux et soit G' obtenu de $G[x]$ en posant $\epsilon x = \epsilon h_0$. Les injections $i_{G'} : G' \longrightarrow G[H]$ et $i_H : H \longrightarrow (G[H], h_0)$ sont des morphismes de jeux. Par contre, étant donné deux morphismes de jeux $g : G' \longrightarrow K$, $h : H \longrightarrow (K, g(x))$, il existe un unique morphisme de jeux $m : G[H] \longrightarrow K$ tel que $m \circ i_{G'} = g$ et $m \circ i_H = h$.

Preuve. La propriété voulue est vraie dans la catégorie des graphes pointés avec une coloration ϵ. Il suffit donc montrer que les injections $i_{G'}, i_H$ et l'unique morphisme de graphes pointés $m : G[H] \longrightarrow K$ tel que $m \circ i_{G'} = g$ et $m \circ i_H = h$ satisfont la condition sur les chemins infinis.

Si $W \subseteq \text{Graphes}(\hat{\omega}, G)$ et $f : G \longrightarrow H$ est un morphisme de graphes, soit $f(W) \subseteq \text{Graphes}(\hat{\omega}, H)$ l'ensemble des chemins infinis $f \circ \gamma$ avec $\gamma \in W$. Si $W \subseteq \text{Graphes}(\hat{\omega}, G)$, soit $\langle W \rangle$ l'ensemble des chemins γ tels que $\partial^n \gamma \in W$ pour quelque $n \geq 0$.

On voit que la définition de $W_\sigma(G[H])$ est:

$$W_\sigma(G[H]) \;=\; i_{G'}(W_\sigma(G')) \cup \langle\, i_H(W_\sigma(H))\, \rangle \,.$$

Pour tout chemin infini γ dans $G[H]$ soit $\gamma = i_{G'} \circ \gamma'$, où γ' est un chemin dans G', soit $\partial^n \gamma = i_H \circ \gamma'$, où γ' est un chemin dans H; de plus aucun chemin a les deux propriétés à la fois.

On déduit que $i_{G'} \circ \gamma \in W_\sigma(G[H]) = i_{G'}(W_\sigma(G')) \cup \langle\, i_H(W_\sigma(H))\, \rangle$ si et seulement si $i_{G'} \circ \gamma \in i_{G'}(W_\sigma(G'))$, cela si et seulement s'il existe $\gamma' \in W_\sigma(G')$ tel que $i_{G'} \circ \gamma' = i_{G'} \circ \gamma$ et, enfin, si et seulement si $\gamma \in W_\sigma(G')$, car $i_{G'}$ est un monomorphisme.

De même, $i_H \circ \gamma \in W_\sigma(G[H]) = i_{G'}(W_\sigma(G')) \cup \langle i_H(W_\sigma(H)) \rangle$ si et seulement si $i_H \circ \gamma \in \langle\, i_H(W_\sigma(H))\, \rangle$, si et seulement s'il existe $n \geq 0$ tel que $\partial^n(i_H \circ \gamma) = i_H \circ \partial^n \gamma \in i_H(W_\sigma(H))$, si et seulement s'il existe $\gamma' \in W_\sigma(H)$ tel que $i_H \circ \gamma' = i_H \circ \partial^n \gamma$, si et seulement si $\partial^n \gamma \in W_\sigma(H)$, si et seulement si $\gamma \in W_\sigma(H)$.

Soient maintenant $g : G' \longrightarrow K$ et $h : H \longrightarrow (K, g(x))$ des morphismes de jeux. Montrons que pour tout chemin infini γ dans $G[H]$ on a que $\gamma \in W_\sigma(G[H])$ si et seulement si $m \circ \gamma \in W_\sigma(K)$. Si $\gamma = i_{G'} \circ \gamma'$, où γ' est un chemin dans G', on obtient: $m \circ \gamma \in W_\sigma(K)$ si et seulement si $m \circ i_{G'} \circ \gamma' \in W_\sigma(K)$, si et seulement si $g \circ \gamma' \in W_\sigma(K)$, si et seulement si $\gamma' \in W_\sigma(G')$, si et seulement si $i_{G'} \circ \gamma' = \gamma \in W_\sigma(G)$. Si $\partial^n \gamma = i_H \circ \gamma'$, où γ' est un chemin dans H, on obtient: $m \circ \gamma \in W_\sigma(K)$ si et seulement si $\partial^n(m \circ \gamma) \in W_\sigma(K)$, si et seulement si $m \circ \partial^n(\gamma) \in W_\sigma(K)$, si et seulement si $m \circ i_H \circ \gamma' \in W_\sigma(K)$, si et seulement si $h \circ \gamma' \in W_\sigma(K)$, si et seulement si $\gamma' \in W_\sigma(H)$, si et seulement si $i_H \circ \gamma' \in W_\sigma(G[H])$, si et seulement si $\partial^n(i_H \circ \gamma') = \gamma \in W_\sigma(G)$. □

Preuve. (Proposition 2.1.9). Par exemple, prouvons que:

$$G[\ x = (\ H[y = K]\ )\ ] \quad \equiv \quad (\ G[\ x = H\ ]\ )[\ y = K\ ]\ .$$

Soit Jeux(G, L) l'ensemble des morphismes de jeux entre G et L. À l'aide de la proposition précédente on remarque qu'il existe des isomorphismes naturels:

$$\text{Jeux}(\ G[H][K]\ ,\ L\ ) \xrightarrow{\cong} F(\ L\ ) \xleftarrow{\cong} \text{Jeux}(\ G[H[K]]\ ,\ L\ )\ ,$$

où:

$$\begin{aligned} F(L) \quad = \quad \{\ (f, g, h) \mid \quad f : G' &\longrightarrow L, \\ g : H' &\longrightarrow (\ L, f(x)\ ), \\ h : K &\longrightarrow (\ L, g(y)\ )\ \}\ . \end{aligned}$$

Le résultat découle comme toujours à l'aide du lemme de Yoneda, cf. (MacLane, 1971), chapitre III.2. □

Définition 2.1.12 Une classe de jeux partiels $\mathcal{X}$ est fermée si elle satisfait:

1. $x \in \mathcal{X}$,
2. $\bigwedge_I$ et $\bigvee_I$ sont dans $\mathcal{X}$, pour tout ensemble fini I,
3. si $G[x] \in \mathcal{X}$ et $H \in \mathcal{X}$, alors $G[H] \in \mathcal{X}$,
4. $G[x] \in \mathcal{X}$ entraîne $\mu_x.G[x], \nu_x.G[x] \in \mathcal{X}$,
5. $G \in \mathcal{X}$ et $H \equiv G$ entraîne $H \in \mathcal{X}$.

Définition 2.1.13 Nous allons appeler $\mathcal{J}$ la plus petite classe fermée de jeux partiels.

2.2 Théorie de la communication

Définition 2.2.1 Un jeu partiel G est *juste* (« fair ») s'il satisfait la condition suivante: *soit γ un chemin infini de G. S'il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $\epsilon\gamma(n) = \pi$, alors $\gamma \in W_\sigma$. De même, s'il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $\epsilon\gamma(n) = \sigma$, alors $\gamma \in W_\pi$.* Disons qu'une classe $\mathcal{X}$ de jeux partiels est juste si tout jeu $G \in \mathcal{X}$ est juste.

Dans la suite, toute définition et tout énoncé concernent des jeux justes. Dans la prochaine définition nous allons enrichir l'ensemble $\{0, \sigma, \pi\}$ avec la structure de treillis suivante: $0 \leq \sigma \leq \pi$; de plus, soit $\neg : \{0, \sigma, \pi\} \longrightarrow \{0, \sigma, \pi\}$ la fonction définie par $\neg 0 = 0$, $\neg\sigma = \pi$, $\neg\pi = \sigma$.

Définition 2.2.2 Soient G, H deux jeux partiels. Le jeu $\langle G, H \rangle$ est défini par:

- $\langle G, H \rangle_0 = G_0 \times H_0$.
- $\langle G, H \rangle_1$ est défini par:

$$\begin{aligned}
(g, h) \to (g', h) \quad &\Leftrightarrow \quad g \to g' \quad \wedge \quad \neg\epsilon g \geq \epsilon h \; , \\
(g, h) \to (g, h') \quad &\Leftrightarrow \quad h \to h' \quad \wedge \quad \neg\epsilon g \leq \epsilon h \; .
\end{aligned}$$

- Le sommet de départ est (g_0, h_0).
- $\epsilon(g, h) = \neg\epsilon g \vee \epsilon h$.
- $\gamma \in W_\sigma$ si et seulement si $\gamma_G \in W_\pi(G)$ ou $\gamma_H \in W_\sigma(H)$.

Remarque 2.2.3 Le graphe sous-jacent à $\langle G, H \rangle$ est un sous-graphe de $G \otimes H$, où $(\,G \otimes H\,)_0 = G_0 \times H_0$ et $(\,G \otimes H\,)_1 = G_1 \times H_0 + G_0 \times H_1$. Si γ est un chemin dans $\langle G, H \rangle$, alors il est aussi un chemin dans $G \otimes H$ et ses projections γ_G, γ_H sont définies à l'aide du graphe $G \otimes H$ de la façon suivante. D'abord, si G est un graphe, soit $C(G)$ la catégorie libre sur G. On définit un foncteur

$$(\,\_\,)_G : C(G \otimes H) \longrightarrow C(G)$$

par propriété universelle à partir des relations sur les générateurs:

$$
\begin{aligned}
(\gamma, h)_G &= \gamma \, , \\
(g, \alpha)_G &= Id_g \, .
\end{aligned}
$$

Étant donné un chemin infini γ dans $G \otimes H$, le chemin γ_G est défini comme la limite des chemins finis $(\gamma_n)_G$, où γ_n est le préfixe de γ de longueur n; γ_G est alors un chemin fini ou infini. On définit γ_H de façon semblable.

Les propositions suivantes sont une explication du jeu $\langle G, H \rangle$.

Proposition 2.2.4 Supposons que $\epsilon(g,h) = \pi$ et $(g,h) \to (g,h')$, on a alors $\epsilon h = \pi$. Par contre, si $\epsilon h = \pi$, alors $\epsilon(g,h) = \pi$ et s'il existe une transition $h \to h'$ il existe aussi une transition $(g,h) \to (g,h')$.

Preuve. Des relations $\neg \epsilon g \vee \epsilon h = \pi$ et $\neg \epsilon g \leq \epsilon h$, il en découle $\epsilon h = \pi$. Par contre, si $\epsilon h = \pi$, évidemment $\epsilon(g,h) = \pi$ et $\neg \epsilon g \leq \epsilon h$. $\square$

Proposition 2.2.5 Supposons que $\epsilon(g,h) = \pi$ et $(g,h) \to (g',h)$, on a alors $\epsilon g = \sigma$. Par contre, si $\epsilon g = \sigma$, alors $\epsilon(g,h) = \pi$ et s'il existe une transition $g \to g'$ alors il existe aussi une transition $(g,h) \to (g',h)$.

Les propositions montrent que le joueur π dans le jeu $\langle G, H \rangle$ est formé de l'équipe $\{\sigma_G, \pi_H\}$, c'est-à-dire du joueur σ dans le jeu G et du joueur π dans le jeu H. Aussitôt qu'un mouvement est disponible sur un tableau l'équipe π a le devoir de jouer.

Proposition 2.2.6 Supposons que $\epsilon(g,h) = \sigma$ et $(g,h) \to (g,h')$, on a alors $\epsilon h = \sigma$ et $\epsilon g \in \{0, \pi\}$. Par contre, si $\epsilon h = \sigma$, alors $\epsilon g \in \{0, \pi\}$ et s'il existe une transition $h \to h'$, alors il existe aussi une transition $(g,h) \to (g,h')$.

Preuve. On a que $\neg \epsilon g \vee \epsilon h = \sigma$ et $\neg \epsilon g \leq \epsilon h$ si et seulement si $\epsilon h = \sigma$ et $\epsilon g \in \{0, \pi\}$. $\square$

Proposition 2.2.7 Supposons que $\epsilon(g,h)=\sigma$ et $(g,h)\to(g',h)$, on a alors $\epsilon g=\pi$ et $\epsilon h\in\{0,\sigma\}$. Par contre, si $\epsilon g=\pi$, alors $\epsilon h\in\{0,\sigma\}$ et s'il existe une transition $g\to g'$, alors il existe aussi une transition $(g,h)\to(g',h)$.

Les propositions montrent que le joueur σ dans $\langle G,H\rangle$ est formé d'une équipe $\{\pi_G,\sigma_H\}$. Afin que l'équipe σ puisse jouer il faut attendre que l'équipe π ait fait son jeu sur tous les deux tableaux. Enfin:

Proposition 2.2.8 $\epsilon(g,h)=0$ si et seulement si $\epsilon g=0$ et $\epsilon h=0$.

Une *stratégie gagnante* pour le joueur σ dans un jeu partiel est une façon de jouer telle que tout chemin infini γ, joué de cette façon, est tel que $\gamma\in W_\sigma(G)$, cf. A.2.4. Nous allons appeler une stratégie gagnante pour le joueur σ simplement une stratégie.

Proposition 2.2.9 Soit G un jeu partiel. Le joueur σ possède une stratégie, la stratégie copy-cat, dans le jeu $\langle G,G\rangle$. Toute position terminale neutre atteinte par cette stratégie est de la forme (x,x) pour une position finale $x\in X_G$.

Preuve. Dans une position de la forme (g,g) l'équipe π a le devoir de jouer et elle peut le faire seulement sur un tableau. Par exemple, si $\epsilon g=\pi$, alors l'équipe π doit jouer sur la droite et elle peut jouer seulement sur la droite. Si elle continue de jouer sur la droite à l'infini, un tel chemin est gagnant pour σ sur la droite et donc ce chemin est gagnant pour l'équipe σ. Si non, elle s'arrête à une position g' telle que $\epsilon g'\in\{\sigma,0\}$. L'équipe σ peut copier sur l'autre tableau tout mouvement ainsi joué jusqu'à parvenir dans la position (g',g') où l'on recommence. Supposons qu'avec cette stratégie on continue de jouer à l'infini et soit γ le chemin ainsi joué. On voit que la projection gauche de γ est égale à sa projection droite. Appelons γ_G cette projection, il est clair que $\gamma_G\in W_\pi(G)$ ou $\gamma_G\in W_\sigma(G)$. Enfin, si à l'aide de cette stratégie on termine à une position (g,g') telle que $\epsilon(g.g')\neq\pi$, on a que $g=g'$ et $\epsilon(g,g')=0$. $\square$

Définition 2.2.10 Soient G,H,K trois jeux. Le jeu $\langle G,H,K\rangle$ est défini par:

- $\langle G, H, K \rangle_0 = G_0 \times H_0 \times K_0$.
- $\langle G, H, K \rangle_1$ est défini par:

$$\begin{array}{lcll}
(g,h,k) \to (g',h,k) & \Leftrightarrow & g \to g' & \wedge \;\; \neg\epsilon g \geq \epsilon h \vee \epsilon k \; , \\
(g,h,k) \to (g,h',k) & \Leftrightarrow & h \to h' & \wedge \;\; \neg\epsilon g \leq (\epsilon h \wedge \neg\epsilon h) \geq \epsilon k \; , \\
(g,h,k) \to (g,h,k') & \Leftrightarrow & k \to k' & \wedge \;\; \neg\epsilon g \vee \neg\epsilon h \leq \epsilon k \; .
\end{array}$$

- Le sommet de départ est (g_0, h_0, k_0).
- $\epsilon(g, h, k) = \neg\epsilon g \vee (\epsilon h \wedge \neg\epsilon h) \vee \epsilon k$.
- $\gamma \in W_\sigma$ si et seulement si $\gamma_G \in W_\pi(G)$ ou $\gamma_K \in W_\sigma(K)$.

Proposition 2.2.11 Si $\epsilon(g, h, k) = \pi$, alors $\epsilon g = \sigma$ ou $\epsilon k = \pi$. Dans ce cas, s'il existe une transition à partir de (g, h, k), alors cette transition est sur K ou sur G. Si $(g, h, k) \to (g, h, k')$, alors $\epsilon k = \pi$ et si $(g, h, k) \to (g', h, k)$, alors $\epsilon g = \sigma$. Par contre, si $\epsilon k = \pi$, alors $\epsilon(g, h, k) = \pi$ et s'il existe une transition $k \to k'$ alors il existe aussi une transition $(g, h, k) \to (g, h, k')$. Si $\epsilon g = \sigma$, alors $\epsilon(g, h, k) = \pi$ et s'il existe une transition $g \to g'$, alors il existe aussi une transition $(g, h, k) \to (g', h, k)$.

Preuve. La première proposition est claire car $(\epsilon h \wedge \neg\epsilon h) \leq \sigma$. Supposons qu'il existe une transition $(g, h, k) \to (g, h', k)$; alors $\neg\epsilon g \vee \epsilon k \leq (\epsilon h \wedge \neg\epsilon h) = \sigma$, ce qui montre que $\epsilon(g, h, k) \neq \pi$. Considérons maintenant une transition $(g, h, k) \to (g, h, k')$. On a alors $\neg\epsilon g \vee \neg\epsilon h \leq \epsilon k$ ce qui entraîne $\epsilon k = \pi$, car $\epsilon(g, h, k) = \pi$.

Le contraire est évident: si $\epsilon k = \pi$, alors $\epsilon(g, h, k) = \pi$ et la condition $\neg\epsilon g \vee \neg\epsilon h \leq \epsilon k$ est satisfaite. $\square$

La proposition montre que le joueur π dans $\langle G, H, K \rangle$ est formé d'une équipe $\{\sigma_G, \pi_K\}$. Aussitôt qu'un mouvement est disponible sur un tableau, l'équipe π a le devoir de jouer.

Lemme 2.2.12 $\epsilon(g, h, k) = 0$ si et seulement si $\epsilon g = 0$, $\epsilon h = 0$ et $\epsilon k = 0$.

Preuve. Évident. $\square$

Proposition 2.2.13 Supposons que $\epsilon(g,h,k) = \sigma$. Alors $\epsilon g \in \{\pi, 0\}$ et $\epsilon k \in \{0, \sigma\}$. De plus, s'il existe une transition $(g,h,k) \to (g,h,k')$, alors $\epsilon k = \sigma$. De même, s'il existe une transition $(g,h,k) \to (g',h,k)$, alors $\epsilon g = \pi$. Par contre, si $\epsilon k \in \{0,\sigma\}$, $\epsilon g \in \{0,\pi\}$ et s'il existe une transition sur G, H ou K, alors $\epsilon(g,h,k) = \sigma$ et cette transition peut être relevée à une transition correspondante.

Preuve. On a vu que si $\epsilon g = \sigma$ ou $\epsilon k = \pi$, alors $\epsilon(g,h,k) = \pi$. Si $(g,h,k) \to (g,h,k')$ alors $k \to k'$ et puisque $\epsilon k \in \{0,\sigma\}$, il suit que $\epsilon k = \sigma$. Si $\epsilon k \in \{0,\sigma\}$ et $\epsilon g \in \{0,\pi\}$ alors $\epsilon(g,h,k) \in \{0,\sigma\}$. De plus $\epsilon(g,h,k) = 0$ si et seulement si $\epsilon g = \epsilon h = \epsilon k = 0$, ce qui empêche l'existence d'une transition sur G, H ou K. $\square$

La proposition montre que le joueur σ dans $\langle G,H,K\rangle$ est formé de l'équipe $\{\pi_G, \sigma_H, \pi_H, \sigma_K\}$. Afin de pouvoir jouer sur un tableau il faut attendre que l'équipe adverse ait fini de jouer dans le jeu $\langle G,K\rangle$.

Proposition 2.2.14 Chaque stratégie S dans $\langle G,H,K\rangle$ peut être projetée à une stratégie S' dans $\langle G,K\rangle$. Si à l'aide d'une telle stratégie on a atteint un couple (x,z) de positions terminales neutres, on peut supposer qu'il existe une troisième position finale neutre y du jeu H telle que le triplet de positions terminales (x,y,z) soit atteint par la stratégie S.

Preuve. Le joueur σ de $\langle G,K\rangle$ joue dans $\langle G,H,K\rangle$, à partir de la position (g_0,h_0,k_0). D'un coté il relève tout mouvement de π sur $\langle G,H,K\rangle$. Supposons que $\epsilon(g,k) = \sigma$ et qu'on se trouve dans la position (g,h,k), on déduit que $\epsilon(g,h,k) = \sigma$. Dans ce cas σ joue à partir de cette position en accord avec la stratégie S. Puisque tout chemin infini γ, arrêté sur G et sur K et joué seulement sur H, est un chemin dans $W_\pi(\langle G,H,K\rangle)$, en fin de compte la stratégie S répondra avec un mouvement sur G ou sur K et l'équipe σ peut répondre sur $\langle G,K\rangle$ avec un tel mouvement.

Considérons un chemin infini γ' joué selon cette stratégie. Le chemin γ' vient d'un chemin infini γ joué selon la stratégie S, qui donc satisfait $\gamma_G \in W_\pi(G)$ ou $\gamma_K \in W_\sigma(K)$. Puisque $\gamma'_G = \gamma_G$ et $\gamma'_K = \gamma_K$, on voit que $\gamma' \in W_\sigma(\langle G,K\rangle)$.

Supposons enfin que selon cette stratégie on a atteint un couple de positions neutres finales (x, z). Cette position est relevée à une position (x, h, z) dans $\langle G, H, K \rangle$. À partir de cette position les seuls mouvements possibles appartiennent à l'équipe σ et ils se déroulent sur H. Puisque S est une stratégie gagnante, on sait que si l'on continue à jouer on atteindra une position (x, h', z) telle que $\epsilon(x, h', z) \in \{0, \pi\}$. Puisque $\epsilon x = \epsilon z = 0$, il suit que $\epsilon(x, h', z) = 0$ et ensuite $\epsilon h' = 0$. $\square$

Proposition 2.2.15 Soient R et S deux stratégies dans $\langle G, H \rangle$ et $\langle H, K \rangle$. Il existe une stratégie $R|S$ dans $\langle G, H, K \rangle$ telle que, si l'on a atteint une position finale (x, y, z), on peut supposer que la position (x, y) est atteinte par R sur $\langle G, H \rangle$ et (y, z) est atteinte par S sur $\langle H, K \rangle$.

Preuve. L'équipe $\{\pi_G, \sigma_H\}$ utilise R sur $\langle G, H \rangle$ et l'équipe $\{\pi_H, \sigma_K\}$ utilise S sur $\langle H, K \rangle$. La stratégie $R|S$ est fermée sous les mouvements de σ_G et π_K car R et S sont fermées sous les mêmes mouvements. Supposons que $\epsilon(g, h, k) = \sigma$; alors soit $\epsilon(g, h) = \sigma$, soit $\epsilon(h, k) = \sigma$. Dans le premier cas on peut répondre sur $\langle G, H \rangle$ et dans le second cas on peut répondre sur $\langle H, K \rangle$. Dans le cas d'une réponse dans H, une seule stratégie décide la réponse, car ce mouvement est d'un coté un mouvement de σ de l'autre un mouvement de π. Par exemple si $\epsilon h = \sigma$, alors $\epsilon(g, h) = \sigma$ et $\epsilon(h, k) = \pi$. Donc la stratégie R choisit le mouvement à faire sur $\langle G, H \rangle$, par contre la stratégie S sur $\langle H, K \rangle$ accepte ce mouvement en tant que mouvement de l'adversaire.

Soit γ un chemin infini joué en accord avec cette stratégie. Une des projections $\gamma_{\langle G,H \rangle}$, $\gamma_{\langle H,K \rangle}$ est bien sur un chemin infini. Supposons que $\gamma_{\langle G,H \rangle}$ est infini; puisqu'il s'agit d'un chemin joué selon la stratégie gagnante R, on a que $\gamma_G = (\gamma_{\langle G,H \rangle})_G \in W_\pi(G)$ ou $\gamma_H = (\gamma_{\langle G,H \rangle})_H \in W_\sigma(H)$. Si $\gamma_G \in W_\pi(G)$ on a montré le résultat. Supposons donc que $\gamma_H = (\gamma_{\langle G,H \rangle})_H \in W_\sigma(H)$. Dans ce cas $\gamma_{\langle H,K \rangle}$ est aussi un chemin infini, de plus joué selon la stratégie gagnante S. Il suit que $\gamma_H = (\gamma_{\langle H,K \rangle})_H \in W_\pi(H)$ ou $\gamma_K = (\gamma_{\langle H,K \rangle})_K \in W_\sigma(K)$. Puisque $\gamma_H \notin W_\pi(H)$, il suit que $\gamma_K \in W_\sigma(K)$.

La dernière affirmation est évidente. $\square$

2.3 Structure d'ordre et de treillis

Dans la suite, P désignera un ensemble ordonné et $\mathcal{X}$ une classe fermée (cf. 2.1.12) et juste (cf. 2.2.1) de jeux partiels.

Définition 2.3.1 Un *jeu sur* P, ou aussi un *jeu à utilité dans* P, est un couple $\langle G, \lambda \rangle$ où G est un jeu partiel dans la classe $\mathcal{X}$ et $\lambda : X_G \longrightarrow P$ est une fonction d'utilité dans P. Nous allons dénoter la classe des jeux sur P par $\mathcal{X}(P)$.

Définition 2.3.2 Les notions de morphisme, isomorphisme et morphisme étale de jeux s'étendent aux jeux à utilité dans P en imposant qu'un morphisme $f : G \longrightarrow H$ satisfait aussi $\lambda_G(x) = \lambda_H \circ f(x)$ pour tout $x \in X_G$. Observons que la classe $\mathcal{X}(P)$ est fermée sous les isomorphismes.

Définition 2.3.3 Soient G, H deux jeux sur P. Le jeu $\langle G, H \rangle$ est le jeu sur l'ensemble ordonné $2 = \{\bot \leq \top\}$, où le jeu partiel sous-jacent est le jeu $\langle G, H \rangle$ et la fonction d'utilité est définie, pour tout couple (x, y) de $X_G \times X_H$, par:

$$\lambda(x,y) \;=\; \begin{cases} \top, & \lambda(x) \leq \lambda(y)\ , \\ \bot, & \lambda(x) \not\leq \lambda(y)\ . \end{cases}$$

Définition 2.3.4 Nous allons dire qu'une stratégie dans le jeu partiel $\langle G, H \rangle$ est *gagnante* dans le jeu sur 2 $\langle G, H \rangle$ si et seulement si pour tout couple (x, y) de positions terminales neutres atteintes par cette stratégie on a $\lambda(x, y) = \top$. En d'autres mots, une stratégie est gagnante dans le jeu sur 2 $\langle G, H \rangle$ si et seulement si elle est gagnante au sens de A.2.4 dans le jeu complet:

$$\langle G, H \rangle [\ \{(x, y) = \tilde{\lambda}(x, y)\}_{(x,y) \in X_G \times X_H}\ ]\ ,$$

où $\tilde{\lambda}(x, y)$ est le jeu $\bigwedge_\emptyset$ (voir la définition 2.1.5) si $\lambda(x, y) = \top$, et $\tilde{\lambda}(x, y) = \bigvee_\emptyset$ si $\lambda(x, y) = \bot$.

Définition 2.3.5 Soient G, H deux jeux sur P. Posons $G \vdash H$ si et seulement s'il existe une stratégie gagnante pour σ dans le jeu $\langle G, H \rangle$.

Proposition 2.3.6 Pour tout $G \in \mathcal{X}(P)$ on a que $G \vdash G$. Pour tout $G, H, K \in \mathcal{X}(P)$ si $G \vdash H$ et $H \vdash K$, alors $G \vdash K$.

Preuve. Considérons la stratégie « copy-cat » définie dans 2.2.9. Les positions neutres terminales atteintes par cette stratégie sont de la forme (x, x), où $x \in X_G$. Puisque $\lambda(x) \leq \lambda(x)$, on voit que $\lambda(x, x) = \top$.

Soient R une stratégie dans $\langle G, H\rangle$ et S une stratégie dans $\langle H, K\rangle$. Considérons la projection $(R|S)'$ (cf. 2.2.14) de la stratégie $R|S$ définie dans 2.2.15. Soit (x, z) une position terminale neutre atteinte par cette stratégie. On peut supposer qu'il existe une position $y \in X_H$ telle que la position terminale neutre (x, y, z) est atteinte par $R|S$; de même, on peut supposer que (x, y) est atteinte par R et (y, z) est atteinte par S. Puisque R et S sont des stratégies gagnantes, on trouve que $\lambda(x) \leq \lambda(y)$ et $\lambda(y) \leq \lambda(z)$ et donc $\lambda(x) \leq \lambda(z)$. $\square$

Définition 2.3.7 Soient $G, H \in \mathcal{X}(P)$. Posons $G \cong H$ si et seulement si $G \vdash H$ et $H \vdash G$.

Lemme 2.3.8 Pour tout jeu G, soient G_σ le jeu $\bigvee_{\{x\}}[x = G]$ et G_π le jeu $\bigwedge_{\{x\}}[x = G]$. On a que:

$$G_\sigma \;\cong\; G \;\cong\; G_\pi \,.$$

Preuve. Démontrons l'équivalence pour G_σ. Rappelons que $G_\sigma = \bigvee_{\{x\}}[x = G]$ est le jeu avec une nouvelle position de départ $\vee_0$ où le joueur σ doit jouer, suivie par une unique transition $\vee_0 \to g_0$, où g_0 est la position de départ de G. De g_0 le jeu se déroule comme dans G.

Montrons l'existence d'une stratégie dans $\langle G, G_\sigma\rangle$. Considérons la position initiale $(g_0, \vee_0)$ de ce jeu. Si $\epsilon g_0 = \pi$, alors $\epsilon(g_0, \vee_0) = \sigma$ et l'équipe σ peut choisir le mouvement sur la droite $\vee_0 \to g_0$ et continuer le jeu comme dans la stratégie copy-cat. Si $\epsilon g_0 = \sigma$, alors l'équipe π est obligée à jouer sur la gauche. Si la séquence de mouvements joués par π est infinie, alors cette partie est gagnante pour l'équipe σ. Sinon cette séquence s'arrête, l'équipe σ peut jouer le mouvement $\vee_0 \to g_0$ sur la droite et continuer d'ici exactement comme dans la stratégie copy-cat.

Montrons l'existence d'une stratégie dans $\langle G_\sigma, G\rangle$. Ici l'adversaire π doit jouer le mouvement gauche $\vee_0 \to g_0$ avant que le médiateur σ puisse jouer. Après ce mouvement le jeu se déroule comme dans la stratégie copy-cat. $\Box$

Proposition 2.3.9 Soit I un ensemble fini et soient $G, H_i \in \mathcal{X}(P)$, $i \in I$. On a que:

$$G \vdash \bigwedge_I [i = H_i] \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in I \;\; G \vdash H_i \, .$$

De même:

$$\bigvee_I [i = H_i] \vdash G \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in I \;\; H_i \vdash G \, .$$

Preuve. Démontrons la première propriété, la seconde est obtenue d'une façon semblable. On peut supposer que $\epsilon g_0 = \pi$, sinon on peut substituer le jeu G avec le jeu équivalent G_π. Dans ce cas on a que:

$$\bigwedge_I [i = \langle G, H_i\rangle] \quad \simeq \quad \langle G, \bigwedge_I [i = H_i]\rangle \, ,$$

à savoir les deux jeux sont équivalents et le joueur σ possède une stratégie gagnante dans un jeu si et seulement s'il possède une stratégie gagnante dans l'autre. Cette équivalence est établie en définissant l'inclusion étale de jeux

$$f : \bigwedge_I [i = \langle G, H_i\rangle] \longrightarrow \langle G, \bigwedge_I [i = H_i]\rangle$$

à l'aide de la propriété universelle de la substitution. Soient $h_{i,0}$ les sommets de départ des H_i. Posons $f_0(\wedge_0 \to i) = (g_0, \wedge_0) \to (g_0, h_{i,0})$ et, pour tout $i \in I$, posons $f_i(g, h_i) = (g, h_i)$ où h_i est une position de H_i. En recollant f_0 avec les f_i en un seul morphisme f, on obtient une inclusion étale. En effet, dans le jeu $\langle G, \bigwedge_I [i = H_i]\rangle$, à partir de la position initiale $(g_0, \wedge_0)$ il existe seulement des transitions sur la droite et cela à cause du fait que $\epsilon g_0 = \pi = \epsilon \wedge_0$. Ces transitions sont relevées par f de façon unique.

Le résultat découle en observant qu'il existe une bijection entre l'ensemble des stratégies de $\bigwedge_I [i = G_i]$ et le produit cartésien des ensembles des stratégies de G_i. $\Box$

Corollaire 2.3.10 Le quotient $\mathcal{X}_P$ de la classe $\mathcal{X}(P)$ par la relation d'équivalence $\cong$ est un treillis par rapport à son ordre naturel.

Nous allons noter $\mathcal{X}_P$ le quotient de la classe $\mathcal{X}(P)$ par la relation d'équivalence $\cong$ et $[H]$ la classe d'équivalence du jeu $H \in \mathcal{X}(P)$. Le treillis $\mathcal{X}_P$ satisfait des propriétés usuelles des treillis libres, à savoir l'injection des générateurs est un plongement, chaque générateur est atomique, la condition de Whitman (c'est-à-dire l'énoncé du lemme 2.3.12) est satisfaite. Évidemment $\mathcal{X}_P$ n'est pas engendré par P en tant que treillis et donc on peut seulement conclure que le treillis libre $F(P)$ est un sous-treillis de $\mathcal{X}_P$. Dans la suite si $p \in P$ nous allons noter p le jeu partiel $\langle x, \lambda \rangle$ où $\lambda(x) = p$. De même $\bigvee_j H_j$ désignera la classe d'équivalence de $\bigvee_J [j = H_i]$, ainsi que $\bigwedge_i G_i$ celle de $\bigwedge_I [i = G_i]$.

Lemme 2.3.11 Soient $p_1, p_2 \in P$. On a que $p_1 \leq p_2$ si et seulement si $p_1 \vdash p_2$.

Preuve. Évident à cause de la définition du jeu $\langle p_1, p_2 \rangle$. $\square$

Lemme 2.3.12 Soient G_i, H_j, $i \in I$ et $j \in J$, tels que $\bigwedge_i G_i \vdash \bigvee_j H_j$. Ou bien il existe $i \in I$ tel que $G_i \vdash \bigvee_j H_j$, ou bien il existe $j \in J$ tel que $\bigwedge_i G_i \vdash H_j$.

Preuve. Remarquons que le jeu $\langle \bigwedge_i G_i, \bigvee_j H_j \rangle$ est équivalent au jeu:

$$\bigvee_{I+J} [\ \{i = \langle G_i, \bigvee_j H_j \rangle\}_{i \in I},\ \{j = \langle \bigwedge_i G_i, H_j \rangle\}_{j \in J}\ ]\ .$$

Un morphisme étale de ce jeu vers le jeu $\langle \bigwedge_i G_i, \bigvee_j H_j \rangle$ est construit à l'aide de la propriété universelle de la substitution. De plus, il existe une bijection entre l'ensemble des stratégies dans un jeu de la forme $\bigvee_I [i = G_i]$ et le coproduit des ensembles des stratégies dans les G_i. $\square$

Lemme 2.3.13 Si $p \vdash \bigvee_j H_j$, alors il existe un j tel que $p \vdash G_j$. Si $\bigwedge_i G_i \vdash p$, alors il existe un i tel que $G_i \vdash p$.

Preuve. Il existe des équivalences de jeux $\bigvee_j \langle p, H_j \rangle \simeq \langle p, \bigvee_j H_j \rangle$ et $\bigvee_j \langle G_i, p \rangle \simeq \langle \bigwedge_i G_i, p \rangle$; le résultat découle comme dans le lemme précédent. $\square$

Corollaire 2.3.14 Soit $F(P)$ le treillis libre sur P. Alors l'unique morphisme de treillis $F(P) \longrightarrow \mathcal{X}_P$ qui étend la fonction $p \longmapsto p$ est un plongement.

2.4 Structure de μ-treillis: opérateurs internes et leurs points fixes

Définition 2.4.1 Un jeu-opérateur sur $\mathcal{X}(P)$ est un triplet $\langle G, x, \lambda \rangle$ où $G \in \mathcal{X}$ est un jeu partiel, $x \in X_G$ et $\lambda : X_G \backslash \{x\} \longrightarrow P$ est une fonction d'utilité.

Dans la suite nous allons noter simplement $G[x]$ le jeu-opérateur sur $\mathcal{X}(P)$ $\langle G, x, \lambda \rangle$. Puisque on a supposé que $\mathcal{X}$ est fermée sous la substitution, il suit que pour tout $H \in \mathcal{X}(P)$ $G[H] \in \mathcal{X}(P)$.

Proposition 2.4.2 Soit $G[x]$ un jeu-opérateur sur $\mathcal{X}(P)$. La correspondance $H \longmapsto G[H]$ préserve l'ordre, à savoir si $H \vdash K$, alors $G[H] \vdash G[K]$.

Preuve. Soient $H, K \in \mathcal{X}(P)$ tels que $H \vdash K$.

Supposons d'abord que $\epsilon h_0 = \pi$ et $\epsilon k_0 = \sigma$. Dans le jeu $\langle G[H], G[K] \rangle$ l'équipe σ joue en principe à l'aide de la stratégie copy-cat dans le jeu $\langle G[x], G[x] \rangle$. Une séquence de mouvements de l'équipe π pourrait passer par un sommet de la forme (x, g) ou (g, x) où $g \in G_0$; dans ce cas cette séquence s'arrête dans cette position car $\epsilon(x, g) = \sigma$ et $\epsilon(g, x) = \sigma$. Considérons le cas du sommet (x, g): dans la séquence de mouvements de π soit $(g', g) \to (x, g)$ le premier passage par une telle position. Puisque π a joué sur la gauche, on a $\epsilon(g') = \epsilon(g) = \sigma$, car dans la stratégie copy-cat si π joue d'un côté, alors de l'autre côté on a la même couleur. Donc $\epsilon(x, g) = \neg \epsilon x \vee \epsilon g = \neg \epsilon h_0 \vee \sigma = \sigma \vee \sigma = \sigma$; de même façon on arrive à montrer que $\epsilon(g, x) = \sigma$.

L'équipe σ peut donc copier le chemin $g \to^* x$ de l'autre côté pour atteindre la position $(x, x) = (h_0, k_0)$. D'ici elle joue en accord avec la stratégie existante pour $\langle H, K \rangle$.

Il suffit maintenant de montrer que, dans le cas que $\epsilon h_0 = \sigma$, il existe une stratégie dans $\langle G[H], G[H_\pi]\rangle$; par dualité on obtiendra aussi $G[K_\sigma] \vdash G[K]$ et la proposition générale découle par transitivité de la relation $\vdash$. Il s'agit d'une généralisation du lemme 2.3.8.

Dans le jeu $\langle G[H], G[H_\pi]\rangle$ l'équipe σ joue en premier à l'aide de la stratégie copy-cat. Considérons un chemin joué par π qui passe par une sommet de la forme (g, x) ou de la forme (x, g) où g est une position de G. Dans le cas d'un premier passage par un sommet de la forme (g, x) on a que $\epsilon(g) = \pi$ et $\epsilon(x) = \pi$ et l'équipe π est obligée à continuer avec l'unique transition $(g, x) \to (g, h_0)$. Puisque $\epsilon(g, h_0) = \sigma$ et $\epsilon g = \pi$, l'équipe σ peut copier les mouvements de π pour se ramener dans la position $(x, h_0) = (h_0, h_0)$. D'ici elle continue avec la stratégie copy-cat.

Dans le cas d'un premier passage par (x, g), l'équipe π peut continuer à jouer sur la gauche. S'il joue à l'infini, alors le chemin joué de cette façon est gagnant pour l'équipe σ. Sinon ce chemin s'arrête dans une position (h, g) avec $\epsilon h \in \{0, \pi\}$ et l'on a donc $\epsilon(h, g) = \sigma$, car $\epsilon(g) = \sigma$. D'ici, l'équipe σ peut utiliser la stratégie copy-cat pour se ramener dans la position (h, x). Puisque $\epsilon x = \pi$, on a que $\epsilon(h, x) = \pi$. Mais de cette position, l'unique mouvement possible est $(h, x) \to (h, h_0)$ et $\epsilon(h, h_0) = \sigma$. L'équipe σ peut copier les mouvements de π pour se ramener dans la position (h, h). D'ici elle continue avec la stratégie copy-cat. $\square$

Définition 2.4.3 Disons qu'un opérateur $\phi : \mathcal{X}_P \longrightarrow \mathcal{X}_P$ est *interne* si et seulement s'il existe un jeu-opérateur $G[x]$ sur P tel que

$$\phi[H] \quad = \quad [G[x = H]]$$

pour tout jeu $H \in \mathcal{X}(P)$.

Les résultats suivants montrent que tout opérateur interne possède un plus petit point préfixe. Par dualité, un tel opérateur possède aussi un plus grand point postfixe.

Lemme 2.4.4 Soit $f : G \longrightarrow H$ un morphisme de jeux sur P. On peut alors définir un morphisme de jeux $\langle f, K\rangle : \langle G, K\rangle \longrightarrow \langle H, K\rangle$ tel que si f est injectif, alors $\langle f, K\rangle$ est injectif, si f est étale, alors $\langle f, K\rangle$ est étale. De plus, cette construction est fonctorielle.

Preuve. Définissons $\langle f, K\rangle_0$ par:

$$\langle f, K\rangle_0(g, k) \quad = \quad (f(g), k)\ .$$

Soit maintenant $(\tau, k) : (g, k) \to (g', k)$ une transition gauche dans $\langle G, K\rangle$. Puisque $\epsilon f(g) = \epsilon g$, de $\neg\epsilon g \geq \epsilon k$ on déduit que $\neg\epsilon f(g) \geq \epsilon k$ et la transition $(f(\tau), k) : (f(g), k) \to (f(g'), k)$ est une transition de $\langle H, K\rangle$. Pour une transition droite $(g, \kappa) : (g, k) \to (g, k')$ on a que $\neg\epsilon g \leq \epsilon k$ et ensuite $\neg\epsilon f(g) \leq \epsilon k$; la transition $(f(g), \kappa) : (f(g), k) \to (f(g), k')$ est donc une transition de $\langle H, K\rangle$. Posons donc:

$$\begin{aligned}
\langle f, K\rangle_1(\tau, k) &= (f(\tau), k) : (f(g), k) \to (f(g'), k)\ , \\
\langle f, K\rangle_1(g, \kappa) &= (f(g), \kappa) : (f(g), k) \to (f(g), k')\ .
\end{aligned}$$

$\langle f, K\rangle$ est donc un morphisme de graphes, de plus il préserve la position de départ car $\langle f, K\rangle(g_0, k_0) = (f(g_0), k_0) = (h_0, k_0)$, la couleur car $\epsilon\langle f, K\rangle(g, k) = \epsilon(f(g), k) = \neg\epsilon f(g) \vee \epsilon k = \neg\epsilon g \vee \epsilon k = \epsilon(g, k)$ et enfin la couleur des couples des sommets neutres finales: on a $\lambda(x) \leq \lambda(y)$ si et seulement si $\lambda(f(x)) \leq \lambda(y)$ car $\lambda \circ f(x) = \lambda x$.

Soit γ est un chemin infini dans $\langle G, K\rangle$, on a que $(\langle f, K\rangle \circ \gamma)_H = f \circ \gamma_G$ et $(\langle f, K\rangle \circ \gamma)_K = \gamma_K$. Or $\gamma \in W_\sigma(\langle G, K\rangle)$ si et seulement si $\gamma_G \in W_\pi(G)$ ou $\gamma_K \in W_\sigma(K)$. Cela est vrai si et seulement si $f \circ \gamma_G \in W_\pi(H)$ ou $\gamma_K \in W_\sigma(K)$, car f est un morphisme de jeux. Pour la remarque qu'on vient de faire, cette condition est exactement $(\langle f, K\rangle \circ \gamma)_H \in W_\pi(H)$ ou $(\langle f, K\rangle \circ \gamma)_K \in W_\sigma(K)$, à savoir $\langle f, K\rangle \circ \gamma \in W_\sigma(\langle H, K\rangle)$.

Il est clair que si f est injectif alors $\langle f, K\rangle$ est injectif.

Supposons que f est étale et montrons que $\langle f, K\rangle$ est étale. Considérons une transition à partir de $(f(g), k)$. Une telle transition est ou bien gauche, ou bien droite. Dans le premier cas elle a la forme $(\tau', k) : (f(g), k) \to (h', k)$ pour une transition $\tau' : f(g) \to h'$. Une telle transition a un relèvement $\tau : g \to g'$ (tel que $f(\tau) = \tau'$) et puisque $\neg\epsilon g \geq \epsilon k$ si et seulement si $\neg\epsilon f(g) \geq \epsilon k$, on voit que $(\tau, k) : (g, k) \to (g', k)$ est un relèvement de (τ', k) par $\langle f, K\rangle$. Ce relèvement est unique car si $\langle f, K\rangle(\tilde{\tau}, k) = (\tau', k)$ alors $f(\tilde{\tau}) = \tau'$

et donc $\tilde{\tau} = \tau$ est l'unique relèvement de τ'. On raisonne de même façon pour une transition droite $(f(g), \kappa) : (f(g), k) \to (f(g), k)$. Dans ce cas il est évident que (g, κ') est l'unique relèvement de $(f(g), \kappa)$. $\square$

Lemme 2.4.5 Il existe un morphisme étale de jeux $f : G_\sigma[\ \mu_x.G[x]\ ] \longrightarrow \mu_x.G[x]$.

Preuve. Il suffit de recoller les morphismes de jeux suivants:

$$i : \bigvee_{\{x\}}[x = \epsilon g_0] \longrightarrow \mu_x.G[x]\ ,$$
$$i_{G[\perp]} : G[\perp] \longrightarrow (\mu_x.G[x], g_0)\ ,$$
$$Id : \mu_x.G[x] \longrightarrow \mu_x.G[x]\ .$$

Il est évident que i et Id sont des morphismes de jeux. Montrons que $i_{G[\perp]}$, l'inclusion du graphe de $G[\perp]$ dans le graphe de $\mu_x.G[x]$, est un morphisme de jeux. Par définition même de ces jeux $i_{G[\perp]}$ est un morphisme de graphes, il préserve la couleur et la fonction d'utilité. Montrons qu'il préserve les chemins infinis.

Or $i_{G[\perp]} \circ \gamma \in W_\sigma(\mu_x.G[x])$ si et seulement s'il existe $n \geq 0$ et $\gamma' \in W_\sigma(G[\perp])$ tels que $\partial^n(i_{G[\perp]} \circ \gamma) = i_{G[\perp]} \circ \partial^n(\gamma) = i_{G[\perp]} \circ \gamma'$, cela si et seulement si $\partial^n(\gamma) \in W_\sigma(G[\perp])$ ce qui est équivalent à dire que $\gamma \in W_\sigma(G[\perp])$. Que le morphisme ainsi obtenu est étale peut être vérifié localement sur $(\bigvee_{\{x\}})_0 \backslash \{x\}$, $G_0 \backslash \{x\}$ et $(\mu_x.G[x])_0$. $\square$

Proposition 2.4.6 Soit $G[x]$ un jeu-opérateur sur $\mathcal{X}(P)$. On a que:

$$G[\ \mu_x.G[x]\ ]\ \ \vdash\ \ \mu_x.G[x]\ .$$

Preuve. Essentiellement σ joue à l'aide de la stratégie copy-cat. On remplace le jeu $G[\,\mu_x.G[x]\,]$ par le jeu équivalent $G_\sigma[\,\mu_x.G[x]\,]$; on sait qu'il existe un morphisme étale $f : G_1 \longrightarrow G_2$ où $G_1 = G_\sigma[\,\mu_x.G[x]\,]$ et $G_2 = \mu_x.G[x]$. Il suit qu'il existe un morphisme étale $\langle f, H\rangle : \langle G_1, H\rangle \longrightarrow \langle G_2, H\rangle$. On peut donc déduire l'équivalence de jeux suivante:

$$\langle G_\sigma[\,\mu_x.G[x]\,], \mu_x.G[x]\rangle\ \ \simeq\ \ \langle \mu_x.G[x], \mu_x.G[x]\rangle\ ,$$

d'où l'existence de la stratégie copy-cat entraîne l'existence d'une stratégie dans le jeu $\langle G_\sigma[\,\mu_x.G[x]\,], \mu_x.G[x]\rangle$. $\square$

Proposition 2.4.7 Soit $G[x]$ un jeu-opérateur sur $\mathcal{X}(P)$. L'implication suivante est vraie:

$$G[H] \vdash H \quad \Rightarrow \quad \mu_x.G[x] \vdash H \ .$$

Pour prouver ce théorème il nous faut donner des définitions et des lemmes.

Définition 2.4.8 Soit $G = \langle G_0, G_1 \rangle$ un graphe et soit $A \subseteq G_1$. Le graphe $G \circ_\omega A$ est défini de la façon suivante:

- $(G \circ_\omega A)_0 = \sum_{n \geq 0} G_0 \times \{n\}$.
- $(G \circ_\omega A)_1 = \sum_{n \geq 0} G_1 \times \{n\}$.
- $\delta_0(\tau, n) = (\delta_0 \tau, n)$,
- $\delta_1(\tau, n) = \begin{cases} (\delta_1 \tau, n), & \tau \notin A \ , \\ (\delta_1 \tau, n+1), & \tau \in A \ . \end{cases}$

Lemme 2.4.9 Le couple de fonctions $p = \langle p_0, p_1 \rangle$ défini par:

$$\begin{aligned} p_0(g, n) &= g \ , \\ p_1(\tau, n) &= \tau \ , \end{aligned}$$

est un morphisme étale de graphes $p : G \circ_\omega A \longrightarrow G$.

Preuve. Il est évident par définition que $\langle p_0, p_1 \rangle$ est un morphisme de graphes.

Considérons une transition $\tau : p(g, n) \to g'$; la transition $(\tau, n) : (g, n) \to (g', n')$ avec $n' \in \{n, n+1\}$ est un relèvement de τ. De plus il est l'unique relèvement car si $p(\tau', m) = \tau$, alors $\tau = \tau'$ et $(g, n) = \delta_0(\tau', m) = (\delta_0 \tau', m)$ et l'on obtient aussi que $n = m$. $\square$

Définition 2.4.10 Soit G un jeu et soit $A \subseteq G_1$. Le jeu $G \circ_\omega A$ est défini de la façon suivante:

- Le graphe sous-jacent est $G \circ_\omega A$.

- La position de départ est $(g_0, 0)$.
- $\epsilon(g, n) = \epsilon g$.
- $\gamma \in W_\sigma(G \circ_\omega A)$ si et seulement si $p \circ \gamma \in W_\sigma(G)$.

Définition 2.4.11 Soit $G[x]$ un jeu-opérateur sur $\mathcal{X}(P)$, posons dans la suite:

$$G^\omega_\sigma[\perp] \;=\; \mu_x.G[x] \circ_\omega \{x \to g_0\} \,.$$

Lemme 2.4.12 Soit $G[x]$ un jeu-opérateur sur $\mathcal{X}(P)$. Pour tout $n \geq 0$ il existe un diagramme commutatif canonique de jeux:

$$\begin{tikzcd} G^n_\sigma[\perp] \arrow[d, tail, "k_n"'] \arrow[dr, tail, "i_n"] & \\ G^{n+1}_\sigma[\perp] \arrow[r, tail, "i_{n+1}"] & G^\omega_\sigma[\perp] \end{tikzcd}$$

où i_n, k_n et i_{n+1} sont des injections.

Preuve. Pour tout $n \geq 1$ il existe un morphisme injectif de jeux

$$j_n : G_\sigma[\perp] \rightarrowtail (\, G^\omega_\sigma[\perp], (x, n-1)\,) \,,$$

défini par:

$$\begin{aligned} j_n(\vee_0 \to g_0) &= (x, n-1) \to (g_0, n) \,, \\ j_n(\tau) &= (\tau, n), \;\; \text{si } \tau \in G[\perp]_1 \,. \end{aligned}$$

Pour voir que les j_n sont des morphismes, soit $i : G_\sigma[\perp] \longrightarrow \mu_x.G[x]$ l'injection canonique entre ces jeux. Puisque $p \circ j_n = i$ et que i et p sont des morphismes, on voit que les j_n sont aussi des morphismes de jeux.

On peut construire par induction une suite d'inclusions $i_n : G^n_\sigma[\perp] \rightarrowtail G^\omega_\sigma[\perp]$ de cette façon. Soit i_0 l'inclusion canonique de $\perp$ dans $G^\omega_\sigma[\perp]$, c'est-à-dire si $\vee_0$ est l'unique sommet du jeu $\perp$, alors $i_0(\vee_0) = (x, 0)$. Pour le pas inductif observons que:

$$G^{n+1}_\sigma[\perp] \;\equiv\; G^n_\sigma[\, G_\sigma[\perp]\,] \,.$$

Dénotons par x_n la position terminale de $G^n_\sigma[\perp]$ correspondante à la position terminale neutre donnée de $G^n_\sigma[x]$. Supposons donc qu'on a défini $i_n : G^n_\sigma[\perp] \longrightarrow G^\omega_\sigma[\perp]$ avec la propriété que $i_n(x_n) = (x, n)$. Puisque $j_{n+1} : G_\sigma[\perp] \rightarrowtail (\, G^\omega_\sigma[\perp], (x, n)\,)$, on peut recoller à l'aide de la propriété universelle i_n et j_{n+1} pour obtenir i_{n+1} : $G^{n+1}[\perp] \rightarrowtail G^\omega_\sigma[\perp]$; l'on voit que $i_{n+1}(x_{n+1}) = j_{n+1}(x) = (x, n+1)$. De cette façon on a encore un morphisme de jeux; il est évident que les i_n sont injectifs.

Soit k_n l'injection canonique de $G^n_\sigma[\perp]$ dans $G^n_\sigma[\, G^\sigma[\perp]\,]$, à savoir $k_n = i_{G^n_\sigma[\perp]}$ en utilisant la notation de la proposition 2.1.11. Par définition de i_{n+1} on a que $i_{n+1} \circ k_n = i_n$. □

Preuve. (Proposition 2.4.7). Soient donc $G[x]$ un jeu-opérateur sur $\mathcal{X}(P)$ et $H \in \mathcal{X}(P)$ tels que $G[H] \vdash H$. On veut montrer que $\mu_x.G[x] \vdash H$.

On peut supposer que $\epsilon h_0 = \sigma$, si non, à partir de $G[H_\sigma] \vdash H_\sigma$, on peut démontrer que $\mu_x.G[x] \vdash H_\sigma$ et arriver à la conclusion en utilisant $H_\sigma \vdash H$.

Soit $G^\omega_\sigma[\perp]$ le recouvrement de $\mu_x.G[x]$ défini en 2.4.11. De cette façon on obtient un jeu étale $\langle G^\omega_\sigma[\perp], H\rangle$ sur $\langle \mu_x.G[x], H\rangle$ et pour montrer le résultat il suffit de trouver une stratégie gagnante dans le jeu $\langle G^\omega_\sigma[\perp], H\rangle$. Dans la suite nous allons observer que:

- il existe un morphisme injectif de jeux:

$$G^n_\sigma[\perp] \rightarrowtail G^n_\sigma[H]$$

  et donc un morphisme injectif de jeux:

$$\langle G^n_\sigma[\perp], H\rangle \rightarrowtail \langle G^n_\sigma[H], H\rangle\ .$$

- du diagramme du lemme 2.4.12 on déduit l'existence d'un diagramme commutatif comme suit:

$$\begin{tikzcd} \langle G^n_\sigma[\perp], H\rangle \arrow[d, tail, "\langle k_n, H\rangle"'] \arrow[dr, tail, "\langle i_n, H\rangle"] & \\ \langle G^{n+1}_\sigma[\perp], H\rangle \arrow[r, tail, "\langle i_{n+1}, H\rangle"] & \langle G^\omega_\sigma[\perp], H\rangle \end{tikzcd}$$

  où toute flèche est injective.

Rappelons qu'on a une stratégie dans le jeu $\langle G_\sigma[H], H\rangle$ et que par composition on peut obtenir une suite de stratégie S^n dans les jeux $\langle G^n_\sigma[H], H\rangle$. Définissons explicitement cette suite de stratégies.

Pour $n = 0$, S^0 est la stratégie copy-cat dans le jeu $\langle H, H\rangle$, car $G^0_\sigma[H] = H$. Supposons qu'on a défini la stratégie S^n dans le jeu $\langle G^n_\sigma[H], H\rangle$. Dans le jeu $\langle G^{n+1}_\sigma[H], H\rangle = \langle G^n_\sigma[\,G_\sigma[H]\,], H\rangle$, l'équipe σ joue en accord avec la stratégie S^n jusqu'à ce qu'il se trouve dans une position de la forme (x, n, h). À partir de cette position le jeu est de la forme:

$$\langle G_\sigma[H], (H, h)\rangle$$

où (H, h) est défini comme dans 2.1.10 simplement en déclarant que h est la nouvelle position de départ dans H. À la fois, on a aussi la possibilité de continuer à jouer dans le jeu $\langle G^n_\sigma[H], H\rangle$ à l'aide de la stratégie S^n si l'on identifie le sommet (x, n) avec le sommet h_0 de H.

On peut donc gagner dans le jeu $\langle G_\sigma[H], (H, h)\rangle$ en utilisant la stratégie de communication dans le jeu:

$$\langle G_\sigma[H], H, (H, h)\rangle$$

en utilisant à gauche la stratégie donnée S dans $\langle G_\sigma[H], H\rangle$ et à droite la stratégie résiduelle de S^n dans le jeu $\langle G^n_\sigma[H], H\rangle$ à partir de la position (h_0, h).

Il est évident que cette stratégie est gagnante du fait qu'elle correspond au processus d'élimination des coupures pour la dérivation suivante:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{S}{G_\sigma[H] \vdash H}}{G^n_\sigma[\,G_\sigma[H]\,] \vdash G^n_\sigma[H]} \qquad \dfrac{S^n}{G^n_\sigma[H] \vdash H}}{G^n_\sigma[\,G_\sigma[H]\,] \vdash H}\ \text{Cut}$$

Du fait que $G^n_\sigma[\bot]$ est un sous-jeu de $G^n_\sigma[H]$, il suit que $\langle G^n_\sigma[\bot], H\rangle$ est un sous-jeu de $\langle G^n_\sigma[H], H\rangle$ et cela pour tout $n \geq 0$. Considérons les restrictions des stratégies S^n aux jeux $\langle G^n_\sigma[\bot], H\rangle$, restrictions que nous appellons R^n. La description qu'on a donné de ces stratégies montre que $R^n \subseteq R^{n+1}$, à savoir jusqu'au passage par un sommet de la forme (x, n, h) on a joué dans R^{n+1} exactement comme dans R^n. De plus chaque R^n est une stratégie dans le jeu $\langle G^n_\sigma[\perp], H\rangle$.

Soit $R^\omega = \bigcup_{n\geq 0} R^n$ la façon de jouer obtenue en recollant toutes les R^n. Or R^ω est une stratégie dans le jeu $\langle G^\omega_\sigma, H\rangle$. En effet chaque mouvement de l'équipe π est un mouvement dans quelque $\langle G^n_\sigma[\perp], H\rangle$ et donc R^ω est fermée sous les mouvements de l'équipe π. De même, si (g, n, h) est une position atteinte en jouant à l'aide de R^ω telle que $\epsilon(g, n, h) = \sigma$, alors (g, n, h) est atteinte à l'aide de R^n et donc le joueur σ peut toujours prolonger le jeu à l'aide de R^n, car R^n est une stratégie gagnante. Pour voir cela il suffit de remarquer que $(g, n, h) \neq (x, n, h)$, car $\epsilon(x, n, h) = \pi$.

Considérons un chemin infini joué à l'aide de cette stratégie: ou bien il est joué éventuellement à l'aide d'une stratégie R^n et donc il est gagnant, ou bien il passe par des sommets (x, n, h_n), pour tout $n \geq 0$. Puisque la projection gauche de ce chemin est gagnante pour π, ce chemin est gagnant pour l'équipe σ. □

On a montré donc que:

Proposition 2.4.13 Soit $G[x]$ un jeu-opérateur sur $\mathcal{X}(P)$. Alors $\mu_x.G[x]$ est le plus petit point préfixe de la correspondance $H \longmapsto G[H]$.

D'une façon analogue on montre:

Proposition 2.4.14 Soit $G[x]$ un jeu-opérateur sur $\mathcal{X}(P)$. Alors $\nu_x.G[x]$ est le plus grand point postfixe de la correspondance $H \longmapsto G[H]$.

Théorème 2.4.15 Le quotient antisymétrique de la classe $\mathcal{X}(P)$, que nous allons noter $\mathcal{X}_P$, est un μ-treillis.

Preuve. On a vu que $\mathcal{X}_P$ est un treillis, car pour tout $n \geq 0$ on peut choisir un ensemble I tel que $\mathrm{card}\, I = n$ et une bijection $\psi : n \xrightarrow{\cong} I$ d'une façon telle que:

$$\bigwedge_n([H_1], \ldots, [H_n]) \;=\; [\bigwedge_I[\, \{\psi(j) = H_j\}_{j=1,\ldots,n}\,]]$$

et

$$\bigvee_n([H_1],\ldots,[H_n]) \;=\; [\,\bigvee_I[\;\{\psi(j)=H_j\}_{j=1,\ldots,n}\;]\,]\;.$$

Soit donc $\phi \in \mathcal{A}$ tel que $a(\phi) = n+1$ et supposons qu'il existe un jeu partiel G avec card $X_G = n+1$ et une bijection $\psi : n+1 \longrightarrow X_G$ tels que pour tout $H_1,\ldots,H_{n+1} \in \mathcal{X}(P)^{n+1}$ on a que:

$$\phi([H_1],\ldots,[H_{n+1}]) \;=\; [\,G[\;\{\psi(j)=H_j\}_{j=1,\ldots,n+1}]\,]\;.$$

Soient $s \in \{1,\ldots,n+1\}$ et $H_1,\ldots,H_n \in \mathcal{X}(P)^n$; on a que:

$$\phi_{s,[H_1],\ldots,[H_n]}(\,[K]\,) \;=\; [\,G'[y=K]\,]$$

où:

$$G'[y] \;=\; G[\,\{\psi'(j)=H_j\}_{j=1,\ldots,n}\,]\;.$$

L'injection $\psi' : n \longrightarrow X_G$ est le composé $\psi \circ \epsilon^s$ et $y = \psi(s)$. Donc:

$$\mu.\phi_{s,[H_1],\ldots,[H_n]} \;=\; [\,\mu_y.G'[y]\,]\;.$$

Cela montre que pour tout $H_1,\ldots,H_n \in \mathcal{X}(P)^n$ on a:

$$\mu_s.\phi([H_1],\ldots,[H_n]) \;=\; [\,\mu_{\psi(s)}.G[\;\{\psi'(j)=H_j\}_{j=1,\ldots,n}]\,]\;.$$

$\square$

CHAPITRE III

COMBINATOIRE DES JEUX ET DÉCIDABILITÉ

Le premier but de ce chapitre est de donner une description directe de la classe $\mathcal{J}$. Rappelons ici sa définition (cf. 2.1.13).

Définition 3.0.16 La classe de jeux partiels $\mathcal{J}$ est la plus petite classe de jeux partiels $\mathcal{X}$ satisfaisant les conditions suivantes:

1. $x \in \mathcal{X}$.
2. Si I un ensemble fini, alors $\bigwedge_I \in \mathcal{X}$ et $\bigvee_I \in \mathcal{X}$.
3. Si $G[x] \in \mathcal{X}$ et $H \in \mathcal{X}$, alors $G[H] \in \mathcal{X}$.
4. Si $G[x] \in \mathcal{X}$, alors $\mu_x.G[x] \in \mathcal{X}$ et $\nu_x.G[x] \in \mathcal{X}$.
5. Si $G \in \mathcal{X}$ et $H \equiv G$, alors $H \in \mathcal{X}$.

Nous allons introduire la notion combinatoire d'arbre avec retours que l'on va utiliser pour décrire explicitement la classe $\mathcal{J}$. À l'aide de cette description on pourra bien se convaincre de la proposition suivante:

Proposition 3.0.17 La classe $\mathcal{J}$ est juste et, par définition, elle est fermée. Soit P un ensemble ordonné, il suit que le quotient antisymétrique $\mathcal{J}_P$ de la classe $\mathcal{J}(P)$ est un μ-treillis. De plus, la classe sous-jacente à $\mathcal{J}_P$ est un ensemble.

Nous allons utiliser cette description aussi pour montrer que la relation d'ordre de $\mathcal{J}(P)$ est décidable si la relation d'ordre de P est décidable. On peut décrire un algorithme qui construit, étant donné deux jeux $G, H \in \mathcal{J}(P)$, un revêtement fini $p : K \longrightarrow \langle G, H \rangle$ tel que K est un jeu de Muller, nous définissons cette notion en 3.3.1. On peut aussi décrire un algorithme qui construit un revêtement fini $p' : K' \longrightarrow K$ d'un jeu de Muller de façon que K' est un jeu de Rabin à chaîne, ou jeu de parité; la preuve de cela est contenue dans (Gurevich et Harrington, 1982) et (Thomas, 1997). À l'aide de la formule de point fixe de (Emerson et Jutla, 1991; Walukiewicz, 1996), que nous démontrons dans l'appendice A, on peut calculer effectivement l'ensemble WP_σ des positions gagnantes pour σ dans le jeu K' et calculer si $(p \circ p')^{-1}(g_0, h_0) \cap WP_\sigma = \emptyset$. On déduit que $G \vdash H$ si et seulement si cette dernière relation est fausse.

3.1 Arbres avec retours

Rappelons qu'un arbre est un graphe pointé $\langle A, a_0 \rangle$ tel que pour tout $a \in A_0$ il existe un unique chemin $a_0 \to^* a$.

Définition 3.1.1 Un *arbre avec retours* est un couple $\langle A, \beta \rangle$ où A est un arbre fini de racine a_0 et $\beta : A_0 \longrightarrow P(A_0)$ est une fonction telle que si $r \in \beta(a)$, alors r est un ancêtre de a, à savoir il existe un chemin $r \to^* a$.

Définition 3.1.2 Soient $\langle A, \beta \rangle$ un arbre avec retours et r un sommet de A. Disons que r est un *retour* s'il existe $a \in A_0$ tel que $r \in \beta(a)$. Disons que x est une *feuille* si x est une feuille de A et si $\beta(x) = \emptyset$. Posons:

$$R(\, A, \beta \,) \quad = \quad \{ \, r \mid r \in \beta(a), \; a \in A_0 \, \} \, .$$

Définition 3.1.3 Soit $\langle A, \beta \rangle$ un arbre avec retours. Le graphe pointé $G\langle A, \beta \rangle$ de $\langle A, \beta \rangle$ est défini de la façon suivante:

- $G\langle A, \beta \rangle_0 = A_0$.
- $G\langle A, \beta \rangle_1 = A_1 \cup \{ \, a \to r \mid a \in A_0, \; r \in \beta(a) \, \}$.

- Le point de $G\langle A, \beta\rangle$ est la racine a_0 de A.

Observons que $G\langle A, \beta\rangle$ est une relation, à savoir pour $a, a' \in G\langle A, \beta\rangle_0$ il existe au plus une transition de la forme $a \to a'$.

Proposition 3.1.4 Si $G\langle A, \beta\rangle = G\langle C, \delta\rangle$, alors $A = C$ et $\beta = \delta$.

Preuve. Considérons l'ensemble:

$$\{ \; a \to a' \mid a \to a' \in A_1 \setminus C_1 \; \} \; .$$

Supposons que cet ensemble n'est pas vide et considérons une arête $a \to a'$ de cet ensemble avec a de hauteur minimale en tant que sommet de C. Il suit que l'unique chemin $a_0 \to^* a$ est un chemin de A et de C. Puisque $a \to a'$ n'appartient pas à C, on a que $a' \in \delta(a)$ et donc a' est sur le chemin $a_0 \to^* a$; cela introduit un cycle dans l'arbre A, ce qui est une contradiction.

Donc un tel ensemble est vide et $A = C$. Puisque β est déterminée par $G\langle A, \beta\rangle$ et A par:

$$r \in \beta(a) \quad \Leftrightarrow \quad a \to r \in G\langle A, \beta\rangle_1 \setminus A_1$$

et qu'une relation semblable vaut aussi pour δ, de $A = C$ et $G\langle A, \beta\rangle = G\langle C, \delta\rangle$ on obtient que $\beta = \delta$. □

Remarque 3.1.5 Ce théorème montre qu'on peut utiliser univoquement la terminologie des arbres avec retours pour un graphe pointé G de la forme $G\langle A, \beta\rangle$. On peut caractériser ce type de graphe à l'aide de la proposition suivante.

Définition 3.1.6 Soit G un graphe. Un chemin $g \to^* g'$ est *simple* s'il ne contient pas des sommets visités deux fois. De même, $\tau : g \to^* g'$ est simple si toute factorisation $\tau = \pi \circ \gamma \circ \lambda$ avec $\gamma : \tilde{g} \to^* \tilde{g}$ — c'est-à-dire que γ est un cycle — est telle que γ est le chemin de longueur nulle.

Proposition 3.1.7 Soit $\langle G, g_0\rangle$ un graphe pointé. Il existe un arbre avec retours $\langle A, \beta\rangle$ tel que $G\langle A, \beta\rangle = \langle G, g_0\rangle$ si et seulement si $\langle G, g_0\rangle$ satisfait les conditions suivantes:

- G est une relation.
- Pour tout $g \in G_0$ il existe un unique chemin simple $g_0 \to^* g$.

Preuve. Si $\langle G, g_0 \rangle = G\langle A, \beta \rangle$ pour un arbre avec retours $\langle A, \beta \rangle$, alors ces conditions sont satisfaites.

Par contre, supposons que $\langle G, g_0 \rangle$ satisfait ces conditions. Nous allons classifier les arêtes de G.

Soit $g \to g'$ une arête et soit $g_0 \to^* g$ l'unique chemin simple de g_0 vers g. Disons que $g \to g'$ est descendante si $g_0 \to^* g \to g'$ est l'unique chemin simple de g_0 vers g', sinon disons que $g \to g'$ est à l'arrière. Observons que dans ce dernier cas g' est sur l'unique chemin simple $g_0 \to^* g$. En effet, puisque le chemin $g_0 \to^* g \to g'$ n'est pas simple et puisque dans le chemin $g_0 \to^* g$ il n'y a pas de sommets visités deux fois, il faut que le sommet visité deux fois dans $g_0 \to^* g \to g'$ soit g' et donc g' est sur le chemin $g_0 \to^* g$.

Soit $A_1 \subseteq G_1$ l'ensemble des arêtes descendantes de $\langle G, g_0 \rangle$. Alors le graphe pointé $A = \langle G_0, A_1, g_0 \rangle$ est un arbre. En effet chaque arête sur l'unique chemin simple $g_0 \to^* g$ est descendante et cela entraîne que le graphe $\langle G_0, A_1, g_0 \rangle$ est connexe. Soit donc $\tau : g_0 \to^* g$ un chemin arbitraire de $\langle G_0, A_1, g_0 \rangle$; toute arête de ce chemin est descendante et, en utilisant l'induction et la définition d'arête descendante, l'on voit que $\tau : g_0 \to^* g$ est l'unique chemin simple de g_0 vers g de $\langle G, g_0 \rangle$.

Enfin posons:

$$r \in \beta(a) \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe une arête } a \to r \text{ à l'arrière },$$

pour la remarque qu'on a fait on voit que r est un ancêtre de a dans l'arbre A. Il est évident que $G\langle A, \beta \rangle = \langle G, g_0 \rangle$. $\square$

Remarque 3.1.8 Dans la suite, nous allons utiliser cette caractérisation librement et nous allons aussi dire qu'un arbre avec retours est simplement un graphe pointé fini satisfaisant les conditions de la proposition précédente. À la fois pour un arbre avec retours G nous allons utiliser le vocabulaire développé en relation à l'unique couple

$\langle A, \beta \rangle$ tel que $G\langle A, \beta \rangle = G$. Il est intéressant de caractériser les notions reliées au couple $\langle A, \beta \rangle$ en utilisant la caractérisation des arbres avec retours par les chemins simples.

Lemme 3.1.9 Soit $\langle G, g_0 \rangle$ un arbre avec retours. Un sommet $r \in G_0$ est un retour si et seulement s'il existe un diagramme non-commutatif:

$$\begin{tikzcd} g_0 \arrow[d, "\sigma"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\ g \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\neq"] & r \end{tikzcd}$$

où σ et τ sont des chemins simples. Dans ce cas l'arête $g \to r$ est une arête à l'arrière.

Lemme 3.1.10 Soit $\langle A, \beta \rangle$ un arbre avec retours et soit γ un chemin infini dans le graphe $G\langle A, \beta \rangle$. Il existe alors le retour de hauteur minimale visité infiniment souvent.

Preuve. Soient r_1, r_2 deux retours visités infiniment souvent par le chemin infini γ. On peut se convaincre que chaque chemin de r_i vers r_j dans $G\langle A, \beta \rangle$, $i \neq j$, est de la forme $r_i \to^* r \to^* r_j$ où r est un retour qui est à la fois un ancêtre de r_1 et de r_2. Puisque les ancêtres communs de r_1 et r_2 sont en nombre fini et les chemins de r_i vers r_j dans γ sont en nombre infini, on trouve qu'il existe au moins un retour r visité infiniment souvent par γ qui est un ancêtre commun des r_i.

Cela, avec le fait que l'ensemble des retours visités infiniment souvent est fini et non vide, entraîne l'existence du retour de hauteur minimale visité infiniment souvent. $\square$

Définition 3.1.11 Soit G un arbre avec retours et soit γ un chemin infini dans G. Écrivons r_γ pour l'unique retour de hauteur minimale visité infiniment souvent.

3.2 Jeux et arbres avec retours

Définition 3.2.1 Soit G un arbre avec retours. On dit que G est *rigide* si pour tout retour r de G il existe des transitions uniques

$$P(r) \to r\ , \quad r \to S(r)$$

telles que $P(r) \to r$ est une arête à l'arrière de G et $r \to S(r)$ est une arête de G.

Remarque 3.2.2 Observons que dans un arbre avec retours $\langle G, g_0 \rangle = G\langle A, \beta \rangle$ on a que pour tout retour r il existe une seule arête à l'arrière $P(r) \to r$ si et seulement si:

$$r \in \beta(a) \cap \beta(a') \quad \Rightarrow a = a' \ .$$

Définition 3.2.3 Soit G un arbre avec retours rigide et soit $\epsilon : G_0 \longrightarrow \{\pi, \sigma, 0\}$ tel que si $\epsilon(x) = 0$ alors $\{ \ g' \mid x \to g' \ \} = \emptyset$. Il existe une structure canonique $\langle G, \epsilon, W_\sigma \rangle$ de jeu partiel sur le couple $\langle G, \epsilon \rangle$ obtenue en définissant W_σ par:

$$\gamma \in W_\sigma \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon(r_\gamma) = \pi \ .$$

Dans la suite soit $\mathcal{R}$ la classe de jeux partiels obtenue de cette façon.

Proposition 3.2.4 La classe $\mathcal{R}$ est juste.

Preuve. Soit $\langle G, \epsilon \rangle$ un jeu de la classe $\mathcal{R}$. Soit γ un chemin infini de G et supposons que pour tout $n \geq n_0$ $\epsilon(\gamma(n)) = \pi$. En particulier $\epsilon(r_\gamma) = \pi$ et cela entraîne que $\gamma \in W_\sigma$. De même, si $\epsilon(\gamma(n)) = \sigma$ pour $n \geq n_0$, alors $\epsilon(r_\gamma) = \sigma$ et $\gamma \notin W_\sigma$, c'est-à-dire que $\gamma \in W_\pi$. $\square$

Proposition 3.2.5 La classe $\mathcal{R}$ est fermée et donc $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{R}$.

Preuve. La classe $\mathcal{R}$ est définie à l'aide d'une propriété invariante par isomorphisme et cela entraîne que $\mathcal{R}$ est fermée sous les isomorphismes de jeux.

Aussi, il est clair que pour tout ensemble fini I les jeux $x, \bigwedge_I$ et $\bigvee_I$ appartiennent a cette classe, car le graphe sous-jacent est un arbre.

Soient $G[x] \in \mathcal{R}$ et $H \in \mathcal{R}$, on peut s'apercevoir que $G[H] \in \mathcal{R}$ de cette façon. D'abord soient $\langle A, \beta \rangle$ et $\langle C, \delta \rangle$ tels que $G\langle A, \beta \rangle = G$ et $G\langle C, \delta \rangle = H$. Le sommet x est une feuille de A et l'on peut considérer l'arbre avec retours $\langle A[C/x], \beta + \delta \rangle$ où $A[C/x]$ est obtenu par usuelle substitution d'un arbre par une feuille et $\beta + \delta$ est définie sur les composants de cet arbre, à savoir:

$$\beta + \delta(g) \quad = \quad \begin{cases} \beta(g)\ , & g \in A_0 \setminus \{x\}\ , \\ \delta(g)\ , & g \in C_0\ . \end{cases}$$

Observons que ceci est une bonne définition, car si $r \in \beta(a)$ alors $r \neq x$. Or:

$$R(\,G[H]\,) \quad = \quad R(\,G\,) + R(\,H\,)\ .$$

Cette relation est évidente de la représentation donnée de $G[H]$ et on peut s'en servir pour montrer que si r est un retour de $G[H]$, alors il existe une unique arête à l'arrière $P(r) \to r$ dans $G[H]$. En effet si $r \in \beta + \delta(g) \cap \beta + \delta(g')$ et $r \in A_0$, alors $g, g' \in A_0$ et $r \in \beta(g) \cap \beta(g')$; cette dernière relation entraîne que $g = g'$. On raisonne d'une façon semblable si l'on choisit un retour $r \in C_0$. L'autre propriété définissant un arbre avec retours rigide est vérifiée simplement en utilisant la définition de substitution sur les graphes.

Considérons un chemin infini γ dans $G[H]$. On a que $\epsilon(r_\gamma) = \pi$ si et seulement si soit $r_\gamma \in A$ et $\epsilon(r_\gamma) = \pi$, soit $r_\gamma \in C$ et $\epsilon(r_\gamma) = \pi$. À la fois, $r_\gamma \in A$ si et seulement si γ est un chemin de $\langle A, \beta \rangle$ et $r_\gamma \in C$ si et seulement s'il existe $n \geq 0$ tel que $\partial^n \gamma$ est un chemin de $\langle C, \delta \rangle$. De cette façon on voit que:

$$\gamma \in W_\sigma(G[H]) \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon(r_\gamma) = \pi\ .$$

Soit maintenant $G \in \mathcal{R}$ et $x \in X_G$. On veut montrer que le jeu $Q_x.G[x]$, $Q \in \{\mu, \nu\}$, appartient à la classe $\mathcal{R}$. Cela est évident si l'on se représente G comme $G\langle A, \beta \rangle$. Supposons que $G \neq x$, on peut analyser aisément le cas $G = x$ à part. Alors $Q_x.G[x]$ est de la forme $G\langle C, \delta \rangle$ où:

- $C_0 \ = \ A_0$.
- $C_1 \ = \ (A_1 \setminus \{P(x) \to x\}) \cup \{x \to a_0\}$, où $P(x)$ est le prédécesseur de x dans l'arbre A.
- la racine de C est x.

- $\delta(a) = \beta(a)$ si $a \neq P(x)$ et $\delta(P(x)) = \beta(P(x)) \cup \{x\}$.

On peut s'amuser à montrer que $Q_x.G[x]$ est un arbre avec retours en utilisant la caractérisation par les chemins simples. Pour tout sommet $g \in G_0$ soit $\tau_g : g_0 \to^* g$ l'unique chemin simple dans G. Si $x \neq g$, alors $\tau' = x \to g_0 \xrightarrow{\tau_g} g$ est un chemin simple de x vers g, car x n'est pas à l'intérieur de τ_g étant donné que x n'a pas de successeurs dans G. De plus il est l'unique chemin simple de x vers g, car si τ' est un autre chemin simple, alors $x \to g_0 \xrightarrow{\tilde{\tau}} g$ pour un chemin simple $\tilde{\tau} : g_0 \to^* g$ de G et donc $\tilde{\tau} = \tau_g$. Si $g = x$ alors l'unique chemin simple est le chemin identité. On a que:

$$R(\,Q_x.G[x]\,) \quad = \quad R(\,G\,) \cup \{x\}\ .$$

En effet soit $r \in R(\,Q_x.G[x]\,)$ et supposons que $r \neq x$. On a un diagramme:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & g_0 \arrow[d, "\tau_r"] \\ g' \arrow[r] & r \end{tikzcd}$$

où τ_r est un chemin simple de G, σ est un chemin simple de $Q_x.G[x]$ et r est sur le chemin σ. Cela entraîne que $\sigma \neq Id$ et $g' \neq x$; σ est donc le chemin simple $x \to g_0 \xrightarrow{\tau_{g'}} g'$, où $\tau_{g'}$ est le chemin simple de G associé au sommet g'; il en découle que r est un retour dans $R(\,G\,)$. Évidemment tout retour de G est un retour de $Q_x.G[x]$ en raison du diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] & g_0 \arrow[d, "\tau_{g'}"] \arrow[dr, "\tau_g"] & \\ & g' \arrow[r] & g\ . \end{tikzcd}$$

Montrons que x est un retour. Soit $\tau_x : g_0 \to^* x$ le chemin simple de G. On obtient:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d] \arrow[dr, "Id"] & \\ g_0 \arrow[r, "\tau_x"] & x \end{tikzcd}$$

et il suffit de voir que si $x \to g_0 \xrightarrow{\tau_x} x = x \xrightarrow{\sigma} P(x) \to x$, alors σ est un chemin simple de x vers $P(x)$.

Il devient évident que pour tout retour $r \in R(\,Q_x.G[x]\,)$ il existe un unique successeur si l'on utilise la définition de $Q_x.G[x]$; il devient évident qu'on obtient une unique arête à l'arrière si l'on se représente $Q_x.G[x]$ à l'aide du couple $\langle C, \delta \rangle$.

Enfin, on peut observer qu'un chemin infini γ de $Q_x.G[x]$ est éventuellement un chemin infini de G si et seulement si $r_\gamma \neq x$ et, à l'aide de cette observation et de la représentation de $Q_x.G[x]$ par $\langle C, \delta \rangle$, on peut établir que:

$$\gamma \in W_\sigma(Q_x.G[x]) \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon(r_\gamma) = \pi\ .$$

$\square$

Définition 3.2.6 Soit G un arbre avec retours. Définissons:

$$\chi(\,G\,) \quad = \quad (\ \mathrm{card}\, R(\,G\,)\ ,\ \mathrm{card}\, G_0\ )\ .$$

On a que $\chi(\,G\,) \in \mathbb{N}^2$, le double produit cartésien de l'ensemble des nombres naturels, sur lequel nous imposons l'ordre lexicographique:

$$(n_1, n_2) \quad \leq \quad (m_1, m_2) \quad \Leftrightarrow \quad n_1 \leq m_1 \text{ et } (\,n_1 = m_1 \ \Rightarrow\ n_2 \leq m_2\,)\ .$$

Puisque l'ensemble des entiers est bien ordonné à l'aide de l'ordre usuel, l'ensemble $\mathbb{N}^2$ avec l'ordre lexicographique est aussi bien ordonné. On peut donc utiliser cet ordre et donner des preuves par induction sur $\chi(\,G\,)$.

Proposition 3.2.7 Soit $G \in \mathcal{R}$. On a que::

- Si $\chi(\,G\,) = (0, 1)$, alors $G \in \{x, \top, \bot\}$ selon que $\epsilon g_0 = 0, \pi, \sigma$.
- Si $\chi(\,G\,) > (0, 1)$ et $g_0 \notin R(\,G\,)$, alors il existe un ensemble fini I, unique à isomorphisme près, et une famille $\{H_i\}_{i \in I}$, unique à isomorphisme près, où les $H_i \in \mathcal{R}$, tels que:
  - $\chi(\,H_i\,) < \chi(\,G\,)$,
  - $G = \mathrm{OP}_I H_i$, où $\mathrm{OP} \in \{\bigwedge, \bigvee\}$ selon que $\epsilon g_0 = \pi$ ou $\epsilon g_0 = \sigma$.

- Si $\chi(G) > (0,1)$ et $g_0 \in R(G)$, alors il existe $H \in \mathcal{R}$ et $x \in X_H$, uniques à isomorphisme près, tels que:
  - $\chi(H) < \chi(G)$,
  - $G = Q_x.H[x]$, où $Q \in \{\mu, \nu\}$ selon que $\epsilon g_0 = \sigma$ où $\epsilon g_0 = \pi$.

Corollaire 3.2.8 La classe $\mathcal{R}$ est engendrée par les opérations $x, \bigvee_I, \bigwedge_I, \mu, \nu$. Donc:

$$\mathcal{J} \;=\; \mathcal{R}\,.$$

Preuve. (Corollaire 3.2.8). Si $\mathcal{X}$ est une classe fermée, alors elle contient $\mathcal{R}$ et donc $\mathcal{J}$ contient $\mathcal{R}$. Mais on a vu que $\mathcal{R}$ est fermée et donc $\mathcal{J} = \mathcal{R}$. □

Preuve. (Proposition 3.2.7). Posons $G = G\langle A, \beta\rangle$ La proposition est évidente pour le cas où $\chi(G) = (0,1)$. Supposons donc que $\chi(G) > (0,1)$.

Supposons d'abord que g_0 n'est pas un retour et soit I l'ensemble des successeurs de g_0. Pour $i \in I$, soit A_i le sous-arbre de A de racine i et soit β_i la restriction de β à $A_{i,0}$. Alors $\beta_i : A_{i,0} \longrightarrow P(A_{i,0})$: soient a un ancêtre de i et $r \in \beta(a)$, si r n'est pas un ancêtre de i alors $r = g_0$, contrairement à nos hypothèses. Donc $H_i = \langle A_i, \beta_i\rangle$ est un arbre avec retours, de plus $\chi(H_i) < \chi(G)$, car $\operatorname{card} R(G) \leq \operatorname{card} R(H_i)$ et $\operatorname{card} H_{i,0} < \operatorname{card} G_0$. Évidemment:

$$G \;=\; \mathrm{OP}_I H_i\,,$$

où $\mathrm{OP} \in \{\bigwedge, \bigvee\}$ selon que $\epsilon g_0 = \pi$ ou $\epsilon g_0 = \sigma$.

Supposons maintenant que g_0 est un retour. Dans ce cas g_0 a un seul prédécesseur $P(g_0)$ et un seul successeur $S(g_0)$. Soit $\langle C, \delta\rangle$ l'arbre avec retours défini de la façon suivante:

- $C_0 \;=\; A_0$.
- $C_1 \;=\; (A_1 \setminus \{g_0 \to S(g_0)) \cup \{P(g_0) \to g_0\}$.
- $\delta(a) = \beta(a)$ si $a \neq P(g_0)$ et $\delta(P(g_0)) = \beta(P(g_0)) \setminus \{g_0\}$.

Soit $H = G\langle C, \delta \rangle$, en tant que graphe, est un sous-graphe de G, et si l'on pose $\epsilon' g = \epsilon g$ si $g \neq g_0$ et $\epsilon' g_0 = 0$, on a que $g_0 \in X_H$ et:

$$G \quad = \quad Q_{g_0}.H[g_0] \ ,$$

où $Q \in \{\mu, \nu\}$ selon que $\epsilon g_0 = \sigma$ ou $\epsilon g_0 = \pi$. De plus $\chi(H) < \chi(G)$ car $R(H) = R(G) - 1$. $\square$

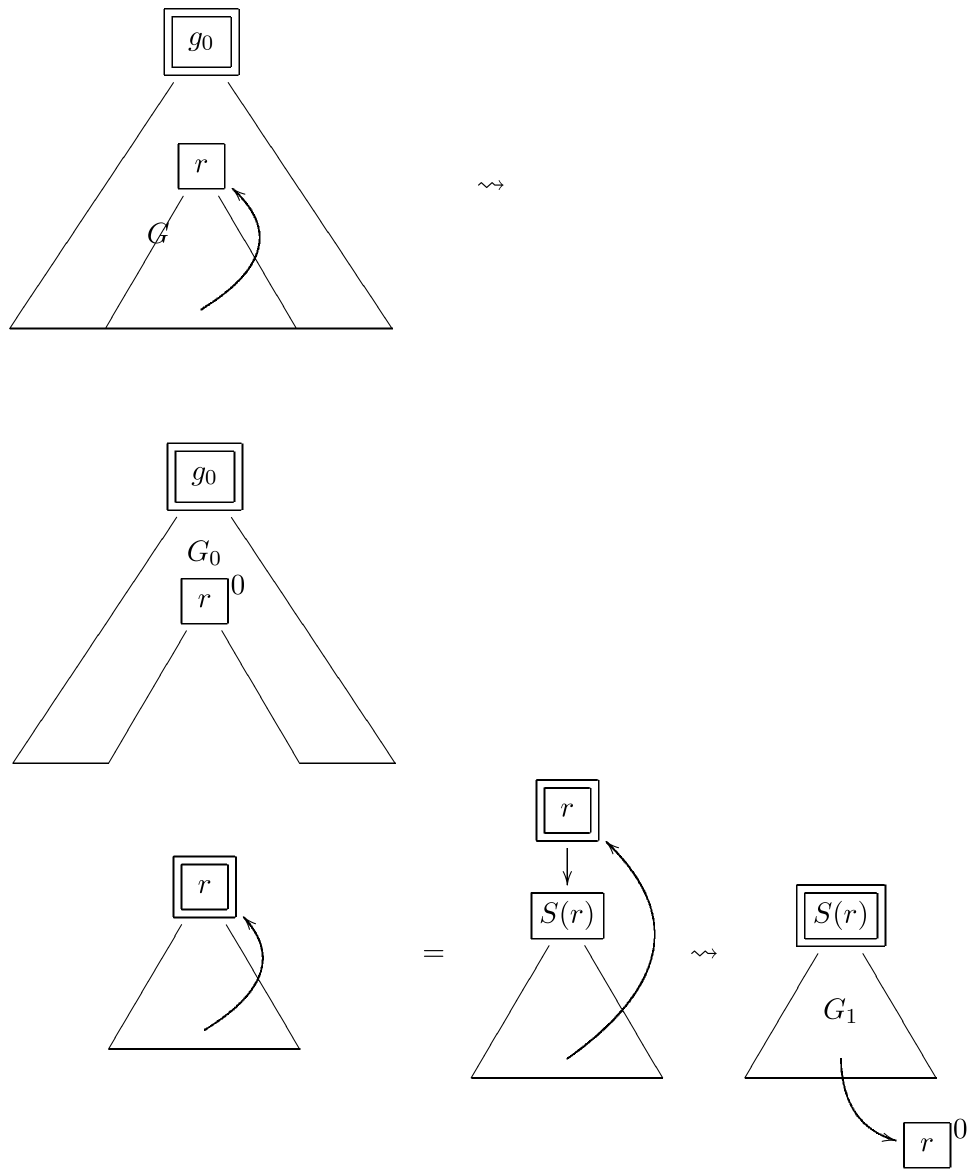
Remarque 3.2.9 Soient $G_0[x], G_1[y]$ deux jeux de la classe $\mathcal{J}$. Dans le jeu:

$$G \quad = \quad G_0[\, x = Q_y.G_1[y] \,]$$

le sommet y, vu comme un sommet de l'arbre avec retours de G, est un sommet complet, à savoir pour tout ancêtre a de y et tout retour $r \in \beta(a)$, r est aussi un ancêtre de y. Par contre, soit $G \in \mathcal{J}$ et supposons que $R(G) \neq \emptyset$. Si $r \in R(G)$ est un retour de hauteur minimale alors r est un sommet complet et on peut se représenter G comme $G_0[\, r = Q_r.G_1[r] \,]$. Il est clair que l'on a:

$$\max(\, \chi(G_0) \, , \, \chi(G_1) \,) < \chi(G) \ ,$$

car le nombre de retours dans tous les jeux G_0 et G_1 est strictement plus petit. On peut dessiner la situation comme il suit:



Dans la suite, si G est un jeu de la classe $\mathcal{J}$ et $r \in R(G)$ est un retour, nous allons dire que r est un μ-retour si $\epsilon(r) = \sigma$ et que r est un ν-retour si $\epsilon(r) = \pi$.

3.3 Décidabilité de la relation d'ordre de la classe $\mathcal{J}(P)$

Définition 3.3.1 Un *jeu de Muller* est un jeu $\langle G, g_0, \epsilon, W_\sigma \rangle$ pour lequel il existe un tableau $\mathcal{F} \subseteq P(G_0)$ tel que:

$$\gamma \in W_\sigma \text{ si et seulement si } \mathrm{In}_0(\gamma) \in \mathcal{F} ,$$

où $\mathrm{In}_0(\gamma) = \{ g \in G_0 \mid \mathrm{card}\,\{ n \mid \gamma(n) = g \} = \infty \}$.

Rappelons qu'un jeu de Muller fini est un jeu de Rabin à chaîne si et seulement si le tableau $\mathcal{F}$ satisfait $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ entraîne $\alpha \cup \beta \in \mathcal{F}$ et de plus une telle propriété est aussi vraie pour le tableau complémentaire $\mathcal{F}^c$. Nous allons généraliser la notion de jeu de Muller de cette façon:

Définition 3.3.2 Un jeu $\langle G, g_0, \epsilon, W_\sigma \rangle$ est définissable à la Muller par les mouvements si et seulement s'il existe un tableau $\mathcal{F} \subseteq P(G_1)$ tel que:

$$\gamma \in W_\sigma \text{ si et seulement si } \mathrm{In}_1(\gamma) \in \mathcal{F} ,$$

où $\mathrm{In}_1(\gamma) = \{ g \to g' \in G_1 \mid \mathrm{card}\,\{ n \mid \gamma(n \to n+1) = g \to g' \} = \infty \}$.

Proposition 3.3.3 Soient $G, H \in \mathcal{J}(P)$ deux jeux sur P. Le jeu $\langle G, H \rangle$ est définissable à la Muller par les mouvements.

Preuve. Chaque mouvement de $\langle G, H \rangle$ a une unique forme $(g, h) \to (g', h)$ pour un mouvement $g \to g'$ de G ou $(g, h) \to (g, h')$ pour un mouvement $h \to h'$ de H. Soit $\alpha \subseteq \langle G, H \rangle_1$ et définissons α_G par:

$$\alpha_G = \{ g \to g' \mid \exists h \in H_0 \text{ tel que } (g, h) \to (g', h) \in \alpha \} .$$

Définissons aussi α_H de façon semblable.

Un chemin infini γ dans $\langle G, H \rangle$ satisfait la relation $\mathrm{In}_1(\gamma)_G = \mathrm{In}_1(\gamma_G)$, où γ_G est la projection de ce chemin sur G; une relation similaire est vraie pour γ et γ_H. On peut aussi observer que $\gamma_G \in W_\pi(G)$ si et seulement si l'ensemble $X = \mathrm{In}_1(\gamma_G)$ satisfait la condition:

$$\begin{aligned}&\textit{il existe un retour } r \textit{ tel que } \epsilon(r) = \sigma, \textit{ le mouvement } r \to S(r) \in X \textit{ et } r \textit{ est}\\ &\textit{de hauteur minimale entre les retours } r' \textit{ tels que } r' \to S(r') \in X.\end{aligned} \tag{3.1}$$

De même $\gamma_H \in W_\sigma(H)$ si et seulement si l'ensemble $X = \mathrm{In}_1(\gamma_H)$ satisfait la condition:

$$\begin{aligned}&\textit{il existe un retour } r \textit{ tel que } \epsilon(r) = \pi, \textit{ le mouvement } r \to S(r) \in X \textit{ et } r \textit{ est}\\ &\textit{de hauteur minimale entre les retours } r' \textit{ tels que } r' \to S(r') \in X.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Il devient clair qu'on peut définir $\mathcal{F} \subseteq P(\,\langle G, H\rangle_1\,)$ par:

$$\alpha \in \mathcal{F} \ \text{ si et seulement si } \ \alpha_G \text{ satisfait 3.1 ou } \alpha_H \text{ satisfait 3.2 .}$$

$\square$

Proposition 3.3.4 Soit $G = \langle G_0, G_1, g_0, \epsilon, W_\sigma\rangle$ un jeu définissable à la Muller par les mouvements. Supposons que tous les ensembles $\{\ \tau \in G_1 \mid \mathrm{cod}(\tau) = g\ \}$ sont finis. Il existe alors un revêtement fini surjectif $p : K \longrightarrow G$ tel que le jeu $\langle K, \epsilon \circ p, p^{-1}(W_\sigma)\rangle$ est un jeu de Muller.

Preuve. Pour tout $g \in G_0$ définissons:

$$K(g) = \begin{cases} \{\,\tau \in G_1 \,|\, \mathrm{cod}(\tau) = g\,\}\ , & \text{si cet ensemble n'est pas vide ,} \\ \{*\}\ , & \text{sinon .}\end{cases}$$

Les positions de K sont les couples (x, g) avec $g \in G_0$ et $x \in K(g)$; les mouvements de K sont de la forme $(x, g) \to (g \to g', g')$ pour des mouvements $g \to g'$ de G, pour tout $x \in K(g)$; essentiellement il s'agit de se rappeler le dernier mouvement joué dans G.

Le morphisme de graphes défini par:

$$\begin{aligned} p_2(x, g) &= g\ , \\ p_2(\ (x, g) \to (g \to g', g')\ ) &= g \to g'\ , \end{aligned}$$

est un revêtement surjectif fini de G. Soit $\mathcal{F}_1 \subseteq P(G_1)$ le tableau donné pour G et définissons $\mathcal{F}_0 \subseteq P(K_0)$ de la façon suivante:

$$\alpha \in \mathcal{F}_0 \ \text{ si et seulement si } \ p_1(\alpha) \in \mathcal{F}_1\ .$$

Ici $p_1 : K_0 \longrightarrow G_1$ est la fonction partielle définie par $p_1(x, g') = x$ si $x \in G_1$ et elle est étendue aux sous-ensembles de K_0 de la façon usuelle:

$$p_1(\alpha) \quad = \quad \{ \, x \in G_1 \mid (x, g) \in \alpha \, \} \, .$$

Considérons un chemin infini γ dans K. On a que:

$$\begin{aligned} \mathrm{In}_0(\gamma) \in \mathcal{F}_0 \quad &\Leftrightarrow \quad p_1(\,\mathrm{In}_0(\gamma)\,) \in \mathcal{F}_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{In}_1(p_2 \circ \gamma) \in \mathcal{F}_1 \end{aligned}$$

à cause de la relation:

$$p_1(\,\mathrm{In}_0(\gamma)\,) \quad = \quad \mathrm{In}_1(p_2 \circ \gamma)$$

et donc $\mathrm{In}_0(\gamma) \in \mathcal{F}_0$ si et seulement si $p \circ \gamma \in W_\sigma(G)$. $\square$

Les considérations précédentes mènent à la proposition suivante:

Théorème 3.3.5 Soient $G, H \in \mathcal{J}(P)$ deux jeux sur P et supposons que la relation d'ordre dans P est décidable. On peut construire de façon effective un revêtement fini $p : K \longrightarrow \langle G, H \rangle$ tel que la structure de jeu induite par p sur K est celle d'un jeu de Rabin à chaîne. On peut donc décider d'une façon effective s'il existe une stratégie gagnante pour le joueur σ dans le jeu $\langle G, H \rangle$.

Preuve. Soient $G, H \in \mathcal{J}(P)$ deux jeux sur P. Puisque la relation d'ordre de P est décidable, on peut effectivement construire le jeu $\langle G, H \rangle$. Une analyse de la proposition 3.3.4 montre qu'on peut effectivement construire le revêtement fini $p : K \longrightarrow \langle G, H \rangle$ tel que K est un jeu de Muller. Aussi, on sait (Thomas, 1997) qu'étant donné un jeu de Muller K on peut effectivement construire un revêtement fini $p' : K' \longrightarrow K$ de façon telle que K' est un jeu de Rabin à chaîne, ou jeu de parité. En composant p et p' on peut donc construire effectivement un revêtement K' du jeu $\langle G, H \rangle$ tel que K' est un jeu de Rabin à chaîne.

À l'aide de la formule de point fixe de (Emerson et Jutla, 1991; Walukiewicz, 1996), que nous avons démontrée en A.3, on peut calculer effectivement l'ensemble WP_σ des positions gagnantes pour σ dans le jeu K' et calculer si $(p \circ p')^{-1}(g_0, h_0) \cap WP_\sigma = \emptyset$. En particulier, $G \vdash H$ si et seulement si cette relation est fausse. $\square$

CHAPITRE IV

LE μ-TREILLIS $\mathcal{J}_P$ EST LIBRE SUR L'ENSEMBLE ORDONNÉ P

Dans le chapitre 2 nous avons montré que, étant donné une classe fermée et juste $\mathcal{X}$ de jeux partiels et un ensemble ordonné P, on peut construire un μ-treillis $\mathcal{X}_P$ comme le quotient antisymétrique d'une classe préordonné $\mathcal{X}(P)$ de jeux à utilité dans P. Le cas le plus intéressant est celui de la plus petite classe fermée $\mathcal{J}$, dont nous avons étudié les propriétés combinatoires dans le chapitre 3 et démontré aussi la décidabilité du préordre de $\mathcal{J}(P)$.

Le but de ce chapitre est de montrer que le μ-treillis $\mathcal{J}_P$ est libre sur l'ensemble P. Pour tout ensemble ordonné P nous allons définir un opérateur

$$\eta_P : P \longrightarrow \mathcal{J}_P$$

et il faudra montrer que le couple $\langle \eta_P, \mathcal{J}_P \rangle$ possède la propriété universelle suivante:

soient L un μ-treillis et $f : P \longrightarrow L$ un opérateur. Il existe un unique morphisme de μ-treillis $\tilde{f} : \mathcal{J}_P \longrightarrow L$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\eta_P"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{J}_P \arrow[dl, dotted, "\tilde{f}"] \\ L & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

La stratégie utilisée pour démontrer cette proposition est la suivante: nous allons montrer qu'on peut étendre la définition de $\mathcal{J}$ aux opérateurs $f : P \longrightarrow Q$ en obtenant des morphismes de μ-treillis $\mathcal{J}_f : \mathcal{J}_P \longrightarrow \mathcal{J}_Q$. Cette construction donne un foncteur

$$\mathcal{J} : \mathcal{O} \longrightarrow \mu\mathcal{T}$$

de la catégorie des ensembles ordonnés à la catégorie des μ-treillis et, par rapport à ce foncteur, η est une transformation naturelle, c'est-à-dire que pour tout opérateur $f : P \longrightarrow Q$ le diagramme

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\eta_P"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{J}_P \arrow[d, "\mathcal{J}_f"] \\ Q \arrow[r, "\eta_Q"] & \mathcal{J}_Q \end{tikzcd}$$

est commutatif. Enfin nous allons montrer que le μ-treillis est engendré par P.

Avec ces résultats, on peut montrer que $\mathcal{J}_P$ est le μ-treillis libre sur l'ensemble P de la façon suivante. Nous définissons une fonction $EV : \mathcal{J}(L) \longrightarrow L$, pour tout μ-treillis L, et montrons que si cette fonction est bien définie sur les classes d'équivalence de $\mathcal{J}(L)$, alors elle induit un morphisme de μ-treillis $EV_L : \mathcal{J}_L \longrightarrow L$; par conséquent EV est bien définie sur les classes d'équivalence si et seulement si EV préserve le préordre de $\mathcal{J}(L)$. En supposant que EV_L est bien définie on observe enfin que:

$$EV_L \circ \eta_L \quad = \quad Id_L \; .$$

Si L est un μ-treillis et $f : P \longrightarrow L$ est un opérateur, alors le composé

$$\tilde{f} : \mathcal{J}_P \xrightarrow{\mathcal{J}_f} \mathcal{J}_L \xrightarrow{EV_L} L$$

est un morphisme de μ-treillis, avec la propriété que $\tilde{f} \circ \eta_P = f$. Cela est vrai par naturalité de η et par la relation $EV_L \circ \eta_L = Id_L$:

$$\begin{aligned} (EV_L \circ \mathcal{J}_f) \circ \eta_P &= EV_L \circ \eta_L \circ f \\ &= Id_L \circ f \\ &= f \; . \end{aligned}$$

Ce morphisme est aussi l'unique morphisme $f' : \mathcal{J}_P \longrightarrow L$ tel que $f' \circ \eta_P = f$, car $\mathcal{J}_P$ est engendré par P. Donc le μ-treillis $\mathcal{J}_P$ est libre sur l'ensemble ordonné P.

Le problème principal sera de montrer que la fonction EV préserve l'ordre: si $G, H \in \mathcal{J}(L)$ et $G \vdash H$, alors $EV(G) \leq EV(H)$.

4.1 Le foncteur $\mathcal{J}$

Définition 4.1.1 Soit P un ensemble ordonné. Définissons $\eta : P \longrightarrow \mathcal{J}(P)$ par:

$$\eta(p) \;=\; \langle x, \lambda^p \rangle \;,$$

où $\lambda^p : \{x\} = X_x \longrightarrow P$ est défini par:

$$\lambda^p(x) \;=\; p \;.$$

Définissons $\eta_P : P \longrightarrow \mathcal{J}_P$ par:

$$\eta_P(p) \;=\; [\,\eta(p)\,] \;.$$

Lemme 4.1.2 La fonction $\eta_P : P \longrightarrow \mathcal{J}_P$ préserve l'ordre.

Preuve. Soient $p_1, p_2 \in P$ tels que $p_1 \leq p_2$. Le jeu $\langle \eta(p_1), \eta(p_2) \rangle$ est le jeu avec une seule position g_0 telle que $\epsilon g_0 = \pi$. $\square$

Lemme 4.1.3 Soit $f : P \longrightarrow Q$ un opérateur et définissons la fonction $\mathcal{J}(f) : \mathcal{J}(P) \longrightarrow \mathcal{J}(Q)$ par la relation:

$$\mathcal{J}(f)\langle G, \lambda \rangle \;=\; \langle G, f \circ \lambda \rangle \;.$$

Cette fonction préserve l'ordre.

Preuve. Supposons qu'il existe une stratégie gagnante S pour le joueur σ dans le jeu $\langle \langle G, \lambda_G \rangle, \langle H, \lambda_H \rangle \rangle$. Alors σ peut jouer dans le jeu $\langle \langle G, f \circ \lambda_G \rangle, \langle H, f \circ \lambda_H \rangle \rangle$ de la même façon, car la seule chose qui change dans les deux jeux est la couleur des couples (x, y) avec $x \in X_G$ et $y \in X_H$. Si l'on atteint un tel couple à l'aide de la stratégie S, alors on a que $\lambda_G(x) \leq \lambda_H(y)$ et donc $f \circ \lambda_G(x) \leq f \circ \lambda_H(y)$. $\square$

Lemme 4.1.4 On peut associer à tout $\phi \in \mathcal{A}$ tel que $a(\phi) = n$ un couple (G_ϕ, ψ_ϕ) où $G_\phi \in \mathcal{J}$ et $\psi_\phi : n \xrightarrow{\cong} X_{G_\phi}$ est une bijection. Pour tout ensemble ordonné P et pour tout vecteur $(H_1, \ldots, H_n)$ de jeux de $\mathcal{J}(P)$ ce couple satisfait:

$$|\phi|(\,[H_1], \ldots, [H_n]\,) \;=\; [\,G_\phi[\psi_\phi(i) = H_i]\,]\,.$$

Preuve. Par induction sur la structure des termes dans $\mathcal{A}$. Si $\phi = \bigwedge_n$, alors $G_\phi = \bigwedge_n$ et $\psi_\phi = Id_n$. De même, $G_{\bigvee_n} = \bigvee_n$ et $\psi_{\bigvee_n} = Id_n$. Soit $\phi \in \mathcal{A}$ tel que $a(\phi) = n$ et soient $\phi_i \in \mathcal{A}$ tels que $a(\phi_i) = k_i$ pour $i = 1, \ldots, n$; supposons qu'on a défini (G_ϕ, ψ_ϕ) et les $(G_{\phi_i}, \psi_{\phi_i})$. En observant que $X_{G_{\phi\circ(\phi_1,\ldots,\phi_n)}} = \sum_{i=1,\ldots,n} X_{G_{\phi_i}}$, posons:

$$\begin{aligned}
G_{\phi\circ(\phi_1,\ldots,\phi_n)} &= G_\phi[\psi(i) = G_{\phi_i}]\,, \\
\psi_{\phi\circ(\phi_1,\ldots,\phi_n)} &= \sum_{i=1,\ldots,n} \psi_{\phi_i} : \sum_{i=1,\ldots,n} k_i \longrightarrow \sum_{i=1,\ldots,n} X_{G_{\phi_i}}\,.
\end{aligned}$$

Soit dans la suite $\psi = \psi_{\phi\circ(\phi_1,\ldots,\phi_n)}$ et dénotons par (i, j), où $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $j \in \{1, \ldots, k_i\}$, un élément de l'ensemble $k = \sum_{i=1,\ldots,n} k_i$. On obtient les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
|\phi\circ(\phi_1,\ldots,\phi_n)|(\,[H_1], \ldots, [H_k]\,) &= |\phi|(\ldots, |\phi_i|(\ldots, [H_{(i,j)}], \ldots), \ldots) \\
&= |\phi|(\ldots, [\,G_{\phi_i}[\psi_{\phi_i}(j) = H_{(i,j)}]\,], \ldots) \\
&= [\,G_\phi[\,\psi_\phi(i) = G_{\phi_i}[\psi_{\phi_i}(j) = H_{(i,j)}]\,]\,] \\
&= [\,(G_\phi[\psi_\phi(i) = G_{\phi_i}])[\psi_{\phi_i}(j) = H_{(i,j)}]\,] \\
&= [\,G_{\phi\circ(\phi_1,\ldots,\phi_n)}[\psi_{\phi_i}(j) = H_{(i,j)}]\,] \\
&= [\,G_{\phi\circ(\phi_1,\ldots,\phi_n)}[\psi(i,j) = H_{(i,j)}]\,]\,.
\end{aligned}$$

Enfin, soit $\phi \in \mathcal{A}$ tel que $a(\phi) = n + 1$ et soit $s \in \{1, \ldots, n\}$. Soit (G_ϕ, ψ_ϕ) le couple satisfaisant les hypothèse du lemme; en observant que $X_{\mu_{\psi_\phi(s)}.G_\phi[\psi_\phi(s)]} = X_G \setminus \psi_\phi(s)$, posons:

$$\begin{aligned}
G_{\mu_s.\phi} &= \mu_{\psi_\phi(s)}.G_\phi[\psi_\phi(s)]\,, \\
\psi_{\mu_s.\phi} &= \psi_\phi \circ \epsilon^s : n \xrightarrow{\cong} X_G \setminus \{\psi_\phi(s)\}\,.
\end{aligned}$$

Soit dans la suite $\psi = \psi_{\mu_s.\phi}$, on obtient les relations suivantes:

$$|\mu_s.\phi|([H_1], \ldots, [H_n]) \;=\; \mu_Z.|\phi|([H_1], \ldots, [H_{s-1}], Z, [H_s], \ldots, [H_n])$$

$$\begin{aligned}
&= \mu_Z.[\ G_\phi[\psi(i) = H_i][\psi_\phi(s)]\ ] \\
&= [\ \mu_{\psi_\phi(s)}.G_\phi[\psi(i) = H_i][\psi_\phi(s)]\ ] \\
&= [\ (\mu_{\psi_\phi(s)}.G_\phi[\psi_\phi(s)])[\psi(i) = H_i]\ ] \\
&= [\ G_{\mu_s.\phi}[\psi(i) = H_i]\ ]\ .
\end{aligned}$$

On définit $G_{\nu_s.\phi}$ et $\psi_{\nu_s.\phi}$ de façon similaire. □

Proposition 4.1.5 Soit $f : P \longrightarrow Q$ un opérateur et définissons l'opérateur

$$\mathcal{J}_f : \mathcal{J}_P \longrightarrow \mathcal{J}_Q$$

par la relation:

$$\mathcal{J}_f[G] \ = \ [\ \mathcal{J}(f)(\ G\ )\ ]\ .$$

L'opérateur $\mathcal{J}_f$ est un morphisme de μ-treillis et $\mathcal{J}$ est un foncteur de la catégorie des ensembles ordonnés vers la catégorie des μ-treillis.

Preuve. Soit $\phi \in \mathcal{A}$ tel que $a(\phi) = n$. Puisque la définition du couple (G_ϕ, ψ_ϕ) ne dépend pas de l'ensemble ordonné P, on voit que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_f(\ |\phi|(\ [H_1], \ldots, [H_n]\ )\ ) &= \mathcal{J}_f[\ G_\phi[\psi_\phi(i) = \langle H_i, \lambda_{H_i}\rangle]\ ] \\
&= [\ \mathcal{J}(f)(\ G_\phi[\psi_\phi(i) = \langle H_i, \lambda_{H_i}\rangle]\ )\ ] \\
&= [\ G_\phi[\psi_\phi(i) = \langle H_i, f \circ \lambda_{H_i}\rangle]\ ] \\
&= [\ G_\phi[\psi_\phi(i) = \mathcal{J}(f)(H_i)]\ ] \\
&= |\phi|(\ [\mathcal{J}(f)(H_1)], \ldots, [\mathcal{J}(f)(H_n)]\ ) \\
&= |\phi|(\ \mathcal{J}_f[H_1], \ldots, \mathcal{J}_f[H_n]\ )\ .
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{J}_f$ est un morphisme de μ-treillis. Si $f : P \longrightarrow Q$ et $g : Q \longrightarrow M$, on voit que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(g \circ f)\langle H, \lambda\rangle &= \langle H, g \circ f \circ \lambda\rangle \\
&= \mathcal{J}(g)\langle H, f \circ \lambda\rangle \\
&= \mathcal{J}(g)(\ \mathcal{J}(f)\langle H, \lambda\rangle\ ) \\
&= \mathcal{J}(g) \circ \mathcal{J}(f)\ \langle H, \lambda\rangle\ .
\end{aligned}$$

De façon semblable on montre que $\mathcal{J}(Id_P) = Id_{\mathcal{J}_P}$, ce qui entraîne que $\mathcal{J}$ est un foncteur. $\square$

Dans la suite soit

$$U : \mu\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{O}$$

le foncteur oubliant de la catégorie des μ-treillis vers la catégorie des ensembles ordonnés.

Proposition 4.1.6 La collection $\{\eta_P : P \longrightarrow U(\mathcal{J}_P)\}_{P \in Obj(\mathcal{O})}$ est une transformation naturelle

$$\eta : 1_{\mathcal{O}} \longrightarrow U \circ \mathcal{J} \ ,$$

où $1_{\mathcal{O}}$ est le foncteur identité de la catégorie des ensembles ordonnés.

Preuve. Soit $f : P \longrightarrow Q$, on a alors que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_f \circ \eta_P(p) &= \mathcal{J}_f[\eta(p)] \\
&= \mathcal{J}_f[x, \lambda^p] \\
&= [x, f \circ \lambda^p] \\
&= [x, \lambda^{f(p)}] \\
&= [\eta(f(p))] \\
&= (\eta_Q \circ f)(p) \ ,
\end{aligned}$$

car évidemment $f \circ \lambda^p = \lambda^{f(p)}$. $\square$

Proposition 4.1.7 Pour tout jeu partiel $G \in \mathcal{J}$, il existe un couple (ϕ_G, ψ_G), où $\phi_G \in \mathcal{A}$ est tel que $a(\phi_G) = n = \operatorname{card} X_G$ et $\psi_G : n \xrightarrow{\cong} X_G$ est une bijection, tel que, pour tout ensemble ordonné P et tout vecteur $(H_1, \ldots, H_n) \in \mathcal{J}(P)^n$, on a que:

$$[\ G[\psi_G(i) = H_i]\ ] \ = \ |\phi_G|([H_1], \ldots, [H_n]) \ .$$

Preuve. Par induction sur la structure de G.

Supposons que $G = x$, alors $(\phi_x, \psi_x) = (\bigwedge_1, \psi)$, où $\psi : \{1\} \longrightarrow \{x\}$ est tel que $\psi(1) = x$.

Supposons que $G = \mathrm{OP}_{i \in I} H_i$, où $\mathrm{OP} \in \{\bigwedge, \bigvee\}$ et les H_i sont tels que $\chi(H_i) < \chi(G)$. Soit $n = \mathrm{card}\, I$ et choisissons une bijection $\psi : n \xrightarrow{\cong} I$; soient $k_i = \mathrm{card}\, X_{H_i}$ et soient (ϕ_{H_i}, ψ_{H_i}) donnés avec la propriété désirée. Posons $\phi_G = \mathrm{OP}_n \circ (\phi_{\psi(1)}, \ldots, \phi_{\psi(n)})$ et construisons la bijection $\psi_G = \sum_{l=1,\ldots,n} \psi_{H_{\psi(l)}}$ à l'aide du produit fibré suivant:

$$\begin{tikzcd} \sum\limits_{l=1,\ldots,n} k_l \arrow[r, "\sum_{l=1,\ldots,n} \psi_{H_{\psi(l)}}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \sum\limits_{i \in I} X_{H_i} \arrow[d] \\ n \arrow[r, "\psi"] & I \end{tikzcd} .$$

Dans les équations suivantes nous dénotons par (l, j), où $l \in \{1, \ldots, n\}$ et $j \in \{1, \ldots, k_l\}$, un élément de l'ensemble $k = \sum_{l=1,\ldots,n} k_l$. On a que:

$$\begin{aligned} [\, \mathrm{OP}_{i \in I}\ H_i[\psi_G(l,j) = K_{l,j}]\,] &= \mathrm{OP}_{i \in I}\ [\, H_i[\psi_G(l,j) = K_{l,j}]\,] \\ &= \mathrm{OP}_n(\ldots, [\, H_{\psi(l)}[\psi_G(l,j) = K_{l,j}]\,], \ldots) \\ &= \mathrm{OP}_n(\ldots, [\, H_{\psi(l)}[\psi_{H_{\psi(l)}}(j) = K_{l,j}]\,], \ldots) \\ &= \mathrm{OP}_n(\ldots, \phi_{H_{\psi(l)}}(\ldots, [K_{l,j}], \ldots), \ldots) \\ &= \mathrm{OP}_n \circ (\ldots, \phi_{\psi(l)}, \ldots)\, (\ldots, [K_{l,j}], \ldots)\ . \end{aligned}$$

Supposons enfin que $G = Q_x.H[x]$, où $Q \in \{\mu, \nu\}$ et H est tel que $\chi(H) < \chi(G)$. Soit $n = \mathrm{card}\, X_G$, alors $\mathrm{card}\, X_H = n + 1$ et par hypothèse d'induction il existe un couple (ϕ_H, ψ_H), où $\phi_H \in \mathcal{A}$ est tel que $a(\phi) = n + 1$ et $\psi_H : n + 1 \xrightarrow{\cong} X_H$ est une bijection, tel que, pour tout vecteur $(K_1, \ldots, K_{n+1})$ d'éléments de $\mathcal{J}(P)$, on a que:

$$[\, H[\psi_H(i) = K_i]\,] \;=\; \phi(\ldots, [K_i], \ldots)\ .$$

Soit $s \in \{1, \ldots, n+1\}$ tel que $\psi_H(s) = x$ et soit $\epsilon^s : n \rightarrowtail n+1$ l'unique opérateur tel que $\epsilon^s(\{1, \ldots, n\}) = \{1, \ldots, n+1\} \setminus \{s\}$; $\psi_H \circ \epsilon^s : n \xrightarrow{\cong} X_G$ est alors une bijection, posons donc $\phi_G = \mu_s.\phi_H$ et $\psi_G = \psi_H \circ \epsilon^s$. On obtient que:

$$\begin{aligned} [\, G[\psi_G(i) = K_i]\,] &= [\, Q_x.H[x][\psi_G(i) = K_i]\,] \\ &= [\, Q_{\psi_H(s)}.H[\psi_H(s)][\psi_H(\epsilon^s(i)) = K_i]\,] \\ &= Q_s.\phi_H(\ldots, [K_i], \ldots)\ . \end{aligned}$$

□

Corollaire 4.1.8 Le μ-treillis $\mathcal{J}_P$ est engendré par le couple $\langle P, \eta_P \rangle$.

Preuve. Soit $\langle G, \lambda \rangle \in \mathcal{J}(P)$ et soit (ϕ_G, ψ_G) comme dans la proposition précédante. Supposons que $\mathrm{card}\, X_G = n$, pour $i = 1, \dots, n$ $\eta(\lambda(\psi_G(i)))$ est le jeu $\langle x, p \rangle$ où $p = \lambda(\psi_G(i))$. On obtient que:

$$\begin{aligned} [\, G, \lambda \,] &= [\, G[\, \psi_G(i) = \eta(\lambda(\psi_G(i)))\,]\,] \\ &= \phi_G(\; [\eta(\lambda(\psi_G(1)))], \dots, [\eta(\lambda(\psi_G(n)))]\;) \\ &= \phi_G(\; \eta_P(\lambda(\psi_G(1))), \dots, \eta_P(\lambda(\psi_G(n)))\;)\,. \end{aligned}$$

□

Proposition 4.1.9 Soit L un μ-treillis et soit $EV : \mathcal{J}(L) \longrightarrow L$ une fonction satisfaisant les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} EV(\, \eta(\, l\,)\,) &= l\,, \\ EV(\, \bigwedge_{i \in I} G_i\,) &= \bigwedge_{i \in I} EV(\, G_i\,)\,, \\ EV(\, \bigvee_{i \in I} G_i\,) &= \bigvee_{i \in I} EV(\, G_i\,)\,, \\ EV(\, \mu_x.G[x]\,) &= \mu_z.EV(\, G[z]\,)\,, \\ EV(\, \nu_x.G[x]\,) &= \nu_z.EV(\, G[z]\,)\,, \end{aligned}$$

où $EV(\, G[z]\,) : L \longrightarrow L$ est l'opérateur qui envoie $l \in L$ à $EV(\, G[\eta(l)]\,)$. Si EV préserve l'ordre, alors l'opérateur $EV_L : \mathcal{J}_L \longrightarrow L$, défini comme d'habitude par:

$$EV_L[G] = EV(G)\,,$$

est un morphisme de μ-treillis.

Preuve. Supposons que EV préserve l'ordre. Alors EV_L est un morphisme de treillis, par exemple:

$$EV_L(\, \bigwedge_{i \in I} [G_i]\,) = EV_L\, [\, \bigwedge_{i \in I} G_i\,]$$

$$
\begin{aligned}
&= EV(\ \bigwedge_{i\in I} G_i\ ) \\
&= \bigwedge_{i\in I} EV(\ G_i\ ) \\
&= \bigwedge_{i\in I} EV_L\ [G_i]\ .
\end{aligned}
$$

Soit $\phi \in \mathcal{A}$ tel que $a(\phi) = n+1$ et soit (G_ϕ, ψ_ϕ) le couple comme dans le lemme 4.1.4. Supposons que $|\phi| \circ EV_L^{n+1} = EV_L \circ |\phi|$ et soient $s \in \{1, \ldots, n+1\}$ et $(H_1, \ldots, H_n) \in \mathcal{J}(L)^n$. Enfin, définissons $\psi' : n \longrightarrow X_{G_\phi}$ par:

$$
\psi'(i) \quad = \quad \begin{cases} \psi_\phi(i)\ , & i < s\ , \\ \psi_\phi(i+1)\ , & i \geq s\ , \end{cases}
$$

et posons $x = \psi_\phi(s)$. À cause de la proposition 2.4.13 on a que:

$$
\mu_z.|\phi|([H_1], \ldots [H_{s-1}], z, [H_s], \ldots, [H_n]) \quad = \quad [\ \mu_x.(G_\phi[\psi'(i) = H_i])[x]\ ]\ .
$$

Par les hypothèses sur EV on a que:

$$
EV(\ \mu_x.(G_\phi[\psi'(i) = H_i])[x]\ ) \quad = \quad \mu_z.EV(\ G_\phi[\psi'(i) = H_i][z]\ )\ .
$$

De plus, la relation

$$
\begin{aligned}
&EV(\ G_\phi[\psi'(i) = H_i][z]\ ) \\
&\qquad = \quad |\phi|(\ EV_L[H_1], \ldots, EV_L[H_{s-1}], z, EV_L[H_s], \ldots, EV_L[H_n]\ )
\end{aligned}
$$

est vraie à cause que:

$$
\begin{aligned}
&EV(\ G_\phi[\psi'(i) = H_i][\eta(l)]\ ) \\
&\qquad = \quad EV_L(\ |\phi|([H_1], \ldots, [H_{s-1}], [\eta(l)], [H_s], \ldots, [H_n]\ ) \\
&\qquad = \quad |\phi|(\ EV_L[H_1], \ldots, EV_L[H_{s-1}], EV_L[\eta(l)], \ldots, EV_L[H_n]\ ) \\
&\qquad = \quad |\phi|(\ EV_L[H_1], \ldots, EV_L[H_{s-1}], l, \ldots, EV_L[H_n]\ )\ .
\end{aligned}
$$

Donc les plus petits points fixes sont préservés. Un argument semblable vaut pour les plus grands points fixes et donc EV_L est un morphisme de μ-treillis. $\square$

4.2 Théorie de l'évaluation

Dans la suite, soit L un μ-treillis, le but de cette section est de définir la fonction d'évaluation EV. Cette fonction associe à chaque couple $\langle G, g\rangle$, où $G \in \mathcal{J}(L)$ et $g \in G_0$, un élément $EV_G(g) \in L$. En effet un jeu $G \in \mathcal{J}(L)$ est une sorte de terme et il est raisonnable de penser qu'on puisse évaluer ce terme dans L. De plus, nous démontrerons que la fonction EV possède les propriétés 4.2.1—4.2.3, dont on aura besoin pour démontrer la proposition 4.3.5.

D'abord il faut expliquer la notation qu'on va utiliser. Rappelons qu'un jeu-opérateur sur $\mathcal{J}(P)$ est un triplet $\langle G, x, \lambda\rangle$ où $G \in \mathcal{J}$, $x \in X_G$ et $\lambda : X_G \setminus \{x\} \longrightarrow P$. Nous allons écrire $\langle G[x], \lambda\rangle$ pour un tel ensemble de données, ou encore $G[x]$, en utilisant une notation abrégée. Dans ce cas $G[x] = \langle G[x], \lambda_G\rangle$, c'est-à-dire que $\lambda_G : X_G \setminus \{x\} \longrightarrow P$ est la donnée sous-entendue. Soit $\langle G[x], \lambda\rangle$ un jeu opérateur; pour tout $p \in P$ on obtient un jeu $\langle G[x], \lambda^p\rangle \in \mathcal{J}(P)$ en étendant λ à tout X_G par $\lambda^p : X_G \longrightarrow P$ de la façon suivante:

$$\lambda^p(y) \quad = \quad \begin{cases} p\ , & y = x\ , \\ \lambda(y)\ , & \text{sinon}\ . \end{cases}$$

On peut généraliser ces notions à un jeu-opérateur en plusieurs variables: si $G \in \mathcal{J}$, $x_1, \ldots, x_n \in X_G$ et $\lambda : X_G \setminus \{x_1, \ldots, x_n\} \longrightarrow P$, nous allons écrire $\langle G[x_1, \ldots, x_n], \lambda\rangle$ pour un tel ensemble de données. Soit $p_1, \ldots, p_n$ un vecteur d'éléments de P, on obtient un jeu $\langle G[x_1, \ldots, x_n], \lambda^{p_1,\ldots,p_n}\rangle$ en étendant λ à tout X_G par $\lambda^{p_1,\ldots,p_n}$ défini de la façon suivante:

$$\lambda^{p_1,\ldots,p_n}(y) \quad = \quad \begin{cases} p_i\ , & y = x_i\ , \\ \lambda(y)\ , & \text{sinon}\ . \end{cases}$$

Soit H un sous-jeu de G (on ne demande pas ici que la position de départ soit préservée) et soit $x \in X_H$. Si λ est une fonction partielle de X_G vers P, soit λ_H sa restriction à X_H. Pour une fonction $\lambda : X_G \setminus \{x\} \longrightarrow P$ observons que:

$$(\,\lambda_H\,)^p \quad = \quad (\,\lambda^p\,)_H\ ,$$

ce qui nous permet d'écrire simplement λ^p_H.

Les propriétés 4.2.1–4.2.3 suivantes, que nous allons démontrer dans cette section, sont les seules propriétés dont on a besoin afin de démontrer la proposition 4.3.5, qui est le résultat principal de ce chapitre. Le lecteur est invité à lire la section 4.3 et à s'occuper de la vérification de ces propriétés seulement ensuite.

4.2.1. Pour tout jeu acyclique $\langle G, \lambda \rangle$ — c'est-à-dire que $R(G) = \emptyset$ — et tout sommet $g \in G_0$ on a que:

$$EV_{\langle G,\lambda \rangle}(\ g\ ) \ = \ \begin{cases} \lambda(g)\ , & \epsilon(g) = 0\ , \\ \bigvee_{g \to g'} EV_{\langle G,\lambda \rangle}(\ g'\ )\ , & \epsilon(g) = \sigma\ , \\ \bigwedge_{g \to g'} EV_{\langle G,\lambda \rangle}(\ g'\ ), & \epsilon(g) = \pi\ . \end{cases}$$

4.2.2. Soit $\langle G[x], \lambda \rangle$ un jeu-opérateur. Pour tout sommet g de G, la fonction $\phi(l)$, induite sur L par EV, $\langle G[x], \lambda \rangle$ et g, à savoir:

$$\phi(\ l\ ) \ = \ EV_{\langle G[x], \lambda^l \rangle}(g)\ ,$$

préserve l'ordre; de plus, il existe $\mu = \mu_z.EV_{\langle G[x],\lambda^z \rangle}(g_0)$ et $\nu = \nu_z.EV_{\langle G[x],\lambda^z \rangle}(g_0)$. Enfin, pour tout sommet g de $\mu_x.G[x]$ on a que:

$$EV_{\langle \mu_x.G[x], \lambda \rangle}(g) \ = \ EV_{\langle G[x], \lambda^\mu \rangle}(g)\ ,$$

de même, pour tout sommet g de $\nu_x.G[x]$ on a que:

$$EV_{\langle \nu_x.G[x], \lambda \rangle}(g) \ = \ EV_{\langle G[x], \lambda^\nu \rangle}(g)\ .$$

4.2.3. Soient $\langle G_0[x], \lambda_0 \rangle$ un jeu-opérateur, $\langle H, \lambda_H \rangle$ un jeu et $\langle G, \lambda \rangle$ le jeu obtenu par substitution de x dans G_0 pour H. Pour tout sommet h de H on a que:

$$EV_{\langle G,\lambda \rangle}(g) \ = \ EV_{\langle H, \lambda_H \rangle}(g)\ .$$

De plus, soit h_0 le point de départ de H et posons $e = EV_{\langle H,\lambda_H \rangle}(h_0)$. Si g est un sommet de G_0 on a que:

$$EV_{\langle G,\lambda \rangle}(g) \ = \ EV_{\langle G_0[x], \lambda^e \rangle}(g)\ .$$

Il est clair que les trois propriétés déterminent univoquement une telle fonction. Dans la suite notre définition de EV est seulement une des possibles définitions.

Définition 4.2.4 Pour tout jeu $G \in \mathcal{J}$ définissons $EV_G : L^{X_G} \longrightarrow L$ de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
EV_x(\lambda) &= \lambda(x)\,, \\
EV_{\bigwedge_{i\in I} G_i}(\lambda) &= \bigwedge_{i\in I} EV_{G_i}(\lambda_i)\,, \\
EV_{\bigvee_{i\in I} G_i}(\lambda) &= \bigvee_{i\in I} EV_{G_i}(\lambda_i)\,, \\
EV_{\mu_x.G[x]}(\lambda) &= \mu_z.EV_{G[x]}(\lambda^z)\,, \\
EV_{\nu_x.G[x]}(\lambda) &= \nu_z.EV_{G[x]}(\lambda^z)\,.
\end{aligned}$$

Ici λ_i est une notation abrégée pour λ_{G_i}.

Proposition 4.2.5 Soit $G \in \mathcal{J}$ un jeu partiel tel que $\operatorname{card} X_G = n$. Il existe un couple (ϕ, ψ), où $\phi \in \mathcal{A}$ est tel que $a(\phi) = n$ et $\psi : n \xrightarrow{\cong} X_G$ est une bijection, tel que:

$$EV_G(\lambda) = \phi(\lambda \circ \psi)\,.$$

Preuve. Par induction sur la structure des jeux partiels dans $\mathcal{J}$. La proposition est évidente pour le jeu x, auquel on peut faire correspondre le terme $\bigwedge_1$; la proposition est aussi évidente pour des jeux de la forme $\bigwedge_{i\in I} G_i$ et $\bigvee_{i\in I} G_i$, si l'on suppose que la proposition est vraie pour les G_i.

Considérons un jeu G de la forme $\mu_x.H[x]$. Par hypothèse d'induction, soit $\psi : n + 1 \xrightarrow{\cong} X_G \cup \{x\}$ et soit $\phi \in \mathcal{A}$ tel que $a(\phi) = n + 1 = \operatorname{card} X_H$; de plus, ψ et ϕ possèdent la propriété désirée, en particulier:

$$EV_{G[x]}(\lambda^z) = \phi(\lambda^z \circ \psi)\,,$$

où:

$$(\lambda^z \circ \psi)_i = \lambda^z(\psi(i)) = \begin{cases} z\,, & \psi(i) = x\,, \\ \lambda(\psi(i))\,, & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

Soit $s \in \{1, \ldots, n+1\}$ tel que $\psi(s) = x$ et soit $\epsilon^s : n \rightarrowtail n+1$ l'unique injection qui préserve l'ordre telle que $\epsilon^s(\{1, \ldots, n\}) = \{1, \ldots, n+1\} \setminus \{s\}$. Alors $\psi \circ \epsilon^s : n \longrightarrow X_G$ est une bijection et l'on voit que:

$$\phi(\lambda^z \circ \psi) \quad = \quad \phi_{s,\lambda \circ \psi \circ \epsilon^s}(z) \ ,$$

car le vecteur λ', défini par:

$$\lambda'_i \quad = \quad \begin{cases} \lambda(\psi(\epsilon^s(i))) \ , & i < s \ , \\ z \ , & i = s \ , \\ \lambda(\psi(\epsilon^s(i-1))) \ , & i > s \ , \end{cases}$$

est évidemment égal à $\lambda^z \circ \psi$. Cela montre que $\mu_z.EV_{H[x]}(\lambda^z)$ existe et que:

$$EV_{\mu_x.G[x]}(\ \lambda\ ) \quad = \quad (\mu_s.\phi)(\ \lambda \circ (\psi \circ \epsilon^s)\ )\ .$$

On raisonne de façon semblable pour un jeu de la forme $\nu_x.H[x]$. $\square$

Définition 4.2.6 Pour tout $G \in \mathcal{J}$ on étend la définition de EV à tout sommet $g \in G_0$ en posant, pour la racine g_0:

$$EV_{G,g_0}(\ \lambda\ ) \quad = \quad EV_G(\ \lambda\ )\ ,$$

et, pour un sommet g distinct de la racine:

$$\begin{aligned} EV_{\bigwedge_{i \in I} G_i, g}(\ \lambda\ ) \quad &= \quad EV_{G_{i_g}, g}(\ \lambda_{i_g}\ )\ , \\ EV_{\bigvee_{i \in I} G_i, g}(\ \lambda\ ) \quad &= \quad EV_{G_{i_g}, g}(\ \lambda_{i_g}\ )\ , \\ EV_{\mu_x.G[x], g}(\ \lambda\ ) \quad &= \quad EV_{G[x], g}(\ \lambda^{\mu}\ )\ , \\ EV_{\nu_x.G[x], g}(\ \lambda\ ) \quad &= \quad EV_{G[x], g}(\ \lambda^{\nu}\ )\ , \end{aligned}$$

où G_{i_g} est l'unique jeu partiel entre les G_i tel que g est une position de ce jeu, $\mu = \mu_z.EV_{G[x]}(\lambda^z)$ et $\nu = \nu_z.EV_{G[x]}(\lambda^z)$.

Proposition 4.2.7 Pour tout jeu $G \in \mathcal{J}$ et tout sommet $g \in G_0$ la fonction $EV_{G,g} : L^{X_G} \longrightarrow L$ préserve l'ordre.

Preuve. La proposition est évidente si g est la racine de G, à cause de la caractérisation (cf. proposition 4.2.5) de EV_G à l'aide d'un opérateur $|\phi|$, où ϕ est un terme de $\mathcal{A}$, et aussi à cause que $\lambda \leq \lambda'$ si et seulement si $\lambda \circ \psi \leq \lambda' \circ \psi$.

Considérons un jeu G de la forme $\bigwedge_{i \in I} G_i$. Le résultat découle par induction en supposant la proposition vraie pour tous les G_i, car en effet si $\lambda \leq \lambda'$ alors $\lambda_i \leq \lambda'_i$. On raisonne de la même façon si G est de la forme $\bigvee_{i \in I} G_i$.

Considérons un jeu G de la forme $\mu_x.H[x]$ et supposons que la proposition est vraie pour le jeu $H[x]$. Soient $\lambda, \lambda' : L^{X_G} \longrightarrow L$ tels que $\lambda \leq \lambda'$, on a alors $\lambda^z \leq \lambda'^z$ et $EV_{H[x]}(\lambda^z) \leq EV_{H[x]}(\lambda'^z)$ pour tout $z \in L$. On obtient que $\mu = \mu_z.EV_{H[x]}(\lambda^z) \leq \mu_z.EV_{H[x]}(\lambda'^z) = \mu'$ et $\lambda^\mu \leq \lambda'^{\mu'}$. On peut maintenant voir que:

$$\begin{aligned} EV_{\mu_x.H[x],g}(\,\lambda\,) &= EV_{H[x],g}(\,\lambda^\mu\,) \\ &\leq EV_{H[x],g}(\,\lambda'^{\mu'}\,) \\ &= EV_{\mu_x.H[x],g}(\,\lambda'\,)\,. \end{aligned}$$

On raisonne de façon semblable pour un jeu de la forme $\nu_x.H[x]$. $\square$

Proposition 4.2.8 Considérons un jeu $G \in \mathcal{J}$ de la forme $G_0[x = H]$ où $G_0, H \in \mathcal{J}$ et observons que la relation suivante est vraie:

$$X_G \;=\; (X_{G_0} \setminus \{x\}) \,\cup\, X_H\,.$$

Si $\lambda : X_G \longrightarrow L$, soient λ_0 et λ_H les restrictions de λ à $X_{G_0} \setminus \{x\}$ et X_H respectivement. Soit h_0 la racine de H et posons:

$$e \;=\; EV_{H,h_0}(\,\lambda_H\,)\,.$$

Pour tout sommet $g \in G_0$ on a que:

$$EV_{G,g}(\,\lambda\,) \;=\; EV_{G_0[x],g}(\,\lambda_0^e\,)$$

et pour tout sommet $h \in H_0$ on a que:

$$EV_{G,h}(\,\lambda\,) \;=\; EV_{H,h}(\,\lambda_H\,)\,.$$

Preuve. Par induction sur la structure de G_0.

Si $G_0 = x$, on utilise l'égalité combinatoire $G_0[x = H] = H$. Si $g \in G_0$, alors g est la racine x et donc:

$$\begin{aligned} EV_{G,x}(\,\lambda\,) &= EV_{H,h_0}(\,\lambda_H\,) \\ &= e \\ &= EV_x(\,\lambda_0^e\,) \\ &= EV_{G_0,x}(\,\lambda_0^e\,)\;. \end{aligned}$$

Si $h \in H_0$ on voit que:

$$EV_{G,h}(\,\lambda\,) \;=\; EV_{H,h}(\,\lambda_H\,)\;,$$

en utilisant l'égalité $G = H$.

Soit $G_0 = \bigwedge_{i \in I} G_i$ et appelons g_i les racines des G_i. Rappelons que $X_{G_0} = \sum_{i \in I} X_{G_i}$ et donc il existe un unique $j \in I$ tel que $x \in X_{G_j}$. On peut donc écrire:

$$G \;=\; \bigwedge_{i \in I} G'_i\;,$$

où:

$$G'_i \;=\; \begin{cases} G_i\;, & i \neq j\;, \\ G_j[x = H]\;, & i = j\;. \end{cases}$$

On a aussi $X_G = \sum_{i \in I} X_{G'_i}$: pour tout $i \in I$ soit λ_i la restriction de λ à $X_{G'_i}$.

Si $g = g_0$ est la racine de G, alors:

$$\begin{aligned} EV_{G,g_0}(\,\lambda\,) &= \bigwedge_{i \in I} EV_{G'_i,g_i}(\,\lambda_i\,) \\ &= EV_{G_j[x=H],g_j}(\,\lambda_j\,) \;\wedge \bigwedge_{i \in I \setminus \{j\}} EV_{G_i,g_i}(\,\lambda_i\,) \\ &= EV_{G_j[x],g_j}(\,\lambda_{j,0}^e\,) \;\wedge \bigwedge_{i \in I \setminus \{j\}} EV_{G_i,g_i}(\,\lambda_i\,) \\ &= EV_{G_0,g_0}(\,\lambda_0^e\,) \end{aligned}$$

ce qui découle en utilisant l'hypothèse d'induction:

$$EV_{G'_j,g_j}(\lambda_j) \;=\; EV_{G_j[x],g_j}(\lambda^e_{j,0}) \,,$$

où $\lambda_{j,0}$ est la restriction à la fois de λ_j et λ à $X_{G_j[x]} \setminus \{x\}$.

Si $g \neq g_0$ n'est pas la racine, alors ou bien $i_g = j$ ou bien $i_g \neq j$. Dans le premier cas, en utilisant l'hypothèse d'induction, on voit que:

$$\begin{aligned} EV_{G,g}(\lambda) &= EV_{G'_j,g}(\lambda_j) \\ &= EV_{G_j,g}(\lambda^e_{j,0}) \\ &= EV_{G_0,g}(\lambda^e_0) \,. \end{aligned}$$

Dans le second cas on voit que:

$$\begin{aligned} EV_{G,g}(\lambda) &= EV_{G_{i_g},g}(\lambda_{i_g}) \\ &= EV_{G_0,g}(\lambda^e_0) \,. \end{aligned}$$

Si $h \in H_0$, en utilisant l'hypothèse d'induction, on voit que:

$$\begin{aligned} EV_{G,h}(\lambda) &= EV_{G_j[x=H],h}(\lambda_j) \\ &= EV_{H,h}(\lambda_{j,H}) \\ &= EV_{H,h}(\lambda_H) \,. \end{aligned}$$

On raisonne de façon semblable si G_0 est de la forme $\bigvee_{i \in I} G_i$.

Supposons maintenant que $G_0[x]$ est de la forme $\mu_y.G_1[y]$. Soit g_1 la racine de $G_1[y]$ et pour une fonction $\lambda : L^{X_G} \longrightarrow L$ soit λ_1 la restriction de λ à $X_{G_1[y]} \setminus \{y\}$. Posons:

$$G'_1[y] \;=\; G_1[y][x = H] \,,$$

de façon que l'on peut écrire:

$$G \;=\; \mu_y.G'_1[y] \,.$$

Considérons en premier la racine y de $G_0[x]$ et rappelons que:

$$EV_{G,y}(\lambda) \;=\; \mu_z.EV_{G'_1[y],g_1}(\lambda^z) \,.$$

Posons $e = EV_{H,h_0}(\lambda_H)$, en utilisant l'hypothèse d'induction, pour tout $l \in L$ on a que:

$$\begin{array}{rcl} EV_{G_1'[y],g_1}(\lambda^l) & = & EV_{G_1[y][x=H],g_1}(\lambda^l) \\ & = & EV_{G_1[y,x],g_1}(\lambda_1^{l\,e}) \\ & = & EV_{G_1[x,y],g_1}(\lambda_1^{e\,l}) \ , \end{array}$$

et donc:

$$\begin{array}{rcl} EV_{G,y}(\lambda) & = & \mu_z.EV_{G_1'[y],g_1}(\lambda^z) \\ & = & \mu_z.EV_{G_1[x,y],g_1}(\lambda_1^{e\,z}) \\ & = & EV_{G_0[x],y}(\lambda_0^e) \ . \end{array}$$

Soit $g \in G_0[x]$ un sommet distinct de la racine, et posons:

$$\mu \ = \ \mu_z.EV_{G_1'[y],g_1}(\lambda^z) \ = \ \mu_z.EV_{G_1[x,y],g_1}(\lambda_1^{e\,z}) \ ,$$

où $\lambda : L^{X_G} \longrightarrow L$ est donné. Il en suit que:

$$\begin{array}{rcl} EV_{G,g}(\lambda) & = & EV_{G_1'[y],g}(\lambda^\mu) \\ & = & EV_{G_1[y,x],g}(\lambda_1^{\mu e}) \\ & = & EV_{G_1[x,y],g}(\lambda_1^{e\mu}) \\ & = & EV_{G_0,g}(\lambda_0^e) \ . \end{array}$$

Enfin, soit h un sommet de H, on a alors:

$$\begin{array}{rcl} EV_{G,h}(\lambda) & = & EV_{G_1'[y],h}(\lambda^\mu) \\ & = & EV_{H,h}(\lambda_H) \ . \end{array}$$

On raisonne de façon semblable si $G_0[x]$ est de la forme $\nu_y.G_1[y]$. $\square$

On est donc prêt pour définir l'évaluation d'un sommet g dans un jeu $G \in \mathcal{J}(L)$.

Définition 4.2.9 Soient $\langle G, \lambda \rangle \in \mathcal{J}(L)$ et $g \in G_0$. Posons:

$$EV_{\langle G,\lambda \rangle}(g) \ = \ EV_{G,g}(\lambda) \ .$$

On peut maintenant montrer que $EV_{\langle G,\lambda\rangle}(g)$ possède les propriétés voulues 4.2.1–4.2.3 de la page 77.

Proposition 4.2.10 Soit $G \in \mathcal{J}(L)$ un jeu acyclique et soit g un sommet de G. On a que:

$$EV_{\langle G,\lambda\rangle}(\,g\,) \;=\; \begin{cases} \lambda(g)\;, & \epsilon(g) = 0\;, \\ \bigvee_{g\to g'} EV_{\langle G,\lambda\rangle}(\,g'\,)\;, & \epsilon(g) = \sigma\;, \\ \bigwedge_{g\to g'} EV_{\langle G,\lambda\rangle}(\,g'\,)\;, & \epsilon(g) = \pi\;. \end{cases}$$

Preuve. Un jeu acyclique G a la structure d'un arbre, donc on peut se représenter G comme $G = G_0[H]$ où H est le sous-arbre de G de racine g. Si $\epsilon(g) = 0$, alors g est une feuille et $H = x$, donc:

$$\begin{aligned} EV_{\langle G,\lambda\rangle}(g) &= EV_{G,g}(\lambda) \\ &= EV_{x,g}(\lambda_x) \\ &= \lambda(g)\;. \end{aligned}$$

Supposons que $\epsilon(g) = \sigma$, donc $H = \bigvee_{g\to g'} H_{g'}$ où $H_{g'}$ est le sous-arbre de H de racine g'. Donc:

$$\begin{aligned} EV_{\langle G,\lambda\rangle}(g) &= EV_{G,g}(\lambda) \\ &= EV_{H,g}(\lambda_H) \\ &= \bigvee_{g\to g'} EV_{H_{g'},g'}(\lambda_{H_{g'}}) \\ &= \bigvee_{g\to g'} EV_{G,g'}(\lambda) \\ &= \bigvee_{g\to g'} EV_{\langle G,\lambda\rangle}(g')\;. \end{aligned}$$

On raisonne de façon semblable si $\epsilon(g) = \pi$. $\square$

Proposition 4.2.11 Soient $\langle G[x],\lambda\rangle$ un jeu-opérateur et $g \in G_0$. La fonction $\phi(l)$ induite sur L par EV, $\langle G[x],\lambda\rangle$ et g, à savoir:

$$\phi(\,l\,) \;=\; EV_{\langle G[x],\lambda^l\rangle}(g)\;,$$

préserve l'ordre, de plus $\mu = \mu_z.EV_{\langle G[x],\lambda,g_0\rangle}(z)$ et $\nu = \nu_z.EV_{\langle G[x],\lambda,g_0\rangle}(z)$ existent. Pour tout sommet g de $\mu_x.G[x]$ on a que:

$$EV_{\langle \mu_x.G[x],\lambda\rangle}(g) \quad = \quad EV_{\langle G[x],\lambda^\mu\rangle}(g) \ .$$

De même, pour tout sommet g de $\nu_x.G[x]$ on a que:

$$EV_{\langle \nu_x.G[x],\lambda\rangle}(g) \quad = \quad EV_{\langle G[x],\lambda^\nu\rangle}(g) \ .$$

Preuve. On a $EV_{\langle G[x],\lambda,g\rangle}(l) = EV_{G[x],g}(\lambda^l)$ et si $l \leq l'$ alors $\lambda^l \leq \lambda^{l'}$, ce qui entraîne $EV_{G[x],g}(\lambda^l) \leq EV_{G[x],g}(\lambda^{l'})$.

On a vu (cf. proposition 4.2.5) que μ et ν existent et il faut montrer seulement la seconde partie de la proposition. Si g n'est pas la racine, alors par définition:

$$\begin{aligned} EV_{\langle \mu_x.G[x],\lambda\rangle}(g) &= EV_{\mu_x.G[x],g}(\lambda) \\ &= EV_{G[x],g}(\lambda^\mu) \\ &= EV_{\langle G[x],\lambda^\mu\rangle}(g) \ . \end{aligned}$$

Considérons la racine x, dans ce cas on a que:

$$\begin{aligned} EV_{\langle \mu_x.G[x],\lambda\rangle}(x) &= \mu_z.EV_{G[x],g_0}(\lambda^z) \\ &= \mu \ . \end{aligned}$$

À cause de la proposition 4.2.8 on a que:

$$\begin{aligned} EV_{\langle G[x],\lambda^\mu\rangle}(x) &= EV_{G[x],x}(\lambda^\mu) \\ &= EV_{x,x}(\lambda^\mu_x) \\ &= \mu \ . \end{aligned}$$

Cela démontre la proposition. On utilise un raisonnement semblable pour le jeu $\langle \nu_x.G[x],\lambda\rangle$. $\square$

Proposition 4.2.12 Soient $\langle G_0[x],\lambda_0\rangle$ un jeu-opérateur, $\langle H,\lambda_H\rangle$ un jeu et $\langle G,\lambda\rangle$ le jeu obtenu par substitution de x pour H dans G_0. Pour tout sommet h de H on a que:

$$EV_{\langle G,\lambda\rangle}(h) \quad = \quad EV_{\langle H,\lambda_H\rangle}(h) \ .$$

De plus, soit h_0 le point de départ de H et posons $e = EV_{\langle H,\lambda_H\rangle}(g_0)$. Si g est un sommet de G_0, alors:

$$EV_{\langle G,\lambda\rangle}(g) \quad = \quad EV_{\langle G_0[x],\lambda^e\rangle}(g)\ .$$

Preuve. Il s'agit d'une formulation différente de la proposition 4.2.8. □

Définition 4.2.13 Soit $\langle G, \lambda\rangle$ un jeu de $\mathcal{J}(L)$. Posons:

$$EV\langle G,\lambda\rangle \quad = \quad EV_{\langle G,\lambda\rangle}(g_0)\ .$$

Proposition 4.2.14 La fonction $EV : \mathcal{J}(L) \longrightarrow L$ satisfait les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
EV(\,\eta(l)\,) &\quad = \quad l\ ,\\
EV(\,\bigwedge_{i\in I} G_i\,) &\quad = \quad \bigwedge_{i\in I} EV(\,G_i\,)\ ,\\
EV(\,\bigvee_{i\in I} G_i\,) &\quad = \quad \bigvee_{i\in I} EV(\,G_i\,)\ ,\\
EV(\,\mu_x.G[x]\,) &\quad = \quad \mu_z.EV(\,G[x]\,)(z)\ ,\\
EV(\,\nu_x.G[x]\,) &\quad = \quad \nu_z.EV(\,G[x]\,)(z)\ ,
\end{aligned}$$

où pour un jeu-opérateur $\langle G[x], \lambda\rangle$, $EV\langle G[x], \lambda\rangle(z)$ est définie comme d'habitude par $EV\langle G[x], \lambda\rangle(l) = EV\langle G[x], \lambda^l\rangle$.

Preuve. Ceci découle directement des définitions. □

4.3 Stratégies d'évaluation

Les résultats principaux de cette section sont la proposition 4.3.5 et le théorème 4.3.6. Nous montrons que si G, H sont deux jeux de $\mathcal{J}(L)$, où L est un μ-treillis, et si $G \vdash H$, alors $EV(G) \leq EV(H)$.

La stratégie générale pour prouver ce résultat est la suivante. Nous supposons que l'on possède une stratégie d'évaluation S sur $\{G, K\}$; nous allons définir cette notion, pour le moment remarquons que toute stratégie à mémoire bornée dans le jeu $\langle G, K\rangle$ est une stratégie d'évaluation sur $\{G, K\}$. Si $G, K \in \mathcal{J}(L)$ sont des jeux acycliques, c'est-à-dire que les graphe sous-jacents sont des arbres, alors aussi le graphe sous-jacent à S est fini et acyclique et nous pouvons raisonner comme d'habitude, en utilisant la structure bien fondée de ce graphe.

Sinon, soit G soit K contient un retour, supposons G. En choisissant un retour minimal r on obtient une représentation:

$$G \quad = \quad G_0[\, r = Q_x.H[x]\,]$$

où $G_0[r]$ et $H[x]$ sont deux jeu-opérateurs sur $\mathcal{J}(L)$. Rappelons qu'un retour d'un jeu G est minimal s'il n'existe pas d'autres retours sur l'unique chemin simple de la racine vers ce sommet. En choisissant d'une bonne façon $l, l' \in L$, nous allons transformer la stratégie d'évaluation donnée S en un ensemble $\{S_i\}_{i \in I}$ de stratégies d'évaluation sur $\{G_0[\,l\,], K\}$ ou sur $\{H[\,l'\,], K\}$. Cela est fait en coupant les transitions $s \to s'$ de la stratégie donnée qui sont reliées aux transitions de la forme $(r, h) \to (S(r), h)$ dans le jeu $\langle G, K\rangle$. Les jeux $G_0[\,l\,]$ et $H[\,l'\,]$ ont un nombre plus petit de retours par rapport à G et on peut utiliser des hypothèses d'induction. On peut recoller toutes les informations ainsi obtenues des stratégies S_i pour montrer que des propriétés analogues sont vraies pour la stratégie S.

Définition 4.3.1 Soient $G, H \in \mathcal{J}(L)$. Une *stratégie d'évaluation sur* $\{G, H\}$ est un couple (S, ψ) où S est un graphe fini pointé transitif et $\psi : S \longrightarrow \langle G, H\rangle$ est un morphisme de graphes. Les conditions suivantes sont satisfaites.

1. Si $s \in S_0$ est un sommet terminal, c'est-à-dire que $\{s' | s \to s'\} = \emptyset$, et si $\psi(s) = (g, h)$, alors $EV_G(g) \leq EV_H(h)$.

2. Si $s \in S_0$ n'est pas un sommet terminal, $\epsilon(\psi(s)) = \pi$ et $\psi(s) \to (g, h)$, alors il existe une unique transition $s \to s'$ de S telle que $\psi(s \to s') = \psi(s) \to (g, h)$.

3. Chaque cycle propre γ de S induit un cycle gagnant $\psi \circ \gamma$ dans $\langle G, H\rangle$, à savoir: ou bien la projection de $\psi \circ \gamma$ sur G est un cycle propre où le retour d'hauteur

minimale est un μ-retour, ou bien la projection de $\psi \circ \gamma$ sur H est un cycle propre où le retour d'hauteur minimale est un ν-retour.

Remarque 4.3.2 Informellement, une stratégie d'évaluation est une stratégie à mémoire bornée gagnante pour le joueur σ dans un jeu $\{G, H\}$. Ce jeu est joué sur le même graphe sous-jacent à $\langle G, H\rangle$. Cependant, le joueur σ a le droit d'arrêter le jeu dans une position (g, h) où il croit que $EV_G(g) \leq EV_H(h)$; de même, le joueur π a le droit d'arrêter le jeu dans une position (g, h) dont il a raison de croire que $EV_G(g) \not\leq EV_H(h)$. Les règles du jeu $\{G, H\}$ sont les mêmes que celles du jeu $\langle G, H\rangle$, sauf que, dans le cas d'un arrêt dans une position (g, h), σ gagne si $EV_G(g) \leq EV_H(h)$, sinon π gagne. Étant donnée cette interprétation d'une stratégie d'évaluation, nous soulignons que si (S, ψ) est une telle stratégie sur $\{G, H\}$, si $\psi(s) = (g, h)$ et $\epsilon(g, h) = \sigma$, alors ou bien $EV_G(g) \leq EV_H(h)$, ou bien il existe un mouvement $s \to s'$ que le joueur σ peut faire.

Définition 4.3.3 Soit $K = \langle K, k_0, \epsilon, W_\sigma\rangle$ un jeu. Une stratégie gagnante sans mémoire pour σ dans K est un sous-graphe-pointé S de K, transitif, avec les propriétés suivantes.

- Si $s \in S$, $\epsilon(s) = \pi$ et $s \to k$ est une transition dans K, alors $s \to k$ est aussi une transition dans S.
- Si $s \in S$ et $\epsilon(s) = \sigma$, alors il existe une transition $s \to s'$ dans S.
- Chaque chemin infini dans S est un chemin infini gagnant pour σ dans K.

Lemme 4.3.4 Soit $\psi : K \longrightarrow \langle G, H\rangle$ un revêtement fini du jeu $\langle G, H\rangle$. Rappelons que $\psi(k_0) = (g_0, h_0)$, $\epsilon(k) = \epsilon(\psi(k))$ pour $k \in K_0$ et qu'un chemin infini γ dans K est gagnant pour σ si et seulement $\psi \circ \gamma$ est un chemin gagnant pour σ dans $\langle G, H\rangle$. Soit S une stratégie gagnante sans mémoire pour σ dans K et dénotons par ψ_S la restriction de ψ au graphe S. Le couple (S, ψ_S) est une stratégie d'évaluation sur $\{G, H\}$.

Preuve. Montrons que la condition 1 est satisfaite. Si s est un sommet terminal, alors $\epsilon(s) = \pi$. Posons $(g, h) = \psi(s)$, alors $\epsilon(g, h) = \pi$ et le couple $(\epsilon(g), \epsilon(h))$ est de la forme (σ, π), (π, π), $(0, \pi)$, (σ, σ), $(\sigma, 0)$, ou encore $(0, 0)$. Supposons que $\epsilon(h) = \pi$, dans ce cas il n'existe pas de transitions de la forme $h \to h'$ et donc $EV_H(h) = \top$. En effet si $h \to h'$ est une transition de H alors $(g,h) \to (g,h')$ est une transition de $\langle G, H\rangle$ et donc il existe une transition $s \to k$ dans K telle que $\psi(s \to k) = (g,h) \to (g,h')$. Puisque $\epsilon(s) = \pi$, on a que $s \to k$ est une transition de S, ce qui contredit le fait que s est un sommet terminal de S. On raisonne de la même façon si $\epsilon(g) = \sigma$ pour conclure que $EV_G(g) = \bot$. Dans tous ces cas on a que $EV_G(g) \leq EV_H(h)$. Supposons que $(\epsilon(g), \epsilon(h)) = (0,0)$, c'est-à-dire que $(g,h) \in X_G \times X_H$. Puisque $\epsilon(g,h) = \pi$, alors $\lambda(g) \leq \lambda(h)$ et on obtient le résultat car $EV_G(g) = \lambda(g)$, $EV_H(h) = \lambda(h)$.

La condition 2 est satisfaite à cause du fait que ψ est un revêtement et que l'inclusion de S est «étale par rapport aux sommets de type π». Montrons cela: soit $s \in S_0$ un sommet non terminal, supposons que $\epsilon(\psi(s)) = \pi$ et soit $\psi(s) \to (g,h)$ une transition de $\langle G, H\rangle$. Puisque ψ est un revêtement, il existe une unique transition $s \to k$ dans K telle que $\psi(s \to k) = \psi(s) \to (g,h)$. Puisque $\epsilon(s) = \epsilon(\psi(s)) = \pi$, la transition $s \to k$ est aussi une transition de S et elle est aussi unique entre les transitions $s \to s'$ de S telles que $\psi(s \to s') = \psi(s) \to (g,h)$.

Montrons enfin que la condition 3 est satisfaite. Soit γ un cycle propre de S. Par itération infinie on obtient un chemin infini γ^ω et cela est un chemin gagnant dans K, ainsi $\psi \circ \gamma^\omega = (\psi \circ \gamma)^\omega$ est un chemin gagnant dans $\langle G, H\rangle$. Puisque les retours visités par le cycle $(\psi \circ \gamma)$ dans G et H sont exactement les retours visités infiniment souvent par le chemin infini $(\psi \circ \gamma)^\omega$, on obtient que $(\psi \circ \psi)$ est un cycle gagnant dans $\langle G, H\rangle$. $\square$

Proposition 4.3.5 Soient $G, H \in \mathcal{J}(L)$ et soit (S, ψ) une stratégie d'évaluation sur $\{G, H\}$. Pour tout sommet s de S si $\psi(s) = (g,h)$, alors $EV_G(g) \leq EV_H(h)$.

Avant démontrer la proposition nous allons regarder ses conséquences.

Théorème 4.3.6 Soient $G, H \in \mathcal{J}(L)$ deux jeux tels que $G \vdash H$. Alors $EV(G) \leq EV(H)$.

Preuve. Si $G \vdash H$, alors il existe une stratégie gagnante pour le joueur σ dans le jeu

$\langle G, H \rangle$. On peut supposer que cette stratégie est une stratégie finie, c'est-à-dire qu'il existe un revêtement fini (K, ψ) de $\langle G, H \rangle$ et une stratégie sans mémoire S dans le jeu K. À cause du lemme 4.3.4, le couple (S, ψ_S) est une stratégie d'évaluation sur $\{G, H\}$. Le point de départ s_0 de S est tel que $\psi(s_0) = (g_0, h_0)$ et à cause de la proposition 4.3.5 on a que $EV_G(g_0) \leq EV_H(h_0)$. Puisque $EV(G) = EV_G(g_0)$ et $EV(H) = EV_H(h_0)$, le résultat découle. $\square$

Théorème 4.3.7 Pour tout ensemble ordonné P le μ-treillis $\mathcal{J}_P$ est libre sur P.

Preuve. Soit L un μ-treillis. On a vu que si $f : P \longrightarrow L$ préserve l'ordre, alors $\mathcal{J}_f : \mathcal{J}_P \longrightarrow \mathcal{J}_L$ est un morphisme de μ-treillis. Il suffit alors de trouver un morphisme de μ-treillis $\epsilon_L : \mathcal{J}_L \longrightarrow L$ tel que $\epsilon_L \circ \eta_L = Id_L$, car dans ce cas on obtient un morphisme de μ-treillis $\epsilon_L \circ \mathcal{J}_f : \mathcal{J}_P \longrightarrow L$ tel que $\epsilon_L \circ \mathcal{J}_f \circ \eta_P = f$. Ce morphisme est bien sur l'unique morphisme $f' : \mathcal{J}_P \longrightarrow L$ tel que $f' \circ \eta_P = f$, car $\mathcal{J}_P$ est engendré par P.

Or la fonction $EV : \mathcal{J}(L) \longrightarrow L$ induit un morphisme de μ-treillis $EV_L : \mathcal{J}_L \longrightarrow L$ si elle est bien définie sur les classes d'équivalence des jeux. Mais dans le théorème 4.3.6 on y démontre exactement ça. Enfin, il est clair que $EV_L \circ \eta_L = Id_L$. $\square$

Pour démontrer la proposition 4.3.5 nous allons faire quelque considération de caractère combinatoire.

Définition 4.3.8 Nous disons qu'un graphe pointé $\langle G_0, G_1, g_0 \rangle$ est *transitif* si pour tout sommet $g \in G_0$ il existe un chemin $g_0 \rightarrow^* g$ du point de départ vers g.

Définition 4.3.9 Soit $G = \langle G_0, G_1 \rangle$ un graphe et soit $g_0 \in G_0$ un sommet de ce graphe. Le *graphe des descendant de* g_0 *dans* G, noté $\overline{G, g_0}$ ou plus simplement $\overline{g_0}$, est le plus grand sous-graphe pointé transitif de G avec point de départ g_0. On remarque que:

$$
\begin{aligned}
g \in (\,\overline{G, g_0}\,)_0 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{il existe un chemin } g_0 \rightarrow^* g \text{ dans } G, \\
\alpha \in (\,\overline{G, g_0}\,)_1 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{dom}(\alpha) \in (\,\overline{G, g_0}\,)_0 \,.
\end{aligned}
$$

Lemme 4.3.10 Soit $G = \langle G_0, G_1, g_0 \rangle$ un graphe pointé transitif, soit $A \subseteq G_1$ un sous-ensemble d'arêtes et soit $G \setminus A$ le graphe défini par:

$$\begin{aligned} (\, G \setminus A\,)_0 &= G_0\,, \\ (\, G \setminus A\,)_1 &= G_1 \setminus A\,. \end{aligned}$$

La relation suivante est vraie:

$$G_0 = (\,\overline{G \setminus A, g_0}\,)_0 \cup \bigcup_{\alpha \in A} (\,\overline{G \setminus A, \mathrm{cod}(\alpha)}\,)_0\,.$$

Puisque évidemment:

$$(\,\overline{G \setminus A, g}\,)_0 \subseteq (\,\overline{G, g}\,)_0\,,$$

on obtient aussi la relation:

$$G_0 = (\,\overline{G \setminus A, g_0}\,)_0 \cup \bigcup_{\alpha \in A} (\,\overline{G, \mathrm{cod}(\alpha)}\,)_0\,.$$

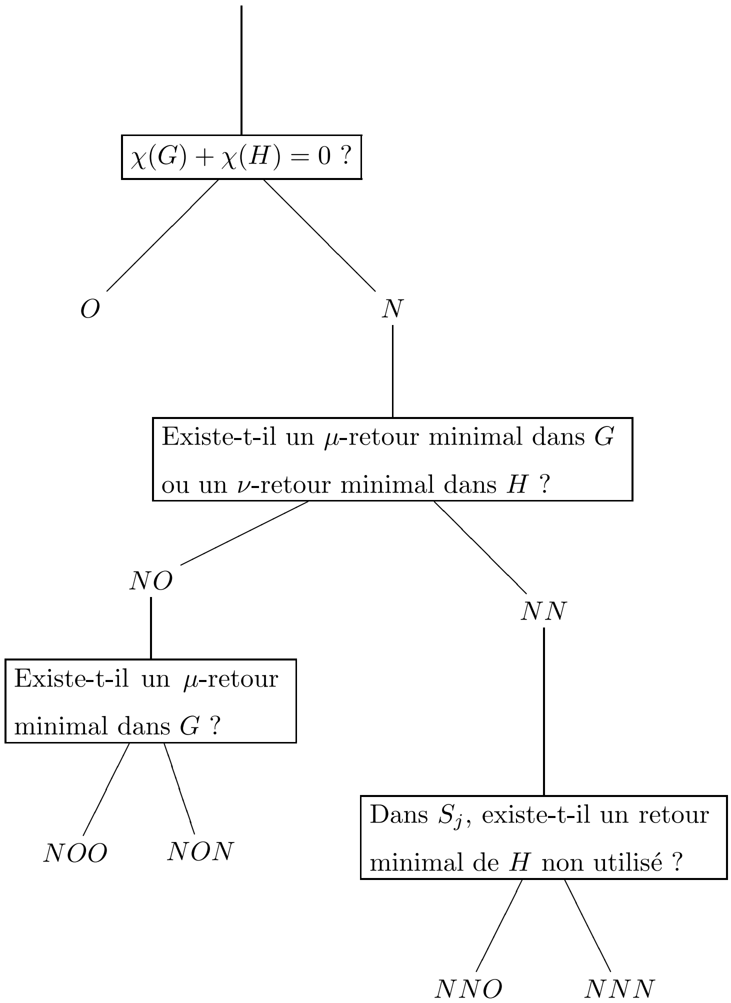
Preuve. Il faut démontrer l'inclusion:

$$G_0 \subseteq (\,\overline{G \setminus A, g_0}\,)_0 \cup \bigcup_{\alpha \in A} (\,\overline{G \setminus A, \mathrm{cod}(\alpha)}\,)_0\,.$$

Soit donc $g \in G_0$ est considérons un chemin $\gamma : g_0 \to^* g$. Si le chemin γ ne passe pas par A, alors $g \in (\,\overline{G \setminus A, g_0}\,)_0$, sinon γ passe par A et on peut écrire $\gamma = \gamma_2 \circ \alpha \circ \gamma_1$, où $\alpha \in A$ et $\gamma_2 : \mathrm{cod}(\alpha) \to^* g$ ne passe pas par A. Il en découle que $g \in (\,\overline{G \setminus A, \mathrm{cod}(\alpha)}\,)_0$. $\square$

Preuve. (Proposition 4.3.5).

Soit dans la suite $\chi(G) = \mathrm{card}\, R(G)$ le nombre de retours dans le jeu G, la preuve est par induction sur $\chi(G) + \chi(H)$. Puisque la preuve examine un certain nombre d'alternatives, nous allons ici expliciter l'arbre des alternatives principales.



Cas O: supposons d'abord que $\chi(G) + \chi(H) = 0$.

Soit (S, ψ) une stratégie d'évaluation donnée. Le graphe S est dans ce cas un graphe bien fondé, c'est-à-dire qu'il ne contient pas des chemins infinis $s_0 \to s_1 \to \dots$. En effet, un tel chemin infini induit ou bien un chemin infini sur G, ou bien un chemin infini sur H. Mais G et H sont eux aussi bien fondés, car, n'ayant pas de retours, ils sont des arbres finis. Nous allons démontrer la proposition par induction sur la structure bien fondée de S.

Si $s \in S_0$ est un sommet terminal, alors la proposition est vraie par définition de stratégie d'évaluation.

Considérons maintenant un sommet $s \in S_0$ qui n'est pas un sommet terminal et soit $\psi(s) = (g, h)$.

Supposons d'abord que $\epsilon(\psi(s)) = \sigma$. Choisissons une transition $s \to s'$ et supposons que $\psi(s \to s')$ est de la forme $(g, h) \to (g, h')$; alors $\epsilon(h) = \sigma$ et $EV_H(h) = \bigvee_{h \to h'} EV_H(h')$. Par hypothèse d'induction $EV_G(g) \leq EV_H(h')$ et on obtient que $EV_G(g) \leq EV_H(h)$ en observant que $EV_H(h') \leq EV_H(h)$. On raisonne d'une façon semblable si $\psi(s \to s')$ est de la forme $(g, h) \to (g', h)$.

Supposons maintenant que $\epsilon(\psi(s)) = \pi$ et donc $\epsilon(g) = \sigma$ ou $\epsilon(h) = \pi$. Observons que $(\epsilon(g), \epsilon(h)) \neq (0, 0)$, car si $(\epsilon(g), \epsilon(h)) = (0, 0)$ alors (g, h) est un sommet terminal dans $\langle G, H \rangle$ et (g, h) ne peut pas être l'image par un morphisme de graphes du sommet non terminal s. Supposons en premier que $\epsilon(h) = \pi$, soit $\{h_i\}_{i \in I}$ l'ensemble des successeurs de h et rappelons que $EV_H(h) = \bigwedge_{i \in I} EV_H(h_i)$. Pour tout $i \in I$ $(g, h) \to (g, h_i)$ est une transition de $\langle G, H \rangle$ et donc cette transition est relevée à une transition $s \to s_i$, avec $\psi(s_i) = (g, h_i)$. Par hypothèse d'induction $EV_G(g) \leq EV_H(h_i)$ pour tout $i \in I$ et donc $EV_G(g) \leq EV_H(h)$. On raisonne de façon semblable si $\epsilon(g) = \sigma$.

Cas N: supposons maintenant que $\chi(G) + \chi(H) > 0$. On distingue deux sous-cas:

NO: ou bien il existe un μ-retour minimal dans G, ou bien il existe un ν-retour minimal dans H.

NN: tout retour minimal de G est un ν-retour et tout retour minimal de H est un μ-retour.

Cas NON: supposons qu'il existe un μ-retour minimal dans G et appelons ce retour x. On peut couper le jeu G en deux jeu-opérateurs $G_0[x]$ et $G_1[x]$, avec point de départ g_0 et $g_1 = S(x)$ respectivement, de façon que $G = G_0[\ x = \mu_x.G_1[x]\ ]$.

Soit (S, ψ) une stratégie d'évaluation sur $\{G, H\}$. Nous allons définir un ensemble $\{S_i\}_{i \in I}$ de sous-graphes de S tels que:

$$S_0 = \bigcup_{i \in I} (S_i)_0 \, . \tag{4.3.11}$$

Pour tout $i \in I$ on va définir une structure de stratégie d'évaluation sur $\{G_0[l], H\}$ ou sur $\{G_1[l], H\}$, avec l bien choisi. Nous pourrions montrer que $EV_{G_k[l]}(g) = EV_G(g)$ pour $k = 0, 1$ et, en utilisant le fait que $\chi(G_k[l]) < \chi(G)$ et donc l'hypothèse d'induction, nous concluons que pour tout sommet s de S_i, si $\psi(s) = (g, h)$, alors $EV_G(g) \leq EV_H(h)$. La proposition plus générale 4.3.5 découle alors de la relation 4.3.11.

Soit $A \subseteq S_1$ l'ensemble des arêtes $s \to s'$ telles que $\psi(s \to s') = (x, h) \to (g_1, h)$ pour quelque h; si $\alpha \in A$ posons $\psi(\alpha) = (x, h_\alpha) \to (g_1, h_\alpha)$. Soit aussi $S \setminus A$ le graphe obtenu de S en supprimant les arêtes de A; il est défini par $(S \setminus A)_0 = S_0$ et $(S \setminus A)_1 = S_1 \setminus A$. Observons que les sommets terminaux de $S \setminus A$ sont ou bien des sommets terminaux dans S, ou bien ils sont de la forme $\mathrm{dom}(\alpha)$ pour une arête $\alpha \in A$.

Enfin, pour tout $\alpha \in A$ soit $S_\alpha = \overline{S \setminus A, \mathrm{cod}(\alpha)}$ le sous-graphe de $S \setminus A$ des descendants de $\mathrm{cod}(\alpha)$; soit $S_{i_0} = \overline{S \setminus A, s_0}$ le sous-graphe de $S \setminus A$ des descendants du point s_0 de S. Posons $I = A \cup \{i_0\}$, on veut s'intéresser à la collection des graphes pointés $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A} \cup \{S_{i_0}\}$.

Nous allons d'abord montrer que, pour tout $\alpha \in A$, la restriction de ψ à S_α induit une stratégie d'évaluation sur $\{G_1[\,l\,], H\}$ où:

$$l = EV_G(x) \wedge \bigwedge_{\alpha \in A} EV_H(h_\alpha) \, .$$

Observons que cet infimum existe car l'ensemble $\{h_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est fini.

Fixons donc $\alpha_0 \in A$ et soit ι l'inclusion de S_{α_0} dans S. Puisque $\psi(\mathrm{cod}(\alpha_0)) = (g_1, h_{\alpha_0})$, on obtient une factorisation $\psi \circ \iota = \iota' \circ \psi_{\alpha_0}$ comme dans le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
S_{\alpha_0} \arrow[r, tail, "\iota"] \arrow[d, "\psi_{\alpha_0}"] & S \arrow[d, "\psi"] \\
\langle G_1[\bot], H\rangle \arrow[r, tail, "\iota'"] \arrow[d, "\zeta"] & \langle G_0[\,\mu_x.G_1[x]\,], H\rangle \\
\langle G_1[\,l\,], H\rangle &
\end{tikzcd}$$

Ici $\iota' = \langle j, H\rangle$, où $j : G_1[\bot] \rightarrowtail G_0[\,\mu_x.G_1[x]\,]$ est l'injection canonique, et ζ est défini simplement par $\zeta(g,h) = (g,h)$. Même si ζ ne préserve pas le coloriage ϵ, donc il n'est pas un morphisme de jeux, il est un morphisme de graphes: pour s'en convaincre il suffit de remarquer qu'à partir des sommets de la forme (x,h) dans $\langle G_1[\bot], H\rangle$ s'il existe une transition $(x,h) \to (g',h')$, alors cette transition est une transition droite de π, c'est-à-dire qu'elle est de la forme $(x,h) \to (x,h')$ avec $\epsilon(h) = \pi$; on voit aisément que cette transition est aussi une transition de $\langle G_1[\,l\,], H\rangle$. Observons maintenant que:

4.3.12 *le couple* $(S_{\alpha_0}, \zeta \circ \psi_{\alpha_0})$ *est une stratégie d'évaluation sur* $\{G_1[\,l\,], H\}$.

Vérifions cela. Or, S_{α_0} est par définition un graphe pointé transitif avec point de départ $\mathrm{cod}(\alpha_0)$.

Considérons un sommet non terminal s de S_{α_0} tel que $\epsilon(\psi(s)) = \pi$ et une transition $\psi(s) \to (g,h)$ de $\langle G_1[\,l\,], H\rangle$. Cette transition est aussi une transition de π dans $\langle G_1[\bot], H\rangle$ et donc de $\langle G_0[\,\mu_x.G_1[x]\,], H\rangle$. Cette transition est donc relevée d'une façon unique à une transition $s \to s'$ dans S et elle est aussi une transition dans S_{α_0}, sauf si elle appartient à A. Cela n'est pas possible, car si elle appartient à A, alors $\psi(s) \to \psi(s')$ n'est pas une transition provenant de $\langle G_1[\bot], H\rangle$. Donc $s \to s'$ est une transition dans S_{α_0}, et elle est bien sûr unique avec la propriété que $\psi(s \to s') = \psi(s) \to (g,h)$.

Soit γ un cycle propre de S_{α_0}, puisque S est une stratégie d'évaluation, on voit que $\psi \circ \iota \circ \gamma^\omega$ est un chemin infini gagnant de $\langle G_0[\,\mu_x.G_1[x]\,], H\rangle$; puisque $\iota' \circ \psi_{\alpha_0} \circ \gamma^\omega = \psi \circ \iota \circ \gamma^\omega$ et ι' est un morphisme de jeux, $\psi_{\alpha_0} \circ \gamma^\omega$ est un chemin infini gagnant de $\langle G_1[\bot], H\rangle$.

Puisque $\langle G_1[\perp], H\rangle$ et $\langle G_1[\,l\,], H\rangle$ ont la même structure des chemins infinis, on a que $\zeta \circ \psi_{\alpha_0} \circ \gamma^\omega$ est un chemin infini gagnant de $\langle G_1[\,l\,], H\rangle$.

Afin de compléter la preuve que $(S_{\alpha_0}, \zeta \circ \psi_{\alpha_0})$ est une stratégie d'évaluation sur $\{G_1[\,l\,], H\}$, il suffit de montrer que pour un sommet terminal s, si $\psi(s) = (g, h)$ alors $EV_{G_1[\,l\,]}(g) \leq EV_H(h)$.

Dans le graphe S_{α_0} on a de nouveaux sommets terminaux s de la forme $\mathrm{dom}(\alpha)$ et de vieux sommets terminaux. Or, pour un sommet terminal de la forme $s = \mathrm{dom}(\alpha)$ on a que $\psi(s) = (x, h_\alpha)$ et donc:

$$EV_{G_1[\,l\,]}(x) \quad = \quad l \leq EV_H(h_\alpha)\;,$$

à cause du choix de l. Par contre, pour un vieux sommet terminal s tel que $\psi(s) = (g, h)$, on avait que $EV_G(g) \leq EV_H(h)$ dans S, par la définition de stratégie d'évaluation. Posons $\mu = \mu_z.EV(\,G_1[z]\,)$ et observons que $EV_G(x) = \mu$, $l \leq \mu$ par le choix de l et $EV_G(g) = EV_{\mu_x.G_1[x]}(g) = EV_{G_1[\mu]}(g)$ à cause des propriétés de l'évaluation. On obtient que:

$$\begin{aligned} EV_{G_1[\,l\,]}(g) &\leq EV_{G_1[\mu]}(g) \\ &= EV_G(g) \\ &\leq EV_H(h)\;, \end{aligned}$$

car la fonction $f(z) = EV_{G_1[z]}(g)$ préserve l'ordre. Donc, aussi pour un vieux sommet terminal s tel que $\psi(s) = (g, h)$ on a $EV_{G_1[\,l\,]}(g) \leq EV_H(h)$. Cela termine la démonstration de 4.3.12.

Nous allons maintenant montrer que:

$$l \quad = \quad EV_G(x)\;, \tag{4.3.13}$$

de façon que, pour tout sommet g de $G_1[l]$, la relation:

$$EV_{G_1[l]}(g) \quad = \quad EV_G(g)$$

est vraie. Il suit alors, en utilisant le fait que $\chi(G_1[l]) < \chi(G)$ et l' hypothèse d'induction, que pour tout $\alpha \in A$ et pour tout sommet s de S_α, si $\psi(s) = (g,h)$, alors $EV_G(g) \leq EV_H(h)$.

Pour tout $\alpha \in A$ $(S_\alpha, \zeta \circ \psi)$ est donc une stratégie d'évaluation sur $\{G_1[\,l\,], H\}$ et puisque $\chi(G_1) < \chi(G)$, on a que $EV_{G_1[\,l\,]}(g) \leq EV_H(h)$ si s est un sommet de S_α tel que $\psi(s) = (g,h)$. Cela est vrai en particulier pour le point de départ $\mathrm{cod}(\alpha)$ de S_α. Or $\psi(\mathrm{cod}(\alpha)) = (g_1, h_\alpha)$ et puisque $EV_{G_1[\,l\,]}(g_1) = EV(\,G_1[\,l\,]\,)$, on obtient que pour tout $\alpha \in A$:

$$EV(\,G_1[\,l\,]\,) \;\; \leq \;\; EV_H(\,h_\alpha\,)\;.$$

De plus, puisque $l \leq EV_G(x)$ et $\mu = EV_G(x) = \mu_z.EV(G_1[z])$, on obtient:

$$EV(\,G_1[\,l\,]\,) \;\; \leq \;\; EV(\,G_1[\mu]\,) \;\; = \;\; EV_G(x)\;.$$

On déduit que:

$$EV(\,G_1[\,l\,]\,) \;\; \leq \;\; EV_G(x) \;\wedge\; \bigwedge_{\alpha \in A} EV_H(h_\alpha)\;,$$

c'est-à-dire que $l = EV_G(x) \wedge \bigwedge_{\alpha \in A} EV_H(h_\alpha)$ est un point préfixe de l'opérateur $f(z) = EV(\,G_1[z]\,)$ et donc $EV_G(x) \leq l$. Puisque à la fois $l \leq EV_G(x)$, on obtient que $l = EV_G(x)$, ce qui termine la preuve de 4.3.13. De plus on remarque que la relation:

$$EV_G(x) \leq EV_H(h_\alpha) \tag{4.3.14}$$

est vraie.

Considérons maintenant le sous-graphe S_{i_0} de $S \setminus A$ des descendants de s_0 et supposons que $\psi(s_0) = (g,h)$. À l'aide de la restriction de ψ à S_{i_0}, on induit sur S_{i_0} une structure de stratégie d'évaluation sur $\{G_0[\mu], H\}$, si g est un sommet de $G_0[x]$, ou bien sur $\{G_1[\mu], H\}$ si g est un sommet de $G_0[x]$. Évidemment on choisit $\mu = EV_G(x)$.

La construction et le raisonnement est comme avant (cf. 4.3.12); pour justifier l'introduction de nouveaux sommets terminaux on utilise la relation 4.3.14. Enfin, en observant que $EV_{G_0[\mu]}(g) = EV_G(g)$ pour tout sommet g de G_0, en observant que

$\chi(G_i) < \chi(G)$, on obtient que pour un sommet s dans S_{i_0}, si $\psi(s) = (g, h)$, alors $EV_G(g) = EV_{G_0[\mu]}(g) \leq EV_H(h)$.

Pour finir, nous observons qu'un sommet s de S ou bien il est dans S_{i_0}, ou bien il existe $\alpha \in A$ tel que s est un sommet de S_α, par connexité de S; d'ici le résultat 4.3.5 découle.

Cas NON: on raisonne par dualité pour un ν-retour minimal sur H.

Cas NN: tout retour minimal de G est un ν-retour et tout retour minimal de H est un μ-retour.

Soit (S, ψ) une stratégie d'évaluation donnée sur $\{G, H\}$. Nous allons définir un ensemble de graphes pointés $\{S^i\}_{i \in I}$ tel que, pour tout $i \in I$, S^i est un sous-graphe de S et de plus tel que $S \in \{S^i\}_{i \in I}$. Avec la relation d'inclusion stricte, à savoir $S_i \subset S_j$ si et seulement si $S_i \subseteq S_j$ et $S_i \neq S_j$, l'ensemble $\{S^i\}_{i \in I}$ est un graphe acyclique fini. Soit X un sous-graphe de S et définissons la propriété $P(X)$ comme il suit:

$$(4.3.15) \qquad P(X) \quad \Leftrightarrow \quad \forall s \in X_0 \,(\ \psi(s) = (g, h) \ \Rightarrow \ EV_G(g) \leq EV_H(h)\ )\ .$$

Pour montrer qu'elle est vraie pour tout graphe pointé S^i, $i \in I$, donc en particulier pour S, il suffit de démontrer l'implication:

$$(4.3.16) \qquad \forall i \in I (\, S^i \subset S^j \wedge P(S^i)\,) \ \Rightarrow \ P(S^j)\ .$$

Soit donc $A \subseteq S_1$ l'ensemble des arêtes $s \to s'$ telles que $\psi(s \to s')$ est une transition de la forme $(x, h) \to (S(x), h)$ ou $(g, y) \to (g, S(y))$, où x est un retour minimal de G et y est un retour minimal de H. Si $\alpha \in A$, soit $S^\alpha = \overline{\mathrm{cod}(\alpha)}$ le sous-graphe de S des descendants de $\mathrm{cod}(\alpha)$. À la fois soit $S^0 = S$ et posons $I = A \cup \{0\}$; on veut s'intéresser à la collection de graphes pointés $\{S^\alpha\}_{\alpha \in A} \cup \{S^0\}$.

Démontrons l'implication 4.3.16. Choisissons $j \in I$ et supposons que pour tout $i \in I$ tel que $S^i \subset S^j$ il est vrai que $P(S_i)$, où P est la propriété définie dans 4.3.15, c'est-à-dire que si s est un sommet de S^i et si $\psi(s) = (g, h)$, alors $EV_G(g) \leq EV_H(h)$. Nous allons étendre cette même propriété à chaque sommet de S^j.

Soit $A^j \subseteq A$ l'ensemble des arêtes $\alpha \in S^j_1$ telles que S^α est un sous-graphe propre de S^j; soit aussi $S^j \setminus A^j$ le sous-graphe de S^j obtenu en coupant les arêtes dans A^j: $(S^j \setminus A^j)_0 = S^j_0$ et $(S^j \setminus A^j)_0 = S^j_1 \setminus A^j$. Si enfin s^j_0 est le point de S^j, soit alors $S_j = \overline{S^j \setminus A^j, s^j_0}$ le graphe pointé de descendants de s^j_0 dans $S^j \setminus A^j$.

Nous allons enrichir le graphe pointé S_j avec une structure de stratégie d'évaluation sur $\{G', H'\}$, où G', H' sont deux sous-jeux de G, H respectivement, tels que $\chi(G')+\chi(H') < \chi(G)+\chi(H)$. De plus, G' et H' satisfont $EV_{G'}(g) = EV_G(g)$ et $EV_{H'}(h) = EV_H(h)$, pour toute position g de G' et h de H'. En utilisant l'hypothèse d'induction et ces égalités, on obtient que pour tout sommet s de S_j, si $\psi(s) = (g, h)$ alors $EV_G(g) \leq EV_H(h)$. D'ici, on trouve que la propriété 4.3.15 est vraie aussi pour le graphe S^j, en considérant que:

$$S^j_0 \;=\; (S_j)_0 \cup \bigcup_{S^\alpha \subset S^j} S^\alpha_0 \,.$$

Afin d'enrichir S_j avec la structure d'une stratégie d'évaluation, nous allons d'abord observer que:

4.3.17 *il existe un retour minimal x de G tel que si $\alpha \in A$ est une arête de S_j, alors $\psi(\alpha) \neq (x, h) \to (S(x), h)$, ou bien il existe un retour minimal y de H tel que si $\alpha \in A$ est une arête de S_j, alors $\psi(\alpha) \neq (g, y) \to (g, S(y))$.*

Nous démontrons ici 4.3.17. Supposons d'abord que $\chi(G) > 0$ et $\chi(H) > 0$. Si l'on trouve deux arêtes α_1, α_2 de A dans S_j alors elles sont reliées au même retour. En effet, on a que $S^{\alpha_1} = S^j = S^{\alpha_2}$ et l'on peut trouver des chemins $s^j_0 \to^* \mathrm{dom}(\alpha_i)$ et $\mathrm{cod}(\alpha_i) \to^* s^j_0$. Cela donne un cycle propre γ tel que les arêtes α_1 et α_2 sont sur ce cycle. Si α_1 est tel que $\psi(\alpha_1) = (x, h) \to (S(x), h)$, alors aussi α_2 est tel que $\psi(\alpha_2) = (x, h') \to (S(x), h')$. En effet, par la condition sur les cycles d'une stratégie d'évaluation, le cycle $\psi \circ \gamma$ ne peut pas visiter à la fois un retour minimal de type ν sur G et un retour minimal de type μ sur H. Donc le retour de α_2 est sur G et par minimalité il s'agit du même retour que celui de α_1. Puisque l'ensemble des retours minimaux dans H n'est pas vide, on peut choisir un retour minimal y de H afin de satisfaire la 4.3.17. Si α_1 est tel que $\psi(\alpha_1) = (g, y) \to (g, S(y))$, on choisit un retour minimal x de G afin de satisfaire la 4.3.17.

Supposons maintenant que $\chi(G)\chi(H) = 0$, par exemple à cause que $\chi(H) = 0$. On déduit que dans le graphe S_j il n'existe aucune arête α de l'ensemble A. En effet, si α est une telle arête, alors $S^\alpha = S^j$ et l'on peut trouver des chemins $s_0^j \to^* \mathrm{dom}(\alpha)$ et $\mathrm{cod}(\alpha) \to^* s_0^j$ pour construire un cycle γ de S sur lequel il se trouve α. Cependant, ce cycle contredit la condition sur les cycles d'une stratégie d'évaluation, car on y trouve le ν-retour minimal de α sur G sans que le cycle passe par aucun ν-retour sur H. Puisque $\chi(G) > 0$ on peut choisir un retour minimal de G afin de satisfaire la 4.3.17. De même, si $\chi(G) = 0$ et $\chi(H) > 0$, on peut choisir un retour minimal de H afin de satisfaire la 4.3.17. Cela termine la preuve de 4.3.17.

Cas NNO: supposons donc que l'on peut choisir un retour minimal y de H tel que si $\alpha \in A$ est une arête de S_j, alors $\psi(\alpha) \neq (g, y) \to (g, S(y))$. Écrivons $H = H_0[y = \mu_y.H_1[y]\,]$ et posons:

$$e \;=\; EV_H(y)\,.$$

Nous allons enrichir le graphe S_j avec la structure d'une stratégie d'évaluation sur $\{G, H_0[e]\}$ ou sur $\{G, H_1[e]\}$. Si $\psi(s_0^j) = (g, h)$ et h est un sommet de $H_i[y]$, pour un $i \in \{0, 1\}$, alors pour tout autre sommet s' de S_j si $\psi(s') = (g', h')$, alors h' est un sommet de $H_i[\bot]$, pour le même $i \in \{0, 1\}$. Soit ι l'inclusion de S_j dans S, on obtient donc une factorisation $\psi \circ \iota = \iota' \circ \psi_j$ comme dans le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
S_j \arrow[r, tail, "\iota"] \arrow[d, "\psi_j"] & S \arrow[d, "\psi"] \\
\langle G, H_i[\bot] \rangle \arrow[r, tail, "\iota'"] \arrow[d, "\zeta"] & \langle G, H_0[\,\mu_y.H_1[y]\,] \rangle \\
\langle G, H_i[e] \rangle &
\end{tikzcd}.$$

Ici $\iota' = \langle G, \iota_i \rangle$ et $\iota_i : H_i[\bot] \rightarrowtail H_0[\,\mu_y.H_1[y]\,]$ est l'injection canonique de jeux. Aussi, dans ce diagramme, la flèche ζ, définie par $\zeta(g, h) = (g, h)$, est un isomorphisme de graphes: pour s'en convaincre il suffit de remarquer qu'une transition de la forme $(g, y) \to (g', y)$ de $\langle G, H_i[\bot] \rangle$ est aussi une transition de $\langle G, H_i[e] \rangle$ et vice versa, à cause que $\neg\epsilon(g) \vee 0 = \neg\epsilon(g) \vee \sigma$ si $\epsilon(g) \neq 0$. Remarquons maintenant que:

4.3.18 *le couple* $(S_j, \zeta \circ \psi_j)$ *est une stratégie d'évaluation sur* $\{G, H_i[e]\}$.

Vérifions cela.

Par définition S_j est un graphe pointé transitif.

Soit $s \in S_j$ un sommet non-terminal tel que $\epsilon(\zeta \circ \psi_j(s)) = \pi$ et soit $\zeta \circ \psi_j(s) \to (g', h')$ une transition de $\langle G, H_i[e] \rangle$. On peut relever cette transition à une transition $\psi_j(s) \to (g', h')$ de $\langle G, H_i[\bot] \rangle$, car ζ est un isomorphisme de graphes. On peut donc relever la transition $\iota'(\psi_j(s) \to (g', h'))$ de $\langle G, H_0[\,\mu_y.H_1[y]\,] \rangle$ à une transition $\iota(s) \to s'$ de S, car $\iota'(\psi_j(s)) = \psi(\iota(s))$ et (S, ψ) est une stratégie d'évaluation. Cette transition est une transition de S_j sauf si $s \to s' \in A^j$, mais cela est impossible car si $s \to s' \in A$, alors $\epsilon(\psi(s)) = \sigma$ et l'on suppose ici que $\epsilon(\psi(s)) = \pi$. En effet, une transition de la forme $(x', h) \to (S(x'), h)$ où x' est un ν-retour de G est telle que avec $\epsilon(x') = \pi$ et donc elle est possible seulement si $\epsilon(x', h) = \sigma$; de même une transition de la forme $(g, y') \to (g, S(y'))$, où y' est un μ-retour de H, est possible seulement si $\epsilon(g, y') = \sigma$. La transition $s \to s'$ est donc dans S_j et elle est bien sur l'unique transition $s \to s'$ telle que $\zeta \circ \psi_j(s \to s') = \zeta \circ \psi_j(s) \to (g', h')$.

Afin de voir que chaque cycle γ est un cycle gagnant, on utilise le fait que $\iota' \circ \psi_j = \psi \circ \iota$ et que le cycle $\psi_j \circ \gamma$ est gagnant dans $\langle G, H_i[\perp]\rangle$ si et seulement si $\zeta \circ \psi_j \circ \gamma$ est un cycle gagnant dans $\langle G, H_i[e]\rangle$.

Enfin, les sommets terminaux dans S_j ont deux formes: soit ils sont de vieux sommets terminaux dans S, soit ils sont de nouveaux sommets terminaux de la forme $\mathrm{dom}(\alpha)$ pour une arête $\alpha \in A^j$. Dans le premier cas on sait que si s est un tel sommet et si $\psi(s) = (g, h)$ alors $EV_G(g) \leq EV_H(h) = EV_{H_i[e]}(h)$. Dans le second cas, S^α est un sous-graphe propre de S^j, et, par hypothèse d'induction, on a que $P(S^\alpha)$, où P est la propriété définie en 4.3.15. Si $\psi(\alpha) = (x', h) \to (S(x'), h)$, on sait alors que $EV_G(S(x')) \leq EV_H(h)$ car $\mathrm{cod}(\alpha)$ est un sommet de S^α. Rappelons que:

$$EV_G(S(x')) \;=\; EV(G_1[\nu]) \;=\; \nu \;= EV_G(x') \;,$$

où $\nu = \nu_z.EV(G_1[z])$ et $G_1[x']$ est obtenu comme d'habitude en découpant G à l'aide du retour minimal x'. On obtient que:

$$EV_G(x') \;\leq\; EV_H(h) \;=\; EV_{H_i[e]}(h) \;.$$

On raisonne de façon semblable si $\psi(\alpha) = (g, y') \to (g, S(y'))$, on a que $EV_G(g) \leq EV_H(S(y')) = EV_H(y') = EV_{H_i[e]}(y')$ et donc:

$$EV_G(g) \;\leq\; EV_{H_i[e]}(y') \;.$$

Avec cela, on a conclu la vérification de 4.3.18.

Puisque $\chi(H_i[e]) < \chi(H)$, si s est un sommet de S_j et $\zeta(\psi_j(s)) = (g, h)$, alors $EV_G(g) \leq EV_{H_i[e]}(h)$. Étant donné que pour tout sommet h de $H_i[e]$ on a que $EV_{H_i[e]}(h) = EV_H(h)$, on peut conclure que si s est un sommet de S_j et $\psi(s) = (g, h)$, alors $EV_G(g) \leq EV_H(h)$.

Cas NNN: s'il existe un retour minimal x de G tel que si $\alpha \in A$ est une arête de S_j, alors $\psi(\alpha) \neq (x, h) \to (S(x), h)$, on représente G comme $G_0[\nu_x.G[x]]$. Si $\psi(s_0^j) = (g, h)$, on peut enrichir S_j avec la structure d'une stratégie d'évaluation sur $\{G_i[e], H\}$, où $i = 0$ si et g est une position de $G_0[x]$, $i = 1$ si g est une position de $G_1[x]$. À cause du choix:

$$e = EV_G(x)$$

et de l'hypothèse d'induction, on obtient que si s est un sommet de S_j et $\psi(s) = (g, h)$, alors $EV_G(g) \leq EV_H(h)$.

De cette façon nous avons conclu la preuve de l'implication 4.3.16, et donc nous avons aussi conclu la preuve de la proposition 4.3.5. $\square$

CHAPITRE V

LE μ-TREILLIS $\mathcal{J}_P$ EST FONDÉ

Dans ce chapitre nous allons montrer que le μ-treillis libre $\mathcal{J}_P$ peut être plongé dans un treillis complet et ce plongement est un morphisme de μ-treillis. On a vu (cf. 1.2.19) que tout μ-treillis fondé peut être plongé dans un treillis complet et nous montrons que le μ-treillis libre $\mathcal{J}_P$ est fondé. Cela entraîne que la variété équationelle des μ-treillis est engendrée par la classe des treillis complets ou encore, si l'on utilise un point de vue logique, que l'axiomatisation « naturelle » des termes est complète si l'on se restreint à l'interprétation des termes sur les treillis complets. Il en découle aussi le principe logique suivant: si l'on veut prouver qu'une propriété du plus petit point préfixe d'un opérateur ϕ, construit à partir des infima et suprema finis et des points fixes, est universellement vraie, on peut le faire en supposant que:

$$\mu_z.\phi(z) \quad = \quad \bigvee_{\alpha \in Ord} \phi^{\alpha}(\bot) \ ,$$

où $\phi^{\alpha}(\bot)$ est défini comme d'habitude, pour tout ordinal α. Essentiellement, on peut se servir du principe d'induction transfinie.

Dans la seconde partie de ce chapitre nous allons donner une preuve que $\mathcal{J}_P$ est le μ-treillis fondé libre en utilisant des arguments conventionnels, c'est-à-dire que ces arguments font recours aux chaînes descendantes d'ordinaux.

5.1 Un théorème de complétude

Proposition 5.1.1 Supposons que l'équipe π a une stratégie gagnante dans le jeu $\langle \mu_x.G[x], H\rangle$. Il existe alors un nombre entier $k \geq 0$ et une stratégie gagnante pour π dans le jeu $\langle G^k[\bot], H\rangle$.

Preuve. Nous allons montrer qu'il existe une stratégie gagnante pour le joueur π dans un jeu de la forme $\langle G^k_\sigma[\bot], H\rangle$. On peut aisément montrer par induction que le jeu $G^k_\sigma[\bot]$ est équivalent au jeu $G^k[\bot]$ et cela enfin entraîne que le joueur π a une stratégie dans le jeu $\langle G^k_\sigma[\bot], H\rangle$.

Nous allons considérer le jeu $G^\omega_\sigma[\bot]$, dont on a donné la définition en 2.4.11, qui est un revêtement du jeu $\mu_x.G[x]$. Cela entraîne que le jeu $\langle G^\omega_\sigma[\bot], H\rangle$ est un revêtement du jeu $\langle \mu_x.G[x], H\rangle$. À la fois le jeu $G^n_\sigma[\bot]$ est un sous-jeu du jeu $G^\omega_\sigma[\bot]$ et donc $\langle G^n_\sigma[\bot], H\rangle$ est un sous-jeu du jeu $\langle G^\omega_\sigma[\bot], H\rangle$:

$$\begin{tikzcd}
\langle G^n_\sigma[\bot], H\rangle \arrow[r, tail, "i"] & \langle G^\omega_\sigma[\bot], H\rangle \arrow[d, "p"] \\
 & \langle \mu_x.G[x], H\rangle
\end{tikzcd}$$

Car p est un morphisme étale, une stratégie gagnante pour le joueur π dans $\langle \mu_x.G[x], H\rangle$ induit une stratégie gagnante pour π dans le jeu $\langle G^\omega_\sigma[\bot], H\rangle$ et l'on veut chercher une condition qui nous assure que cette stratégie peut être restreinte à une stratégie gagnante pour π dans le jeu $\langle G^n_\sigma[\bot], H\rangle$.

Définition 5.1.2 Soit $\gamma : \hat{n} \longrightarrow \langle \mu_x.G[x], H\rangle$ un chemin tel que $\gamma(0) = (g_0, h_0)$. Ce chemin possède un unique relèvement $\gamma' : \hat{n} \longrightarrow \langle G^\omega_\sigma[\bot], H\rangle$ tel que $\gamma'(0) = (g_0, 0, h_0)$ et $p \circ \gamma' = \gamma$. Posons:

$$\chi(\gamma) \;=\; k\ ,\ \text{ si } \gamma'(n) = (g, k, h)\ .$$

Lemme 5.1.3 Soit S une stratégie pour π dans le jeu $\langle \mu_x.G[x], H\rangle$ telle que pour tout chemin γ, joué en accord avec cette stratégie, on a que $\chi(\gamma) \leq k$. Alors S induit une stratégie S' pour π dans le jeu $\langle G^k_\sigma[\perp], H\rangle$.

Preuve. Nous allons identifier une stratégie S dans un jeu K avec l'ensemble des chemins $\{\gamma_i : \hat{n}_i \longrightarrow K\}_{i\in I}$ tels que $\gamma(0) = k_0$ qui ont été joués en accord avec cette stratégie. Si $p : K' \longrightarrow K$ est un revêtement, on obtient une stratégie S' à partir d'une stratégie S en prenant les relèvements des chemins. Soit donc S une stratégie dans le jeu $\langle \mu_x.G[x], H\rangle$ et soit S' la stratégie ainsi obtenue dans le jeu $\langle G^\omega_\sigma[\perp], H\rangle$; montrons que le joueur π peut utiliser cette stratégie pour jouer et gagner dans $\langle G^k_\sigma[\perp], H\rangle$.

Observons en premier que si (g, n, h) est une position de $\langle G^k_\sigma[\perp], H\rangle$ telle que $\epsilon(g, n, h) = \sigma$ et s'il existe un mouvement $(g, n, h) \to (g', n', h')$, alors ce mouvement est aussi un mouvement dans $\langle G^k_\sigma[\perp], H\rangle$. En effet, on a que $n \leq k$ et si $n' = k + 1$, alors la transition $(g, n, h) \to (g', n', h')$ est $(x, k, h) \to (S(x), k + 1, h)$. Mais l'on voit que dans ce cas $\epsilon(x, k, h) = \pi$, car $\epsilon(x) = \sigma$. Cela entraîne que la restriction de la stratégie S' à $\langle G^k_\sigma[\perp], H\rangle$ est fermée sous les mouvements de σ.

Vérifions que le joueur π peut toujours prolonger la partie quand il a le devoir de jouer. Soit donc γ un chemin joué à l'aide de la stratégie S' et soit $\gamma(n) = (g, s, h)$ la position ainsi atteinte; supposons aussi que $\epsilon(g, s, h) = \pi$. À partir de cette position le jeu peut être prolongé dans $\langle G^\omega_\sigma[\perp], H\rangle$, disons avec un mouvement $(g, s, h) \to (g', s', h')$. On suppose que $s \leq k$ et donc un tel mouvement peut être restreint à $\langle G^k_\sigma[\perp], H\rangle$ sauf s'il est de la forme $(x, k, h) \to (S(x), k + 1, h)$. Mais cela contredit l'hypothèse faite sur S que tout chemin joué est tel que $\chi(\gamma) \leq k$, donc il est clair qu'un tel mouvement n'a pas cette forme et il peut être restreint à $\langle G^k_\sigma[\perp], H\rangle$.

Soit enfin γ un chemin infini joué avec cette stratégie. Alors $i \circ \gamma \in W_\pi$ ce qui entraîne que γ est un chemin infini gagnant pour π dans le jeu $\langle G^k_\sigma[\perp], H\rangle$. □

Lemme 5.1.4 Soit $p : K \longrightarrow \langle \mu_x.G[x], H\rangle$ un revêtement fini et soit S une stratégie sans mémoire dans K. Posons:

$$k \;=\; \text{card } p^{-1}(\ \{\ (x, h) \to (S(x), h) \mid h \in H_0\ \}\ )\ .$$

Pour tout chemin γ joué selon la stratégie S on a que $\chi(\gamma) \leq k$.

Preuve. Supposons qu'il existe un chemin γ, joué en accord avec la stratégie S, tel que $\chi(\gamma) > k$. On peut déduire qu'on a passé deux fois par une même arête $\tau : k \to k'$ telle que $p(k \to k') = (x, h) \to (S(x), h)$. On peut alors factoriser γ comme $\gamma_2 \circ \tau \circ \gamma_1 \circ \tau \circ \gamma_0$, pour obtenir un chemin infini $(\gamma_1 \circ \tau)^\omega$ dans S. Mais ce chemin passe infiniment souvent au-dessus de l'arête $x \to S(x)$ et par conséquent il est un chemin gagnant pour σ dans le jeu K. Cela contredit le fait que S est une stratégie gagnante pour le joueur π. $\square$

On peut continuer avec la preuve de la proposition 5.1.1. On obtient le résultat en observant que s'il existe une stratégie pour π dans le jeu $\langle \mu_x.G[x], H \rangle$, alors il existe une stratégie à mémoire finie, c'est-à-dire qu'il existe un revêtement fini $p : K \longrightarrow \langle \mu_x.G[x], H \rangle$ et une stratégie sans mémoire S dans K. Si k est comme dans le lemme précédant, alors l'équipe π possède une stratégie dans le jeu $\langle G^k_\sigma[\perp], H \rangle$. $\square$

Proposition 5.1.5 Dans le μ-treillis $\mathcal{J}_P$ les relations suivantes sont vraies:

$$\begin{aligned} \mu.\psi &= \bigvee_{n \geq 0} \psi^n(\perp) , \\ \nu.\psi &= \bigwedge_{n \geq 0} \psi^n(\perp) , \end{aligned}$$

où ψ est un opérateur unaire induit par un jeu-opérateur $G[x]$ sur $\mathcal{J}(P)$. Donc le μ-treillis $\mathcal{J}_P$ est fondé.

Preuve. Soit $G[x]$ un jeu-opérateur sur $\mathcal{J}(P)$. Il est clair que pour tout $n \geq 0$ on a $G^n[\perp] \vdash \mu_x.G[x]$. Soit par contre $H \in \mathcal{J}(P)$ un jeu tel que pour tout $n \geq 0$ on a $G^n[\perp] \vdash H$, c'est-à-dire que le médiateur σ possède une stratégie gagnante dans le jeu $\langle G^n[\perp], H \rangle$. Si $\mu_x.G[x] \not\vdash H$ alors le joueur π a une stratégie gagnante dans le jeu $\langle \mu_x.G[x], H \rangle$ et, en accord avec la proposition 5.1.1, il a aussi une stratégie dans un des jeux $\langle G^n[\perp], H \rangle$, mais cela n'est pas possible.

On utilise un résultat dual à celui de la proposition 5.1.1 pour montrer que la propriété duale est aussi vraie. $\square$

Corollaire 5.1.6 Le μ-treillis libre $\mathcal{J}_P$ peut être plongé dans un treillis complet et ce plongement est un morphisme de μ-treillis.

Preuve. Le résultat est vrai pour tout μ-treillis fondé (cf. le corollaire 1.2.19) et le μ-treillis libre est fondé. $\square$

Théorème 5.1.7 Soient $l, m \in \mathcal{J}_P$ tels que pour tout treillis complet L et pour tout opérateur $f : P \longrightarrow L$ on a $\tilde{f}(l) \leq \tilde{f}(m)$, où $\tilde{f}$ est définie par extension de f; on a alors que $l \leq m$. À savoir: la sémantique des treillis complets est complète.

Preuve. Il suffit de choisir un plongement $i : \mathcal{J}_P \rightarrowtail L$ où L est un treillis complet. Alors $i(l) \leq i(m)$ et donc $l \leq m$. $\square$

5.2 Le μ-treillis $\mathcal{J}_P$ est le μ-treillis fondé libre sur P

Le but de cette section est de donner une preuve de la proposition suivante, qui est d'abord une alternative à la proposition plus générale 4.3.7.

Proposition 5.2.1 Soit L un μ-treillis fondé et soit $f : P \longrightarrow L$ un opérateur. Il existe un unique morphisme de μ-treillis $\tilde{f} : \mathcal{J}_P \longrightarrow L$ tel que $\tilde{f} \circ \eta_P = f$.

C'est-à-dire que le μ-treillis $\mathcal{J}_P$ est le μ-treillis fondé libre sur P. La preuve n'est pas une innovation conceptuelle par rapport à la littérature existante sur le μ-calcul; nous ajoutons cette preuve afin de montrer le rapport avec des autres techniques bien connues. Par contre, cette preuve suggère une autre façon possible de montrer que le μ-treillis $\mathcal{J}_P$ est libre: il suffit de montrer que le μ-treillis libre sur P, que nous allons appeler ici $F_\mu(P)$, est fondé.

Proposition 5.2.2 Le μ-treillis $\mathcal{J}_P$ est libre sur l'ensemble ordonné P si et seulement si le μ-treillis libre $F_\mu(P)$ est fondé.

Preuve. Si $\mathcal{J}_P$ est libre sur P, alors $\mathcal{J}_P$ est isomorphe à $F_\mu(P)$ et donc $F_\mu(P)$ est fondé car $\mathcal{J}_P$ est fondé. Par contre, si $F_\mu(P)$ est fondé, alors il existe des isomorphismes de

μ-treillis $f_1 : \mathcal{J}_P \longrightarrow F_\mu(P)$ et $f_2 : F_\mu(P) \longrightarrow \mathcal{J}_P$, obtenus par propriété universelle après les identifications des générateurs. $\square$

Comme d'habitude, pour démontrer la proposition 5.2.1, il suffit de montrer que $EV : \mathcal{J}(L) \longrightarrow L$ préserve l'ordre. Dans ce cas, si $f : P \longrightarrow L$ est un opérateur et L est un μ-treillis fondé, alors le composé:

$$\mathcal{J}_P \xrightarrow{\mathcal{J}_f} \mathcal{J}_L \xrightarrow{EV_L} L$$

est l'extension de f cherchée.

Proposition 5.2.3 Soit L un μ-treillis fondé et soient $G, H \in \mathcal{J}(L)$. Si $G \vdash H$, alors $EV(G) \leq EV(H)$.

En effet nous allons montrer que:

Proposition 5.2.4 Soit L un μ-treillis fondé, soient $G, H \in \mathcal{J}(L)$ et supposons que $EV(G) \not\leq EV(H)$. Il existe alors une stratégie gagnante pour l'équipe π dans le jeu $\langle G, H \rangle$.

Preuve. Pour décrire une stratégie gagnante pour l'équipe π dans le jeu $\langle G, H \rangle$ il suffit de décrire une stratégie pour σ sur G, tout en lui reconnaissant le droit de connaître la position globale (g, h) dans le jeu $\langle G, H \rangle$ et aussi de décrire une stratégie pour le joueur π sur H. Enfin, il faut se convaincre que si le joueur σ sur G et le joueur π sur H jouent de cette façon et si un couple de sommets terminaux $(x, y) \in X_G \times X_H$ est atteint, alors $\lambda(x) \not\leq \lambda(y)$.

La stratégie pour le joueur σ sur G est décrite par induction sur la structure de G. La stratégie du joueur π sur H est décrite implicitement par dualité.

Si $G = \eta(p)$, le joueur σ a une seule stratégie possible, c'est-à-dire ne rien faire.

Si $G = \bigwedge_{i \in I} G_i$, on a que $\epsilon g_0 = \pi$ et le joueur σ doit attendre un mouvement du joueur π sur G. On sait que $EV(\bigwedge_{i \in I} G_i) \not\leq EV(h)$ et aussi $EV(\bigwedge_{i \in I} G_i) = \bigwedge_{i \in I} EV(G_i)$.

Un mouvement de l'équipe σ sur G est de la forme $(g_0, h) \to (g_i, h)$, de plus $EV(G_i) = EV_G(g_i) \not\leq EV_H(h)$ pour tout $i \in I$, car s'il existe $j \in I$ tel que $EV(G_j) \leq EV(h)$ alors on a aussi $EV(\bigwedge_{i \in I} G_i) \leq EV(h)$. Par hypothèse d'induction, pour tout i il existe des stratégies sur $\langle G_i, (H, h)\rangle$ et on peut les recoller pour obtenir une stratégie pour π dans le jeu $\langle \bigwedge_{i \in I} G_i, (H, h)\rangle$.

Si $G = \bigvee_{i \in I} G_i$, alors $\epsilon g_0 = \sigma$. Si pour tout $i \in I$ $EV(G_i) \leq EV(h)$, alors on a aussi $EV(\bigvee_{i \in I} G_i) = \bigvee_{i \in I} EV(G_i) \leq EV_H(h)$, contre les hypothèses. Il existe donc $j \in I$ tel que $EV(G_j) \not\leq EV_H(h)$. Par hypothèse d'induction, il existe une stratégie dans le jeu $\langle G_j, (H, h)\rangle$. Le joueur σ sur G choisit la transition $(g_0, h) \to (g_j, h)$ et utilise cette stratégie.

Si $G = \nu_x.G'[x]$ alors $\epsilon g_0 = \pi$; supposons que $EV(\nu_x.G'[x]) \not\leq EV_H(h)$. Posons $\nu = EV(G)$, on sait alors que $EV(G'[\nu]) = \nu \not\leq EV(h)$ et le joueur σ sur G peut jouer en accord avec la stratégie définie sur $\langle G'[\nu], (H, h)\rangle$, après le mouvement $x \to S(x)$ du joueur π sur G.

Enfin, si $G = \mu_x.G'[x]$ alors $\epsilon g_0 = \sigma$; supposons que $EV(G) \not\leq EV_H(h)$. Posons $\mu = \mu_z.EV(G'[z]) = \bigvee_{\alpha \in Ord} EV(G'[z])^\alpha(\perp)$ et $\mu^\alpha = EV(G'[z])^\alpha(\perp)$.

Soit $h_0 = h$, puisque $EV(G) = \mu = \bigvee_{\alpha \in Ord} \mu^\alpha \not\leq EV_H(h)$, il existe un premier $\alpha_0 \in Ord$ tel que $\mu^{\alpha_0} \leq EV_H(h_0)$ mais $\mu^{\alpha_0+1} \not\leq EV_H(h_0)$. Le joueur σ peut alors choisir l'unique mouvement $x \to S(x)$ et puis jouer à l'aide d'une stratégie S_0 que par hypothèse d'induction on suppose déjà définie dans le jeu $\langle G'[\mu^{\alpha_0}], (H, h_0)\rangle$.

Supposons qu'on est en train de jouer avec une stratégie S_n dans le jeu $\langle G'[\mu^{\alpha_n}], (H, h_n)\rangle$. Cette stratégie est telle que $EV(g) \not\leq EV(h)$, pour tout couple (g, h) de sommets visités. De plus, l'on connaît que $\mu^{\alpha_n} \leq EV_H(h_n)$ mais $\mu^{\alpha_{n+1}} \not\leq EV_H(h_n)$. À un nouveau passage par une position de la forme (x, h') on obtiendra que $h_{n+1} = h'$ est tel que $\mu^{\alpha_n} \not\leq EV_H(h_{n+1})$. Puisque $\mu^{\alpha_n} = \bigvee_{\alpha \leq \alpha_n} \mu^\alpha$, soit α_{n+1} le plus petit ordinal tel que $\mu^{\alpha_{n+1}} \leq EV_H(h_{n+1})$ mais $\mu^{\alpha_{n+1}+1} \not\leq EV_H(h_{n+1})$, clairement $\alpha_{n+1} < \alpha_n$. On peut donc choisir l'unique transition $x \to S(x)$ et continuer avec une stratégie S_{n+1} dans le jeu

$\langle G'[\mu^{\alpha_{n+1}}], (H, h_{n+1})\rangle$.

Puisque chaque suite strictement décroissante d'ordinaux est finie et chaque passage par le sommet x entraîne l'existence d'un α_n plus petit, il suit que éventuellement en jouant de cette façon on ne pourra plus passer par un sommet de la forme (x, h'). $\square$

APPENDICE A

SUR LES JEUX DE RABIN À CHAÎNE

Le but de cet appendice est de donner une preuve par induction de la formule de point fixe (Emerson et Jutla, 1991; Walukiewicz, 1996) qui décrive l'ensemble des positions gagnantes dans un jeu de Rabin à chaîne (aussi appelé jeu de parité). Cette preuve est à l'origine des idées présentées dans cette thèse. De plus, ce résultat est nécessaire afin d'obtenir le théorème 3.3.5.

Afin d'interpréter les formules avec variables libres et les opérateurs de point fixe du μ-calcul, nous développons des concepts similaires sur les jeux: nous introduisons les notions de jeu partiel et de $\mu\backslash\nu$-opérateurs sur les jeux partiels.

Un jeu partiel est un jeu où l'on peut atteindre des positions terminales: dans une telle position, aucun joueur a ni le pouvoir ni le devoir de continuer. Si l'on adopte un point de vu algébrique, une position terminale est une variable et un jeu partiel est une fonction qui associe, par usuelle substitution de termes pour des variables, à un vecteur de jeux un jeu. Si l'on ajoute à un jeu partiel des arêtes à partir des positions terminales, on peut introduire des nouveaux chemins infinis. Selon que ces nouveaux chemins infinis sont déclarés gagnants pour un joueur ou l'autre, on obtient deux jeux différents. Dans le contexte de la théorie combinatoire des jeux (Conway, 1976) ces deux constructions ont été appelées $G(on)$ et $G(off)$ (Conway, 1978); nous dénotons ces mêmes constructions à l'aide des opérateurs ν et μ.

La théorie des ensembles de positions gagnantes est développée par rapport à ces constructions, d'une façon telle que l'on peut montrer une correspondance entre les formules de point fixe qui décrivent ces ensembles et les constructions sur les jeux. Nous montrons que les jeux de Rabin à chaîne peuvent être représentés comme une suite de ces constructions. La formule de point fixe pour les positions gagnantes dans ce type de jeux découle comme une conséquence immédiate de cette représentation.

Par rapport aux autres preuves du théorème de détermination des jeux de Rabin (Gurevich et Harrington, 1982; McNaughton, 1993; Thomas, 1997; Zielonka, 1998), la preuve par induction de la formule de point fixe pour l'ensemble des positions gagnantes dans un jeu de Rabin met en évidence les deux constructions μ et ν, à l'aide desquelles on va décrire les points fixes dans les μ-treillis libres.

A.1 Les opérations de Rabin sur les jeux partiels

Définition A.1.1 Un *jeu partiel* $G[X]$ est un triplet $\langle G, \epsilon, W_\sigma \rangle$ où:

- $G = \langle G_0, G_1 \rangle$ est un graphe (de positions et mouvements),
- $\epsilon : G_0 \longrightarrow \{\sigma, \pi, 0\}$ est un étiquetage (des positions),
- $W_\sigma \subseteq \text{Graphes}(\hat{\omega}, G)$ est un sous-ensemble de chemins infinis dans G.

Ici $\hat{\omega}$ est le graphe $0 \to 1 \to \ldots \to n \to \ldots$ et $\text{Graphes}(\hat{\omega}, G)$ est l'ensemble des morphismes de graphes de $\hat{\omega}$ vers G. On va écrire X pour $\epsilon^{-1}(0)$ et l'on demande que la condition suivante soit satisfaite: si $x \in X$ alors $\{ x' \mid x \to x' \} = \emptyset$. Aussi on demande que $\gamma \in W_\sigma$ si et seulement si $\partial\gamma \in W_\sigma$, où $\partial\gamma(n) = \gamma(n+1)$.

On explique la définition précédente comme suit: G_0 est un ensemble de positions et G_1 est un ensemble de mouvements. Si $\epsilon(g) = \sigma$, alors le joueur σ doit choisir un mouvement, si $\epsilon(g) = \pi$, le joueur π doit choisir un mouvement. Si $\epsilon(g) = 0$, aucun joueur doit choisir un mouvement et de cette position il n'est pas possible de faire un mouvement. W_σ est l'ensemble des chemins infinis gagnants pour le joueur σ. De même, écrivons W_π pour le complémentaire de W_σ, W_π est l'ensemble des chemins infinis gagnantes pour π.

En général, on peut imaginer le jeu $G^{op}[X]$ où les joueurs σ et π s'échangent les rôles; ce jeu est défini par $G^{op}[X] = \langle G, \neg\epsilon, W_\pi \rangle$, où $\neg\pi = \sigma$ et vice-versa.

Définition A.1.2 Soit $G[X] = \langle G, \epsilon, W_\sigma \rangle$ un jeu partiel et soit S le système d'équations suivant:

$$\{\ x \ = \ \mathrm{OP}^x S(x)\ \}_{x \in X} \ .$$

Ici $\mathrm{OP}^x \in \{\bigvee, \bigwedge\}$ et $S(x) \subseteq G_0$. Les jeux $\mu_S.G[X]$ et $\nu_S.G[X]$ sont définis, à l'aide du triplet $\langle H, \epsilon', W'_\sigma \rangle$, de la façon suivante:

- le graphe H est obtenu de G en ajoutant des arêtes $x \to g$ pour tout $x \in X$ et $g \in S(x)$,
- ϵ' est obtenu en posant $\epsilon' g = \epsilon g$ si $g \in G_0 \setminus X$, $\epsilon' x = \sigma$ si $x \in X$ et $\mathrm{OP}^x = \bigvee$, $\epsilon' x = \pi$ si $x \in X$ et $\mathrm{OP}^x = \bigwedge$,
- W'_σ est défini par:
  - cas $\mu_S.G[X]$:
    $$W'_\sigma \ = \ \{\ \gamma : \hat{\omega} \longrightarrow H \mid \gamma \in_{ev} W_\sigma\ \}\ ,$$
    et donc on a $W'_\pi = \{\, \gamma : \hat{\omega} \longrightarrow H \mid \neg\,(\,\gamma \in_{ev} W_\sigma\,)\,\}$,
  - cas $\nu_S.G[X]$:
    $$W'_\sigma \ = \ \{\ \gamma : \hat{\omega} \longrightarrow H \mid \neg\ (\ \gamma \in_{ev} W_\pi\ )\ \}\ ,$$
    et donc on a $W'_\pi = \{\, \gamma : \hat{\omega} \longrightarrow H \mid \gamma \in_{ev} W_\pi\,\}$.

Ici $\gamma \in_{ev} W$ (lire: γ appartient éventuellement à W) si et seulement si $\partial^n \gamma \in W$, i.e. $\gamma(n) \to \gamma(n+1) \to \ldots \in W$, pour quelque $n \geq 0$.

Définition A.1.3 Soit $G[X]$ un jeu partiel et soit $A \subseteq G_0$ un sous-ensemble de positions. On obtient le jeu $G[X \cap A]$ si l'on déclare que les positions dans $X \cap A$ sont gagnantes pour σ et les positions dans $X \cap A^c$ sont gagnantes pour π. Formellement si $G[X] = \langle G, \epsilon, W_\sigma \rangle$, alors $G[X \cap A] = \langle G, \epsilon', W_\sigma \rangle$, où ϵ' est obtenu en posant $\epsilon' g = \epsilon g$ si $g \in G_0 \setminus X$, $\epsilon' x = \pi$ si $x \in X \cap A$, $\epsilon' x = \sigma$ si $x \in X \setminus A$. On peut voir aussi que $G[X \cap A] = \mu_S.G[X] = \nu_S.G[X]$ où S est le système d'équations:

$$\left\{ \begin{array}{lll} x & = \top, & x \in A \\ x & = \bot, & x \notin A \end{array} \right\},$$

où comme usuel $\top = \bigwedge \emptyset$ et $\bot = \bigvee \emptyset$.

On peut étendre les définitions A.1.2 et A.1.3 afin d'obtenir un jeu partiel à partir d'un jeu partiel. Soit $G[X]$ un jeu partiel et soit $X_1, \ldots, X_n$ une partition de X, on écrit alors $G[X_1, \ldots, X_n]$.

Soit S_1 est le système d'équations suivant:

$$\{ \; x \; = \; \mathrm{OP}^x S(x) \; \}_{x \in X_1} \; .$$

On peut définir les jeux partiels $(\,\mu_{S_1}.G[X_1]\,)[X_2, \ldots, X_n]$ et $(\,\nu_{S_1}.G[X_1]\,)[X_2, \ldots, X_n]$ exactement comme dans la définition A.1.2, en substituant X par X_1.

On définit aussi $(\,G[X_1 \cap A]\,)[X_2, \ldots, X_n]$ en déclarant les positions dans $X_1 \cap A$ gagnantes pour σ et celles dans $X_1 \cap A^c$ gagnantes pour π. Observons que dans une suite de ces opérations le résultat ne dépende pas de l'ordre, d'où l'on peut écrire:

$$G[\,\{X_i \cap A_i\}_{i \in S}\,] \; ,$$

où $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ et $A_i \subseteq G_0$ pour tout $i \in S$. Remarquons aussi que l'on a:

$$(\,Q_{S_1}.G[X_1]\,)[\{X_i \cap A_i\}_{i>1}] \;\; = \;\; Q_{S_1}.(\,G[\,\{X_i \cap A_i\}_{i>1}\,]\,)[X_1] \; .$$

A.2 Opérateurs sur les positions

Le but de cette section est de montrer que pour un jeu G de la forme $Q_S.G[X]$ avec $Q \in \{\mu, \nu\}$, si pour tout $A \subseteq G_0$ l'on connaît l'ensemble $WP_\sigma(A)$ des positions gagnantes pour le joueur σ dans le jeu $G[X \cap A]$, alors on peut décrire un ensemble WP_σ de positions gagnantes pour σ dans G à l'aide d'une formule de point fixe.

Définition A.2.1 Posons qu'un jeu partiel $G[X]$ est *complet* si $X = \emptyset$.

Soit G un jeu complet et $g \in G_0$ une position de G. Nous allons ici éclaircir la signification de propositions comme « *il existe une stratégie gagnante pour σ dans G à partir de g* », « *il existe une stratégie gagnante pour σ dans $\langle G, g \rangle$* », « *il existe une stratégie gagnante sans mémoire pour σ dans $\langle G, g \rangle$* ».

Soient $\langle K, k_0 \rangle$, $\langle G, g_0 \rangle$ deux graphes pointés. Rappelons qu'un couple de fonctions $\psi_i : K_i \longrightarrow G_i$, $i = 0, 1$, est un morphisme de graphe si $\mathrm{dom}(\psi_1(\kappa)) = \psi_0(\mathrm{dom}(\kappa))$ et $\mathrm{cod}(\psi_1(\kappa)) = \psi_0(\mathrm{cod}(\kappa))$ pour tout $\kappa \in K_1$. Il est un morphisme de graphes pointés si en plus $\psi(k_0) = g_0$. Il est étale si, pour tout $k \in K_0$ et $\alpha \in G_1$ tel que $\mathrm{dom}(\alpha) = \psi_0(k)$, il existe un unique κ tel que $\mathrm{dom}(\kappa) = k$ et $\psi_1(\kappa) = \alpha$, cf. (Joyal, Nielsen et Winskel, 1996).

Définition A.2.2 Soit $\langle G, g_0 \rangle$ un jeu partiel avec une position de départ donnée. Un *revêtement* de G est un couple $\langle K, \psi \rangle$ où K est un graphe pointé et $\psi : K \longrightarrow \langle G, g \rangle$ est un morphisme étale de graphes pointés. Nous allons dire que ce revêtement est *fini* si, pour tout $g \in G_0$, $\psi^{-1}(g)$ est un ensemble fini.

Définition A.2.3 Soit $\langle G, g_0 \rangle$ un jeu partiel avec position de départ. L'*arborescence de G* est le revêtement $\langle T(G), e \rangle$ de G défini comme il suit.

- Un sommet de $T(G)$ est un couple (γ, n) où $n \geq 0$ et $\gamma : \hat{n} \longrightarrow \langle G, g_0 \rangle$ est un morphisme de graphes pointés. Ici $\hat{n}$ est le graphe $0 \to 1 \to \ldots \to n$ pointé par 0. On peut penser que γ est une partie finie dans G qui a son debut à la position de départ.
- La position de départ de $T(G)$ est l'unique chemin de longueur nulle qui a son debut au sommet g_0.

- Il existe une transition $(\gamma, n) \to (\gamma, m)$ si et seulement si $m = n+1$ et $\gamma = \gamma' \circ i_n$, où $i_n : \hat{n} \longrightarrow \widehat{n+1}$ est l'unique morphisme de graphes pointés.
- Le morphisme étale $e : T(G) \longrightarrow \langle G, g_0 \rangle$ est défini par $e(\gamma, n) = \gamma(n)$.

Définition A.2.4 Soit $\langle G, g_0 \rangle$ un jeu complet avec position de départ. Une *stratégie gagnante* pour le joueur σ dans ce jeu est un sous-graphe-pointé transitif – cf. 4.3.8 – S de $T(G)$ (donc une sous-arborescence de $T(G)$) tel que:

- si $\epsilon(e(s)) = \sigma$, alors il existe $s' \in S$ tel que $s \to s'$,
- si $\epsilon(e(s)) = \pi$ et $s \to (\gamma, n)$, alors $(\gamma, n) \in S$,
- pour tout chemin infini $\gamma' : \hat{\omega} \longrightarrow S$ on a que $e \circ \gamma' \in W_\sigma$.

Définition A.2.5 Soit $\langle G, g_0 \rangle$ un jeu complet avec position de départ. Une *stratégie gagnante sans mémoire* pour le joueur σ dans ce jeu est un sous-graphe-pointé transitif S de G tel que:

- si $\epsilon(s) = \sigma$, alors il existe $s' \in S$ tel que $s \to s'$,
- si $\epsilon(s) = \pi$ et $\alpha : s \to g$, alors la transition α est une transition de S,
- pour tout chemin infini $\gamma : \hat{\omega} \longrightarrow S$ on a $\gamma \in W_\sigma$.

Définition A.2.6 Soit $\langle G, g_0 \rangle$ un jeu complet avec position de départ. Une *stratégie gagnante à mémoire bornée* pour le joueur σ dans ce jeu est un couple $\langle \langle K, \psi \rangle, S \rangle$ où $\langle K, \psi \rangle$ est un revêtement fini de G et S est une stratégie gagnante sans mémoire dans le jeu complet avec position de départ $\langle K, k_0, \epsilon', W'_\sigma \rangle$, où $\epsilon' = \epsilon \circ \psi$ et $\gamma' \in W'_\sigma$ si et seulement si $\psi \circ \gamma' \in W_\sigma$.

Des notions similaires, par exemple celle de stratégie gagnante pour le joueur π, sont définies comme ci-dessus en échangeant π et σ.

Définition A.2.7 Soit G un jeu complet. Posons:

$$\begin{aligned} WP_\sigma[G] \quad &= \\ &\{ \, v \in G_0 \mid \text{il existe une stratégie gagnante pour } \sigma \text{ dans } \langle G, v \rangle \, \} \end{aligned}$$

et définissons $WP_\pi[G]$ de façon semblable. Évidemment:

$$WP_\pi[G] \;=\; WP_\sigma[G^{op}] \,.$$

Soit $\langle G_0, G_1 \rangle$ un graphe donné et soit $A \subseteq G_0$. Rappelons que:

$$\begin{aligned} \Diamond A &= \{ \, g \in G_0 \mid \exists g' \, (\, g \to g' \; \wedge \; g' \in A \,) \, \} \,, \\ \Box A &= \{ \, g \in G_0 \mid \forall g' \, (\, g \to g' \; \Rightarrow \; g' \in A \,) \, \} \,. \end{aligned}$$

Définition A.2.8 Soit G un jeu complet. Pour tout $A \subseteq G_0$, posons:

$$F_\sigma(A) \;=\; (\, \sigma \Rightarrow \Diamond A \,) \cap (\, \pi \Rightarrow \Box A \,) \,,$$

c'est-à-dire, pour $g \in G_0$:

$$\begin{aligned} g \in F_\sigma(A) \quad & \text{si et seulement si} \\ & (\, \epsilon g = \sigma \;\Rightarrow\; \exists g' \, (\, g \to g' \;\wedge\; g' \in A \,)\,) \\ & \quad \wedge \\ & (\, \epsilon g = \pi \;\Rightarrow\; \forall g' \, (\, g \;\to\; g' \;\Rightarrow\; g' \in A \,)\,) \,. \end{aligned}$$

Observons qu'une position appartient à l'ensemble $F_\sigma(A)$ si et seulement si soit il s'agit d'une position terminale gagnante pour le joueur σ, soit le joueur σ peut de cette position forcer la partie à atteindre une position dans A en un seul mouvement. De même, on définit:

$$F_\pi(A) \;=\; (\, \pi \Rightarrow \Diamond A \,) \cap (\, \sigma \Rightarrow \Box A \,) \,.$$

Remarque A.2.9 F_σ est un opérateur sur les ensembles de positions de G, i.e. si $A_1, A_2 \subseteq G_0$ et $A_1 \subseteq A_2$, alors $F_\sigma(A_1) \subseteq F_\sigma(A_2)$. De plus on voit que:

$$F_\sigma(A)^c \;= F_\pi(A^c) \,.$$

Définition A.2.10 Disons qu'un jeu complet G est *déterminé* si:

$$G_0 \quad = \quad WP_\sigma[G] \cup WP_\pi[G] \; .$$

Définition A.2.11 Soit $G[X]$ un jeu partiel. Posons:

$$\begin{aligned} WP_\sigma(A) &\quad = \quad WP_\sigma[\, G[X \cap A]\,] \; , \\ WP_\pi(A^c) &\quad = \quad WP_\pi[\, G[X \cap A]\,] \; . \end{aligned}$$

Remarque A.2.12 WP_σ est un opérateur sur les positions de $G[X]$, i.e. si $A_1, A_2 \subseteq G_0$ et $A_1 \subseteq A_2$, alors $WP_\sigma(A_1) \subseteq WP_\sigma(A_2)$. En effet, si $A_1 \subseteq A_2$, chaque stratégie gagnante pour σ dans $\langle G[X \cap A_1], v\rangle$ peut être utilisée par σ aussi pour gagner dans $\langle G[X \cap A_2], v\rangle$. On a aussi que $WP_\sigma(A) \cap WP_\pi(A^c) = \emptyset$ et, si le jeu $G[X \cap A]$ est déterminé, on a:

$$WP_\sigma(A)^c \quad = \quad WP_\pi(A^c) \; .$$

Proposition A.2.13 Soient $G[X]$ un jeu partiel et S un système d'équations. Soit WP_σ l'opérateur sur les positions défini comme ci-dessus par rapport au jeu partiel $G[X]$ et soit F_σ l'opérateur sur les positions défini par rapport au jeu complet $Q_S.G[X]$, où $Q \in \{\mu, \nu\}$. On a que:

$$Q_Z.WP_\sigma \circ F_\sigma(Z) \quad \subseteq \quad WP_\sigma[\, Q_S.G[X]\,] \; . \tag{A.1}$$

Si les jeux $G[X \cap A]$ sont déterminés, i.e. si $WP_\sigma(A)^c = WP_\pi(A^c)$ pour tout $A \subseteq G_0$, alors cette inclusion est une égalité et les jeux $Q_S.G[X]$ sont déterminés aussi.

Preuve. Considérons d'abord le cas du jeu $\nu_S.G[X]$. L'ensemble $Z = \nu_Y.WP_\sigma(F_\sigma(Y))$ est le plus grand point postfixe de l'opérateur $WP_\sigma \circ F_\sigma$ et donc $Z \subseteq WP_\sigma(F_\sigma(Z))$. Soit $g \in Z$ une position. Si $g \in X$, alors $g \in F_\sigma(Z)$ et σ peut forcer, dans un seul coup, la partie dans une position dans Z. Si $g \in G_0 \setminus X$, le joueur σ fixe une stratégie gagnante dans le jeu $G[X \cap F_\sigma(Z)]$ et il continue à jouer selon cette stratégie; éventuellement il pourrait atteindre une position dans $X \cap F_\sigma(Z)$ et dans ce cas il force la partie une autre fois dans Z.

Considérons une partie γ, finie ou infinie. Si γ est infinie et elle visite infiniment souvent l'ensemble X, alors γ est un chemin gagnant de $\nu_S.G[X]$. Si γ est une partie, finie ou infinie, qui passe un nombre fini de fois par X, alors il a été joué éventuellement selon une stratégie gagnante pour $G[X \cap F_\sigma(Z)]$. Si γ est infinie, il existe $n \geq 0$ tel que $\partial^n(\gamma) \in W_\sigma$ et donc $\gamma \in W_\sigma$.

Considérons maintenant le cas du jeu $\mu_S.G[X]$. À cause du théorème de Knaster-Tarski, on obtient l'égalité suivante:

$$\mu_Y.WP_\sigma(F_\sigma(Y)) \quad = \quad \bigcup_{\alpha \in Ord} (WP_\sigma \circ F_\sigma)^\alpha(\emptyset) \; ,$$

où $\phi^\alpha(\emptyset)$ est défini par $\phi^\alpha(\emptyset) = \bigcup_{\beta<\alpha} \phi^\beta(\emptyset)$ si α est un ordinal limite. Nous allons noter par Z l'ensemble $\mu_Y.WP_\sigma(F_\sigma(Y))$ et par Z^α l'ensemble $(WP_\sigma \circ F_\sigma)^\alpha(\emptyset)$. On peut associer à chaque position $g \in Z$ le plus petit ordinal α_g tel que $g \notin Z^{\alpha_g}$ mais tel que $g \in Z^{\alpha_g+1}$.

Soit g une position de l'ensemble Z. Si $g \in X$, alors $g \in F_\sigma(Z^{\alpha_g})$ et le joueur σ peut forcer la partie dans une position $g' \in Z^{\alpha_g}$. Nous observons dans ce cas que $\alpha_{g'} < \alpha_g$.

Si $g \in G_0 \setminus X$, alors σ joue à l'aide d'une stratégie gagnante pour le jeu $G[X \cap F_\sigma(Z^{\alpha_g})]$, jusqu'à ce que l'on atteigne une position $g' \in X$ ou une position telle que $\alpha_{g'} < \alpha_g$. Nous observons que pour toute position ainsi visitée on a $\alpha_{g'} \leq \alpha_g$.

Soit γ une partie infinie jouée de cette façon. Or, γ ne peut pas passer infiniment souvent par un sommet dans X, car dans ce cas, on obtient une suite d'ordinaux infinie strictement décroissante $\{\alpha_{g_n}\}_{n\geq 0}$. Donc γ est éventuellement jouée selon une stratégie gagnante pour σ dans $G[X \cap F_\sigma(Z^\alpha)]$ pour quelque ordinal α. Cela entraîne que $\gamma \in W_\sigma$.

Enfin, supposons que $WP_\sigma(A)^c = WP_\pi(A^c)$ pour tout $A \subseteq G_0$. Pour montrer qu'un jeu G est déterminé, il suffit de montrer que $(WP_\sigma[G])^c \subseteq WP_\pi[G]$. Considérons le cas du jeu $G = \mu_S.G[X]$, on sait que $\mu_Y.WP_\sigma(F_\sigma(Y)) \subseteq WP_\sigma[G]$ et donc:

$$\begin{aligned}
(\ WP_\sigma[G]\ )^c &\subseteq (\ \mu_Y.WP_\sigma(F_\sigma(Y))\ )^c \\
&= \nu_Y.(\ WP_\sigma(\ F_\sigma(Y^c)\ )\ )^c \\
&= \nu_Y.WP_\pi(\ (\ F_\sigma(Y^c)\ )^c\ ) \\
&= \nu_Y.WP_\pi(F_\pi(Y)) \\
&\subseteq WP_\pi[G]\ .
\end{aligned}$$

La relation

$$\nu_Y.WP_\pi(F_\pi(Y)) \ \subseteq\ WP_\pi[G] \tag{A.2}$$

découle de la relation A.1 appliquée au jeu partiel $G^{op}[X]$ et au système d'équations S^{op} obtenu de S en échangeant les opérateurs $\bigvee$ and $\bigwedge$. On obtient A.2 en observant que $WP_\pi[G] = WP_\sigma[G^{op}]$ et $(\mu_S.G[X])^{op} = \nu_{S^{op}}.G^{op}[X]$.

On peut donc conclure que le jeu $\mu_S.G[X]$ est déterminé. Un argument semblable vaut pour montrer que le jeu $\nu_S.G[X]$ est déterminé. $\square$

Proposition A.2.14 Si les jeux $G[X \cap A]$ ont des stratégies gagnantes sans mémoire, alors les jeux $\mu_S.G[X]$ et $\nu_S.G[X]$ ont aussi des stratégies gagnantes sans mémoire.

Preuve. Pour le jeu $\nu_S.G[X]$ on peut utiliser une stratégie gagnante sans mémoire pour $G[X \cap F_\sigma(Z)]$, où $Z = \nu_Y.WP_\sigma \circ F_\sigma(Y)$, et jouer sans mémoire dans $X \cap F_\sigma(Z)$.

Pour le jeu $\mu_S.G[X]$, soient Z et Z^α comme dans la preuve du théorème précédent. Dans une position $g \in Z^{\alpha_g}$ si σ doit jouer, il peut jouer en choisissant un mouvement $g \to g'$ tel que $\alpha_{g'} < \alpha_g$, ou sinon jouer en accord à une stratégie gagnante sans mémoire dans $G[X \cap F_\sigma(Z^{\alpha_g})]$. $\square$

A.3 Jeux de Rabin à chaîne et formule de point fixe pour l'ensemble des positions gagnantes

Définition A.3.1 Un jeu de Rabin à chaîne est un jeu $\langle G, \epsilon, W_\sigma \rangle$ où W_σ est défini à l'aide d'une couple $\langle p, \chi \rangle$, où $p : G_0 \longrightarrow \{1, \dots, n\}$ et $\chi : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{\sigma, \pi\}$, de la façon suivante:

$$\gamma \in W_\sigma \quad \Leftrightarrow \quad \chi(\, \max \mathrm{In}(\gamma)\,) = \sigma \ ,$$

où $\mathrm{In}(\gamma) = \{\ j \in \{1, \ldots, n\} \mid \mathrm{card}\, (p \circ \gamma)^{-1}(j) = \infty\ \}$.

Proposition A.3.2 Un jeu de Rabin a la forme:

$$Q^n_{S_n} \ldots Q^1_{S_1}.G^0[X_1, \ldots, X_n] \ ,$$

où:

- $G^0[X_1, \ldots, X_n]$ est le jeu dont le graphe sous-jacent est le couple $\langle G_0, \emptyset\rangle$, et chaque position $g \in G_0$ est telle que $\epsilon(g) = 0$,
- $X_i = p^{-1}(i)$,
- $Q^i = \nu$ si $\chi(i) = \sigma$ et $Q^i = \mu$ si $\chi(i) = \pi$,
- S_i est le système d'équations:

$$\{\ x = \mathrm{OP}^x\{\, g \,|\, x \to g \in G_1\ \}\ \}_{x \in X_i}$$

  et $\mathrm{OP}^x = \bigwedge$ si $\epsilon x = \pi$ et $\mathrm{OP}^x = \bigvee$ si $\epsilon x = \sigma$.

Preuve. Pour $i = 1, \ldots, n$ posons:

$$G^i[X_{i+1}, \ldots, X_n] \quad = \quad Q^i_{S_i} \ldots Q^1_{S_1}.G^0[X_1, \ldots, X_n] \ .$$

Soit G^i le graphe sous-jacent au jeu $G^i[X_{i+1}, \ldots, X_n]$: il s'agit en fait du graphe G dont on a retiré toute arête sortante de X_j, pour $i < j$. De même, soient W^i_σ et W^i_π les ensembles des chemins infinis gagnants pour chaque joueur dans les jeux $G^i[X_{i+1}, \ldots, X_n]$, observons aussi que $W^i_\epsilon \subseteq W^n_\epsilon$, $\epsilon \in \{\sigma, \pi\}$. Il s'agit de montrer que $\gamma \in W^n_\sigma$ ssi $\max \mathrm{In}(\gamma) = k$ et $\chi(k) = \sigma$.

Soit $\gamma \in W^n_\sigma$ et soit $k = \max(\mathrm{In}(\gamma))$. Alors il existe $m \geq 0$ tel que $\delta^m\gamma$ est un chemin infini dans G^k, de plus ce chemin visite infiniment souvent l'ensemble X_k. Si $\chi(k) = \pi$

alors $Q^k = \mu$ et donc $\delta^n\gamma \in W^k_\pi \subseteq W^n_\pi$. Cela entraîne que $\gamma \in W^n_\pi$, ce qui est une contradiction, donc $\chi(k) = \sigma$.

Soit par contre $k = \max(\mathrm{In}(\gamma))$ et supposons que $\chi(k) = \sigma$. Pour quelque $m \geq 0$, $\delta^m\gamma$ est un chemin infini dans G^k, de plus ce chemin visite infiniment souvent l'ensemble X_k. Comme $Q^k = \nu$, on déduit que $\delta^m\gamma \in W^k_\sigma$ ce qui entraîne que $\gamma \in W^n_\sigma$. □

Corollaire A.3.3 Un jeu de Rabin à chaîne G est déterminé et il possède stratégies sans mémoire.

Preuve. Si le jeu est défini à l'aide de la couple $\langle p, \chi\rangle$ où $p : G_0 \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$, on démontre que pour tout $i = 0, \ldots, n$ et pour tout vecteur $\langle A_{i+1}, \ldots, A_n\rangle \in P(G_0)^{n-i}$, les jeux $G^i[\ \{X_j \cap A_j\}_{j>i}\ ]$ sont déterminés et ils possèdent des stratégies sans mémoire. □

Proposition A.3.4 Soit G un jeu de Rabin à chaîne défini à l'aide du couple $\langle p, \chi\rangle$. On a l'égalité suivante:

$$WP_\sigma[G] \quad = \quad Q^n_{Z_n} \ldots Q^1_{Z_1}.\{ \bigcap_{i=1,\ldots,n} (\, X_i \Rightarrow F_\sigma(Z_i)\,)\ \}\ ,$$

où $Q^i = \nu$ ssi $\chi(i) = \sigma$ et $X_i = p^{-1}(i)$. Aussi, $A \Rightarrow B \ = \ \{\ x \mid x\ \in A$ entraîne $x \in B\ \}$.

Preuve. Utilisons la notation de la proposition A.3.2 et de sa preuve pour remarquer que $G = Q^n_{S_n} \ldots Q^1_{S_1}.G[X_1, \ldots, X_n]$ et pour définir la suite d'opérateurs:

$$WP^i_\sigma(A_{i+1}, \ldots, A_n) \quad = \quad WP_\sigma[\ G^i[\{X_j \cap A_j\}_{j=i+1,\ldots,n}]\ ]\ ,$$

pour $i = 0, \ldots, n$. Or, il est clair que:

$$WP^0_\sigma(A_1, \ldots, A_n) \quad = \quad \bigcap_{i=1\ldots n} X_i \Rightarrow A_i\ .$$

Soit $i > 0$ et supposons qu'on ait l'égalité suivante:

$$\begin{aligned} &WP^{i-1}_\sigma(A_i, \ldots, A_n) \quad = \\ &\qquad Q^{i-1}_{Z_{i-1}} \ldots Q^1_{Z_1}.(\ \bigcap_{j\leq i-1} X_j \Rightarrow F^{i-1}_\sigma(Z_j)\ \ \cap \ \bigcap_{j>i-1} X_j \Rightarrow A_j\ \ )\ . \end{aligned}$$

où F_σ^k est calculé par rapport au graphe G^k. En appliquant la formule de la proposition A.2.13 on obtient que:

$$\begin{aligned} WP_\sigma^i(A_{i+1},\ldots,A_n) \;&= \\ & Q^i_{Z_i}.Q^{i-1}_{Z_{i-1}}\ldots Q^1_{Z_1}.(\;\bigcap_{j\leq i-1} X_j \Rightarrow F_\sigma^{i-1}(Z_j) \;\cap\; X_i \Rightarrow F_\sigma^i(Z_i) \;\cap\; \bigcap_{j>i} X_j \Rightarrow A_j\;)\,. \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que pour $j < i$ et pour tout $A \subseteq G_0$ on a:

$$g \in X_j \Rightarrow F_\sigma^{i-1}(A) \;\Leftrightarrow\; g \in X_j \Rightarrow F_\sigma^i(A)\,.$$

On obtient donc:

$$\begin{aligned} WP_\sigma^i(A_{i+1},\ldots,A_n) \;&= \\ & Q^i_{Z_i}\ldots Q^1_{Z_1}.(\;\bigcap_{j\leq i} X_j \Rightarrow F_\sigma^i(Z_j) \;\cap\; \bigcap_{j>i} X_j \Rightarrow A_j\;)\,. \end{aligned}$$

D'ici le résultat découle par induction. $\square$

APPENDICE B

GÉNÉRALITÉS SUR LA CATÉGORIE DES μ-TREILLIS, THÉORIE D'ALAN DAY

Dans cet append ice nous allons démontrer certain faits élémentaires sur la catégorie $\mu\mathcal{T}$ des μ-treillis. Soit $\mathcal{T}$ la catégorie des treillis, il existe un foncteur $G : \mu\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ qui oublie la structure des points fixes. Nous allons montrer d'abord que ce foncteur possède un adjoint à gauche $F \dashv G$. Nous allons étudier cette adjonction et la catégorie des μ-treillis, en ayant pour but de démontrer que la catégorie des μ-treillis est une quasi-variété, en se servant du théorème de reconnaissance pour les quasi-variétés.

Nous allons ensuite étudier les μ-treillis libres en utilisant la construction d'Alan Day. Dans (Day, 1970), Alan Day a utilisé ce qui est maintenant connu comme la « doubling construction » pour donner une preuve simple du théorème de Whitman (Whitman, 1941). Cette construction a été utilisée (Day, 1977) aussi pour montrer que dans un treillis de type fini tout intervalle non trivial contient un recouvrement, ce qui est équivalent au fait que la classe des treillis scindés (McKenzie, 1972) engendre la variété des treillis.

Nous montrons que si L est un μ-treillis et si I est un sous-ensemble convexe de L, alors le double $L[I]$ est un μ-treillis et la projection canonique $\pi : L[I] \longrightarrow L$ est un morphisme de μ-treillis. De cette façon on peut démontrer que le μ-treillis libre $\mathcal{J}_P$ sur un ensemble ordonné P satisfait aussi la propriété de Whitman (que nous décrivons dans la proposition B.3.2). Cependant, cette propriété et les propriétés usuelles d'atomicité des générateurs ne sont pas suffisantes pour caractériser les μ-treillis libres. La caractérisation des μ-treillis libres à l'aide de conditions simples reste un problème ouvert.

En connexion avec ce problème, nous allons montrer que le μ-treillis libre ne peut pas être plongé dans le treillis libre avec suprema et infima dénombrables. En effet la relation de Tarski-Knaster

$$\mu_z.\phi(z) \quad = \quad \bigvee_{n \geq 0} \phi^n(\perp)$$

est vraie dans le μ-treillis libre (voir le chapitre 5) mais l'hypothèse que ces suprema satisfont la condition de Whitman infinitaire mène à une contradiction avec un résultat classique sur les polynômes sans point fixe dans les treillis libres (Freese, Ježek et Nation, 1995, §I.5). À la fin de ce chapitre on utilise ce même résultat et la construction d'Alan Day, avec ses propriétés de fonctorialité, afin de construire un μ-treillis qui n'est pas bien fondé et, donc, qui n'est pas complet. À la fois, ce treillis n'est pas localement fini, ni localement distributif; de cette façon on donne une réponse à une question de Ralph Freese (Freese, 1982) sur les treillis avec la propriété que tout polynôme possède un point fixe.

B.1 Généralités sur la catégorie des μ-treillis

Le premier but de cette section est de montrer que le foncteur oubliant

$$G : \mu\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$$

qui mène un μ-treillis dans son treillis sous-jacent possède un adjoint à gauche.

Proposition B.1.1 Le foncteur oubliant G crée les limites.

Preuve. Soit $T : J \longrightarrow \mu\mathcal{T}$ un foncteur et soit $L = \varprojlim T_j$ sa limite projective dans la catégorie des treillis. Un élément de L est une famille $\{x_j\}_{j \in Ob(J)}$ telle que $x_j \in T_j$ et telle que, si $u : i \longrightarrow j \in J$, alors $x_j = (Tu)x_i$. Dénotons par $j : L \longrightarrow T_j$ la projection sur l'objet T_j et, si $l \in L$, dénotons par l_j le résultat de l'évaluation de l par la projection sur T_j. De même, si $y \in T_i$ et $u : i \longrightarrow j \in J$, on va noter simplement par $u(y)$ l'élément $T(u)(y) \in T_j$.

Montrons que L est un μ-treillis et que cette structure de μ-treillis est univoquement déterminée par la condition que les projections $l \longmapsto l_j$ sont des morphismes.

Considérons un terme $\phi \in \mathcal{A}$ tel que $a(\phi) = n+1$. Par hypothèse d'induction, supposons que $\phi : L^{n+1} \longrightarrow L$ existe et que pour tout $i \in Obj(J)$ la projection sur T_i préserve cet opérateur, c'est-à-dire $\phi(\lambda)_i = \phi(i \circ \lambda)$, où $\lambda \in L^{n+1}$. Soit $s \in \{1, \ldots, n+1\}$ et $\lambda \in L^n$, alors $\phi_{s,\, \lambda}(z)_i = \phi_{s,\, i\circ\lambda}(z_i)$.

Montrons que la famille $\mu = \{\mu.\phi_{s,\, j\circ\lambda}\}_{j\in J}$ appartient à L, et qu'elle est aussi le plus petit point préfixe de l'opérateur $\phi_{s,\lambda}$. Soit $u : i \longrightarrow j$, alors $u(\ \mu.\phi_{s,\, i\circ\lambda}\ ) = \mu.\phi_{s,\, u\circ i\circ\lambda} = \mu.\phi_{s,\, j\circ\lambda}$, car u préserve ce point fixe. De plus, cela montre que si μ est le plus petit point fixe, alors toute projection $i : L \longrightarrow T_i$ préserve ce point fixe.

La famille μ est un point fixe pour l'opérateur $\phi_{s,\, \lambda}$:

$$\begin{aligned} \phi_{s,\, \lambda}(\mu)_i &= \phi_{s,\, i\circ\lambda}(\mu_i) \\ &= \phi_{s,\, i\circ\lambda}(\mu.\phi_{s,\, i\circ\lambda}) \\ &= \mu.\phi_{s,\, i\circ\lambda} \\ &= \mu_i\ . \end{aligned}$$

Puisque cela est vrai pour un $i \in J$ arbitraire, on conclut que $\phi_{s,\, \lambda}(\mu) = \mu$.

Soit maintenant $t \in L$ tel que $\phi_{s,\, \lambda}(t) \leq t$. Il suit que pour tout i on a $\phi_{s,\, i\circ\lambda}(t_i) = \phi_{s,\, \lambda}(t)_i \leq t_i$ et donc $\mu_i = \mu.\phi_{s,\, \lambda_i} \leq t_i$. Cela étant vrai pour $i \in J$ arbitraire, on conclut que $\mu \leq t$.

De même, pour le cas de $\nu_s.\phi$, on montre qu'il existe une seule définition possible afin que toute projection préserve cet opérateur, et que cela est une bonne définition, c'est-à-dire $\nu_s.\phi$ est vraiment le plus grand point fixe.

La discussion a montré jusqu'à maintenant que si L est la limite des T_j, alors il est un μ-treillis et les projections sont aussi des morphismes de μ-treillis, et donc $L \longrightarrow T$

est un cône dans la catégorie $\mu\mathcal{T}$. Montrons qu'il s'agit d'un cône universel, c'est-à-dire que si $f_j : L' \longrightarrow T_j$ est un autre cône, alors l'unique médiateur $f : L' \longrightarrow L$, défini par $f(x)_j = f_j(x)$, est un morphisme de μ-treillis.

Soient $\phi \in \mathcal{A}$ tel que $a(\phi) = n+1$, $s \in \{1, \ldots, n+1\}$ et $\lambda \in L'^n$. Le résultat découle des définitions:

$$\begin{aligned} f(\mu.\phi_{s,\,\lambda})_j &= f_j(\ \mu.\phi_{s,\,\lambda}\ ) \\ &= \mu.\phi_{s,\,f_j \circ \lambda} \\ &= \mu.\phi_{s,\,j \circ f \circ \lambda} \\ &= (\mu.\phi_{s,\,f \circ \lambda})_j\ . \end{aligned}$$

Cela étant valable pour tout j, on conclut que $f(\mu.\phi_{s,\,\lambda}) = \mu.\phi_{s,\,f\circ\lambda}$. De même façon, on montre que $f(\nu.\phi_{s,\,\lambda}) = \nu.\phi_{s,\,f\circ\lambda}$. □

Corollaire B.1.2 La catégorie $\mu\mathcal{T}$ est complète et le foncteur G préserve les limites.

Preuve. Ceci découle du fait que la catégorie des treillis est complète. □

Proposition B.1.3 Soit L un μ-treillis et $J \rightarrowtail L$ un sous-treillis. Le conditions suivantes sont équivalentes:

1. J est un μ-treillis et $J \rightarrowtail L$ est un morphisme de μ-treillis.
2. Pour tout $\phi \in \mathcal{A}$, $a(\phi) = n+1$, $s \in \{1, \ldots, n+1\}$ et $\lambda \in J^n$ on a que $\mu.\phi_{s,\,\lambda} \in J$ et $\nu.\phi_{s,\,\lambda} \in J$.

Preuve. L'implication $1 \Rightarrow 2$ est évidente. Pour l'autre implication, il faut montrer que les opérateurs $Q.\phi : J^n \longrightarrow J$, obtenus en restreignant $\mu.\phi : L^n \longrightarrow L$ à J, ont les bonnes propriétés de point fixe. Soit donc $\phi \in \mathcal{A}$ tel que $a(\phi) = n+1$ et supposons que ϕ peut être restreint à J. Il suit aussi que $\mu.\phi$ et $\nu.\phi$ peuvent être restreints à J, mais il faut montrer que $\mu.\phi_{s,\,\lambda} \in J$ est le plus petit point préfixe de l'opérateur $\phi_{s,\,\lambda}$. Or $\mu.\phi_{s,\,\lambda}$ est un point fixe de $\phi_{s,\,\lambda}$. Soit donc $l \in J$ et supposons que la relation $\phi_{s,\,\lambda}(l) \leq l$ est vraie dans J et, par conséquent, dans L; il suit que $\mu.\phi_{s,\,\lambda} \leq l$ dans L.

Puisque l'inclusion d'un treillis dans un autre est toujours un plongement, on conclut que $\mu.\phi_{s,\,\lambda} \leq l$ dans J. On raisonne d'une façon semblable pour $\nu_s.\phi$. $\square$

Proposition B.1.4 Soient L un μ-treillis et E un sous-ensemble de L. Il existe le plus petite sous-μ-treillis J de L tel que $E \subseteq J$.

Preuve. Il suffit de remarquer que l'intersection arbitraire de μ-treillis est encore un μ-treillis, ce qui est évident de la proposition B.1.3. $\square$

Proposition B.1.5 Le foncteur oubliant $G : \mu\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ possède un adjoint à gauche.

Preuve. On va démontrer la proposition à l'aide du théorème de Freyd sur le foncteur adjoint - voir (MacLane, 1971, §V.6) ou (Borceux, 1994a, §3.3). On a vu que la catégorie $\mu\mathcal{T}$ est complète et que le foncteur $G : \mu\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ préserve les limites. Il suffit donc trouver un ensemble solution.

Soit L un treillis et considérons un morphisme de treillis $f : L \longrightarrow M$, où M est un μ-treillis. Le morphisme f a une factorisation $f = i \circ p$ où $p : L \twoheadrightarrow I$ est un épimorphisme et $i : I \hookrightarrow M$ est un monomorphisme. Le treillis I est contenu dans le plus petit sous-μ-treillis J qui contient I; de plus, card $J \ \leq\ $ card $(\sum_{n\geq 0} \mathcal{A}_n \times L^n)$, où $\mathcal{A}_n = \{ \phi \in \mathcal{A} \mid a(\phi) = n \}$. La discussion montre que tout morphisme f qui a pour source L et pour but un μ-treillis, factorise par un μ-treillis de la classe:

$$\{ J \in Ob(\mu\mathcal{T}) \mid \text{card } J \ \leq\ \text{card} (\sum_{n\geq 0} \mathcal{A}_n \times L^n) \} \ .$$

Or, pour un cardinal donné α, on peut choisir un ensemble $\{J_{\alpha,i}\}_{i\in I_\alpha}$ tel que tout objet $J \in Ob(\mu\mathcal{T})$ avec la propriété que card $J = \alpha$ est isomorphe à un objet $J_{\alpha,i}$. Il suit que:

$$\{ J_{\alpha,i} \in Ob(\mu\mathcal{T}) \mid i \in I_\alpha,\ \alpha \ \leq\ \text{card} (\sum_{n\geq 0} \mathcal{A}_n \times L^n) \}$$

est un ensemble solution pour L. $\square$

Proposition B.1.6 Le foncteur G crée les colimites filtrantes.

Preuve. Soient J une catégorie filtrante et $T : J \longrightarrow \mu\mathcal{T}$ un foncteur. Dénotons par T_j la valeur de ce foncteur sur l'objet j, et, si $x \in T_j$ et $u : j \longrightarrow i$, dénotons par ux l'élément $T(u)(x) \in T_i$.

Soit $L = \varinjlim T_j$ la limite inductive dans la catégorie des treillis. Rappelons que $L = (\sum_{i \in I} T_i)/\cong$, où $\cong$ est la relation d'équivalence définie par $(x, i) \cong (y, j)$ ssi ils existent $k \in Ob(J)$, $u : i \longrightarrow k$ et $v : j \longrightarrow k$ tels que $ux = vy$. Soit dans la suite $[x, j]$ la classe d'équivalence de (x, j). Les injections $T_j \longrightarrow L$ qui mènent $x \in T_j$ dans sa classe $[x, j]$ sont des morphisme de treillis.

Montrons que L est un μ-treillis et que les injections sont des morphismes de μ-treillis. Cette structure est nécessairement unique car elle est déterminée par la structure d'ordre.

Soit $\phi \in \mathcal{A}$ tel que $a(\phi) = n + 1$ et supposons qu'on a défini ϕ de l'unique façon possible afin que les injections soient des morphismes, à savoir:

$$\phi([x_1, j_1], \ldots, [x_{n+1}, j_{n+1}]) = [\phi(u_1x_1, \ldots, u_{n+1}x_{n+1}), k] \quad ,$$

où k et u_j sont tels que $u_i : j_i \longrightarrow k$. Il suffit alors de montrer que $\mu_s.\phi$ peut être défini et qu'il satisfait encore $\mu_s.\phi([x_1, j_1], \ldots, [x_n, j_n]) = [\mu_s.\phi(u_1x_1, \ldots, u_nx_n), k]$, pour tout choix de k et des u_j.

Fixons donc $[x_i, j_i] \in L$, pour $i = 1, \ldots, n$, et $s \in \{1, \ldots, n+1\}$. Soient $u_i : j_i \longrightarrow k$, si l'on veut que l'injection de T_k dans L soit un morphisme de μ-treillis, on est obligé de définir:

$$\begin{aligned} \mu.\phi_{s,\,[\,x_i, j_i\,]} &= \mu.\phi_{s,\,[\,u_ix_i, k\,]} \\ &= [\,\mu.\phi_{s,\,u_jx_i}, k\,] \ . \end{aligned}$$

Cette définition ne dépend pas des représentants (x_i, j_i). Soient $(y_i, j_i') \cong (x_i, j_i)$ et soit $v_j : j_i' \longrightarrow h$. On va montrer que $(\mu.\phi_{s,\,u_jx_i}, k) \cong (\mu.\phi_{s,\,v_jy_i}, h)$. En effet, soient $w : k \longrightarrow k'$, $z : h \longrightarrow k'$ tels que $wu_ix_i = w'v_iy_i$ pour tout i. Un tel couple de flèches existe car la catégorie J est filtrante et car $(u_i x_i, k) \cong (v_i y_i, h)$. Alors:

$$\begin{aligned}
(\ \mu.\phi_{s,\,u_j x_i}\ ,\ k\ ) &\cong (\ w\mu.\phi_{s,\,u_j x_i}\ ,\ k'\ )\\
&= (\ \mu.\phi_{s,\,w u_j x_i}\ ,\ k'\ )\\
&= (\ \mu.\phi_{s,\,w' v_j y_i}\ ,\ k'\ )\\
&= (\ w'\mu.\phi_{s,\,v_j y_i}\ ,\ k'\ )\\
&\cong (\ \mu.\phi_{s,\,v_j y_i}\ ,\ h\ )\,.
\end{aligned}$$

Montrons que $\mu.\phi_{s,[x_i,j_i]}$ est un point préfixe de l'opérateur $\phi_{s,\,[x_i,j_i]}$:

$$\begin{aligned}
\phi_{s,\,[x_i,j_i]}(\ \mu.\phi_{s,\,[x_i,j_i]}\ ) &= \phi_{s,\,[x_i,j_i]}(\ [\ \mu.\phi_{s,\,u_i x_i}\ ,\ k\ ]\ )\\
&= [\ \phi_{s,\,u_i x_i}(\mu.\phi_{s,u_i x_i})\ ,\ k\ ]\\
&= [\ \mu.\phi_{s,\,u_i x_i}\ ,\ k\ ]\\
&= \mu.\phi_{s,\,[x_i,j_i]}\,.
\end{aligned}$$

Montrons enfin que $\mu.\phi_{s,[x_i,j_i]}$ est le plus petit point préfixe: soit $[x,h]$ tel que $\phi_{s,\,[x_i,j_i]}(\ [x,h]\ ) \leq [x,h]$, à savoir $\phi_{s,\,[y_i,k]}(\ [l,h]\ ) \leq [l,h]$, où $y_i = u_i x_i$. Cela est vrai ssi ils existent $u : k \longrightarrow k'$ et $v : h \longrightarrow k'$ tels que $\phi_{s,\,u y_i}(\ vl\ ) \leq vl$. Il suit que $\mu.\phi_{s,\,u y_i} \leq vl$ et donc:

$$\begin{aligned}
\mu.\phi_{s,\,[x_i,j_i]} &= [\ \mu.\phi_{s,\,y_i}\ ,\ k\ ]\\
&= [\ u\mu.\phi_{s,\,y_i}\ ,\ k'\ ]\\
&= [\ \mu.\phi_{s,\,u y_i}\ ,\ k'\ ]\\
&\leq [\ vl\ ,\ k']\\
&= [\ l\ ,\ h\ ]\,.
\end{aligned}$$

D'une façon semblable, on montre qu'on peut définir les opérateurs ν_s; par construction, les injections $T_j \longrightarrow L$, $x \longmapsto [x,j]$, sont des morphismes de μ-treillis.

Pour compléter la preuve, il suffit de montrer que L est aussi un cocône limite, à savoir si $f_j : T_j \longrightarrow L'$ est un autre cocône dans la catégorie $\mu\mathcal{T}$, alors l'unique médiateur $f : L \longrightarrow L'$, $[x,j] \longmapsto f_j(x)$, est un morphisme de μ-treillis. Cela est évident par définition des opérateurs:

$$\begin{aligned} f(\ \mu.\phi_{s,\ [x_i,j_i]}\ ) &= f[\ \mu.\phi_{s,\ u_ix_i}\ ,\ k\ ] \\ &= f_k(\ \mu.\phi_{s,\ u_ix_i}\ ) \\ &= \mu.\phi_{s,\ f_k(u_ix_i)} \\ &= \mu.\phi_{s,\ f[u_ix_i,k]} \\ &= \mu.\phi_{s,\ f[x_i,j_i]}\ . \end{aligned}$$

On utilise le même type d'argument pour montrer que $f(\ \nu.\phi_{s,\ [x_i,j_i]}\ ) = \nu.\phi_{s,\ f[x_i,j_i]}$. $\square$

Définition B.1.7 Soit L un μ-treillis. Un noyau sur L est une relation $R \subseteq L \times L$ telle que:

- $\leq \subseteq\ R$ et $R \circ R\ \subseteq\ R$.
- xRa et xRb entraîne $xRa \wedge b$; de même, aRx et bRx entraîne $a \vee bRx$.
- Soient $\phi \in \mathcal{A}$ tel que $a(\phi) = n+1$, $s \in \{1, \ldots, n+1\}$ et $\lambda \in L^n$. R satisfait:
  - $\phi_{s,\lambda}(x)Rx$ entraîne $\mu.\phi_{s,\lambda}Rx$,
  - $xR\phi_{s,\lambda}(x)$ entraîne $xR\nu.\phi_{s,\lambda}$.

Proposition B.1.8 Soient L un μ-treillis et R un noyau sur L. Définissons la relation d'équivalence $\equiv_R$ par:

$$x \equiv_R y \ \text{ ssi } \ xRy \text{ et } yRx\ .$$

Alors le quotient $L/\equiv_R$ de L par cette relation d'équivalence est un μ-treillis et la projection canonique $\pi : L \longrightarrow L/\equiv_R$ est un morphisme de μ-treillis.

Preuve. Dans $L/\equiv_R$ dénotons par $[x]$ la classe d'équivalence de x et définissons la relation d'ordre de $L/\equiv_R$ par:

$$[x] \leq [y] \ \text{ si et seulement si } \ xRy\ .$$

On voit alors que $[x] \leq [\top]$, car $x \leq \top$ et donc $xR\top$. De plus $[x] \leq [a]$ et $[x] \leq [b]$ si et seulement si $[x] \leq [a \wedge b]$, et donc $[a] \wedge [b] = [a \wedge b]$. En effet, si xRa et xRb, on a $xRa \wedge b$.

Par contre, si $xRa \wedge b$, de $a \wedge b \leq a$ on obtient $a \wedge bRa$ et donc xRa. De même, xRb. On raisonne d'une façon semblable pour montrer que $[\bot] \leq [x]$ et que $[a] \vee [b] = [a \vee b]$. Donc $L/\equiv_R$ est un treillis et la projection canonique π, définie par $\pi(a) = [a]$, est un morphisme de treillis.

Enfin, soit $\phi \in \mathcal{A}$ tel que $a(\phi) = n+1$ et supposons que ϕ est défini sur $L/\equiv_R$ et que $\pi \circ \phi = \phi \circ \pi^{n+1}$, à savoir:

$$\phi_{s,[\lambda]}([x]) \;=\; [\phi_{s,\lambda}(x)]\ ,$$

pour tout $s \in \{1, \ldots, n+1\}$ et $\lambda \in L^n$. Si $\phi_{s,[\lambda]}([x]) \leq [x]$ alors $\phi_{s,\lambda}(x)Rx$ et donc $\mu.\phi_{s,\lambda}Rx$, c'est-à-dire $[\mu.\phi_{s,\lambda}] \leq [x]$. On voit aussi que:

$$\begin{aligned} \phi_{s,[\lambda]}([\mu.\phi_{s,\lambda}]) &= [\phi_{s,\lambda}(\mu.\phi_{s,\lambda})] \\ &= [\mu.\phi_{s,\lambda}]\ , \end{aligned}$$

et donc $[\mu.\phi_{s,\lambda}]$ est le plus petit point préfixe de l'opérateur $\phi_{s,[\lambda]}$. Cela entraîne aussi qu'on peut définir $\mu_s.\phi$ sur $L/\equiv_R$ et que $\pi \circ \mu_s.\phi = \mu_s.\phi \circ \pi^n$. On raisonne d'une façon semblable pour montrer que le plus grand point postfixe de l'opérateur $\phi_{s,[\lambda]}$ existe et qu'il est donné par $[\mu_s.\phi(\lambda)]$.

Cela suffit pour montrer que $L/\equiv_R$ est un μ-treillis et que la projection π est un morphisme de μ-treillis. $\square$

Proposition B.1.9 Soit $f : L_1 \longrightarrow L_2$ un morphisme de μ-treillis. Alors la relation N_f définie par:

$$xN_fy \;\text{ ssi }\; f(x) \leq f(y)$$

est un noyau sur L_1.

Preuve. Si $x \leq y$ alors $f(x) \leq f(y)$ et donc xN_fy. De même, $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(z)$ entraîne $f(x) \leq f(z)$.

Si $f(x) \leq f(a)$ et $f(x) \leq f(b)$, alors $f(x) \leq f(a) \wedge f(b)$ et puisque $f(a) \wedge f(b) = f(a \wedge b)$, on obtient $f(x) \leq f(a \wedge b)$. On raisonne d'une façon semblable pour montrer que aN_fx et bN_fx entraîne $a \vee bN_fx$.

Supposons enfin que $\phi_{s,\lambda}(x) N_f x$, c'est-à-dire $f(\phi_{s,\lambda}(x)) \leq f(x)$, où $\phi \in \mathcal{A}$ est tel que $a(\phi) = n+1$, $s \in \{1, \ldots, n+1\}$ et $\lambda \in L_1^n$. Puisque $f(\phi_{s,\lambda}(x)) = \phi_{s,f\circ\lambda}(f(x))$, on a $\phi_{s,f\circ\lambda}(f(x)) \leq f(x)$ et donc $\mu.\phi_{s,f\circ\lambda} \leq f(x)$. Puisque $f(\mu.\phi_{s,\lambda}) = \mu.\phi_{s,f\circ\lambda}$, on obtient $\mu.\phi_{s,\lambda} N_f x$. On raisonne d'une façon semblable pour montrer que $x N_f \phi_{s,\lambda}(x)$ entraîne $x N_f \nu.\phi_{s,\lambda}$. $\square$

Proposition B.1.10 Soit R un noyau sur L_1 et soit $f : L_1 \longrightarrow L_2$ un morphisme de μ-treillis tel que $R \subseteq N_f$. Il existe un unique morphisme de μ-treillis $\tilde{f} : L_1/\equiv_R \longrightarrow L_2$ tel que le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd}
L_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & L_2 \\
L_1/\equiv_R \arrow[ur, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd} .$$

Preuve. Évidemment, $\tilde{f}$ est unique, car π est surjective, et il est défini par $\tilde{f}[x] = f(x)$. Puisque $R \subseteq N_f$, il s'agit d'une bonne définition: si xRy et yRx, alors $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(x)$, donc $f(x) = f(y)$. De même, $\tilde{f}$ préserve l'ordre: si $[x] \leq [y]$, alors xRy et xN_fy, on obtient enfin $\tilde{f}[x] = f(x) \leq f(y) = \tilde{f}(y)$.

On voit aussi que toute la structure est préservée:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\ \phi([\lambda])\ ) &= \tilde{f}(\ [\phi(\lambda)]\ ) \\
&= f(\ \phi(\lambda)\ ) \\
&= \phi(\ f^n\lambda\ ) \\
&= \phi(\ (\tilde{f})^n[\lambda]\ )\ ,
\end{aligned}$$

où $\phi \in \mathcal{A}$ est tel que $a(\phi) = n$. $\square$

Proposition B.1.11 Les co-égalisateurs (co-noyaux de double flèche) existent dans la catégorie des μ-treillis.

Preuve. Observons que les noyaux sur L sont fermés sous les intersection arbitraires et donc pour toute relation $S \subseteq L \times L$ il existe le plus petit noyau $\hat{S}$ contenant S.

Considérons une couple de flèches parallèles $f, g : L_1 \longrightarrow L_2$ et considérons la relation sur L_2:

$$S \quad = \quad \{ \ (f(l), g(l)) \ , \ (g(l), f(l)) \mid l \in L_1 \ \} \ .$$

Soit $R\{f, g\} = \hat{S}$, montrons que le diagramme suivant

$$L_1 \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} L_2 \xrightarrow{\quad \pi \quad} L_2/\equiv_{R\{f,g\}}$$

est un co-égalisateur. Évidemment, si $l \in L_1$ on a que $f(l)R\{f, g\}g(l)$ et $g(l)R\{f, g\}f(l)$ et donc $\pi \circ f = \pi \circ g$. Soit par contre $h : L_2 \longrightarrow L_3$ tel que $h \circ f = h \circ g$. Alors pour tout $l \in L_1$ on a que $h(f(l)) \leq h(g(l))$ et de même, $h(g(l)) \leq h(f(l))$, c'est-à-dire $S \subseteq N_g$. Il s'en suit que $R\{f, g\} \subseteq N_g$ et donc il existe un unique morphisme $\tilde{h}$ tel que $\tilde{h} \circ \pi = h$. $\square$

Lemme B.1.12 Un épimorphisme est régulier dans la catégorie des μ-treillis si et seulement s'il est une surjection.

Preuve. On a vu que tout épimorphisme régulier est une surjection. Soit par contre $p : L_1 \twoheadrightarrow L_2$ une surjection et considérons le couple noyau de p:

$$Ker(p) \underset{\pi_2}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}} L_1 \ \ .$$

En utilisant la notation de B.1.10, on a que:

$$R\{\pi_1, \pi_2\} \quad = \quad N_p \ \ .$$

Il est évident que $R\{\pi_1, \pi_2\} \subseteq N_p$. Par contre, soit R un noyau tel que si $p(l_1) = p(l_2)$ alors $l_1 R l_2$. Alors $N_p \subseteq R$ car si $p(l_1) \leq p(l_2)$ alors $p(l_1 \vee l_2) = p(l_2)$ et donc $l_1 \vee l_2 R l_2$ d'où $l_1 R l_2$. On déduit que $N_p \subseteq R\{\pi_1, \pi_2\}$ et donc $N_p = R\{\pi_1, \pi_2\}$.

Il suffit donc montrer que dans le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & L_2 \\ L_1/\equiv_{N_g} \arrow[ur, "\tilde{g}"'] & \end{tikzcd}$$

$\tilde{g}$ est un isomorphisme. Cela découle du fait que $\tilde{g}$ est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme, que la catégorie des treillis est balancée et enfin, du fait que le foncteur oubliant G est évidemment conservatif. $\square$

Proposition B.1.13 La catégorie des μ-treillis est une catégorie régulière.

Preuve. Rappelons (Borceux, 1994b, §2.2) qu'une catégorie est régulière si et seulement si:

1. chaque flèche possède un couple noyau, c'est-à-dire le produit fibré d'elle avec elle même,
2. chaque flèche f factorise de façon $f = i \circ p$, où p est un épimorphisme régulier et i est un monomorphisme,
3. le produit fibré d'un épimorphisme régulier contre une flèche arbitraire est encore un épimorphisme régulier.

Or, la catégorie des μ-treillis est complète et donc les produits fibrés existent. Il est aussi facile à voir que dans une factorisation

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"] & & L_2 \\ & L/\equiv_{N_f} \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$\tilde{f}$ est injectif et donc est un monomorphisme.

Observons enfin que le produit fibré est créé par le foncteur G et que ce foncteur reflète les épimorphismes réguliers. Puisque la propriété 3 de stabilité est vraie dans la catégorie des treillis, on déduit que cette propriété est aussi vraie dans la catégorie des μ-treillis. $\square$

Proposition B.1.14 La catégorie des μ-treillis est une quasi-variété.

Preuve. Rappelons (Pedicchio, 1999, §3.2) qu'une catégorie est (équivalente à) une quasi-variété si et seulement si elle est une catégorie régulière, les co-égalisetaurs des relations d'équivalence existent, il existe un objet P, dont ils existent les co-puissances, qui est à la fois un objet projectif régulier et un générateur régulier et qui est de plus de type fini. Avec la proposition B.1.13 on a montré que la catégorie $\mu\mathcal{T}$ est régulière; avec la proposition B.1.11 qu'elle possède les co-égalisateurs. On peut se convaincre que l'ordinal 3 est l'objet P voulu, en observant qu'il s'agit du μ-treillis libre sur l'ensemble $\{*\}$. On sait que 3 est le treillis (avec $\top$ et $\bot$) libre sur l'ensemble $\{*\}$. Le fait que tout morphisme de treillis sortant d'un treillis fini vers un μ-treillis est en effet un morphisme de μ-treillis, entraîne que 3 est le μ-treillis libre sur un générateur. $\square$

B.2 Définition et propriétés élémentaires du produit d'Alan Day

Définition B.2.1 Soit P un ensemble ordonné et soit $C \subseteq P$. C est un sous-ensemble convexe ssi $x, z \in C$ et $x \leq y \leq z$ entraîne $y \in C$.

Définition B.2.2 Soit P un ensemble ordonné. Un noyau est une relation transitive R telle que $x \leq y$ entraîne xRy. Si R est un noyau dénotons par $\cong_R$ la relation d'équivalence $(R \cap R^{op})$. L'ensemble quotient $P/\cong_R$ est naturellement ordonné en disant que $[x] \leq [y]$ ssi xRy et la projection $x \longmapsto [x]$ préserve l'ordre. Si $f : P \longrightarrow Q$ préserve l'ordre alors la relation N_f, définie par xN_fy ssi $f(x) \leq f(y)$, est un noyau et il existe un unique plongement $f' : P/\cong_{N_f} \longrightarrow Q$ tel que $f'(\,[x]\,) = f(x)$. Étant donné un noyau R, il existe une correspondance bijective entre les opérateurs $f : P \longrightarrow Q$ tels que $R \subseteq N_f$ et les opérateurs $\tilde{f} : P/\cong_R \longrightarrow Q$.

Proposition B.2.3 Soient P un ensemble ordonné et $C \subseteq P$ un sous-ensemble convexe. Soit Q un ensemble ordonné. Alors la relation R_C définie par:

$$(p,q)R_C(p',q') \;\Leftrightarrow\; p \leq p' \wedge (p,p' \in C \Rightarrow q \leq q')$$

est un noyau de $P \times Q$.

Preuve. Évidemment, si $p \leq p'$ et $q \leq q'$, alors $(p,q)R_C(p',q')$. Supposons donc que $(p_1,q_1)R_C(p_2,q_2)$ et $(p_2,q_2)R_C(p_3,q_3)$, il en découle que $p_1 \leq p_3$. Supposons que $p_1, p_3 \in C$; puisque $p_1 \leq p_2 \leq p_3$, on a que $p_2 \in C$ et donc $q_1 \leq q_2$ et $q_2 \leq q_3$. Il en découle que $q_1 \leq q_3$. $\square$

Définition B.2.4 Soient P, Q des ensembles ordonnés, et $C \subseteq P$ convexe. Dénotons $P \otimes_C Q$ le quotient $P \times Q / \cong_{R_C}$.

Dans la suite soit $[p,q]$ la classe d'équivalence du couple (p,q).

Proposition B.2.5 Soient P, Q deux ensembles ordonnés et soit $C \subseteq P$ un sous ensemble convexe. La projection $\pi : P \times Q \longrightarrow P$ est telle que $R_C \subseteq N_\pi$ et donc il existe un opérateur $\pi : P \otimes_C Q \longrightarrow P$. Pour tout $q \in Q$ la fonction $i_q : P \longrightarrow P \otimes_C Q$, définie par $p \longmapsto [p,q]$, est telle que $\pi \circ i_q = Id_P$ et donc i_q est un plongement de P dans $P \otimes_C Q$. Si $p \notin C$ alors $[p,q_1] = [p,q_2]$ pour tout $q_1, q_2 \in Q$.

Preuve. Si $(p_1,q_1)R_C(p_2,q_2)$, alors $p_1 \leq p_2$, ce qui entraîne que π, défini par $\pi(\ [p,q]\ ) = p$, est bien défini et préserve l'ordre. Évidemment, si $[p_1,q] \leq [p_2,q]$, on a que $(p_1,q)R_C(p_2,q)$ et par définition $p_1 \leq p_2$. Si $p \notin C$ on a $(p,q_1)R_C(p,q_2)$ et vice-versa. $\square$

Proposition B.2.6 Soient $f : P_1 \longrightarrow P_2$ un opérateur et $C \subseteq P_2$ un sous-ensemble convexe. Posons $C' = f^{-1}(C) \subseteq P_1$, C' est alors un sous-ensemble convexe de P_1. Définissons $f \otimes Q : P_1 \otimes_{C'} Q \longrightarrow P_2 \otimes_C Q$ par $f \otimes Q([a,q]) = [f(a),q]$. Alors $f \otimes Q$ préserve l'ordre et $\pi \circ (f \otimes Q) = f \circ \pi$. Cette construction donne un foncteur de la catégorie des couples (P,C) avec $C \subseteq P$ convexe, avec les morphismes évidents.

Preuve. Montrons que si $(a_1, q_1)R_{C'}(a_1, q_2)$ alors $(f(a_1), q_1)R_C(f(a_2), q_2)$. En effet si $a_1 \leq a_2$ on a aussi $f(a_1) \leq f(a_2)$. Si $f(a_1), f(a_2) \in C$, alors $a_1, a_2 \in f^{-1}(C) = C'$ et il suit que $q_1 \leq q_2$. Cela montre que $f \otimes Q$ est bien défini est que $f \otimes Q$ préserve l'ordre. Enfin, il est évident que le propriétés de fonctorialité sont satisfaites. $\square$

Proposition B.2.7 Soient $f : P_1 \rightarrowtail P_2$ un plongement, $C \subseteq P_2$ convexe et posons $C' = f^{-1}(C) \subseteq P_1$. Alors $f \otimes Q : P_1 \otimes_{C'} Q \longrightarrow P_2 \otimes_C Q$ est un plongement.

Preuve. Supposons que $f \otimes Q[p, q] \leq f \otimes Q[p', q']$, à savoir $(f(p), q)R_C(f(p'), q')$. Il suit que $f(p) \leq f(p')$ et donc $p \leq p'$. Supposons que $p, p' \in C'$. Il suit que $f(p), f(p') \in C$ et donc $q \leq q'$. On peut conclure que $[p, q] \leq [p, q']$. $\square$

Proposition B.2.8 Soit $[p_i, q_i]_{i\in I}$ une famille d'éléments de $P \otimes_C Q$. Supposons que $\bigvee_{i\in I} p_i$ et $\bigvee_{p_i\in C} q_i$ existent, alors $\bigvee_{i\in I}[p_i, q_i]$ existe aussi et l'on a:

$$\bigvee_{i\in I}[p_i, q_i] \quad = \quad [\bigvee_{i\in I} p_i, \bigvee_{p_i\in C} q_i] \ .$$

Preuve. Supposons que les deux suprema existent et montrons que $[\bigvee_{i\in I} p_i, \bigvee_{p_i\in C} q_i]$ est un supremum pour la famille $\{\ [p_i, q_i]\ \}_{i\in I}$. On peut voir que $(p_i, q_i)R_C(\bigvee_{i\in I} p_i, \bigvee_{p_i\in C} q_i)$. Supposons donc que $(p_i, q_i)R_C(a, b)$ pour tout $i \in I$. Il suit que $p_i \leq a$ pour tout $i \in I$ et donc $\bigvee_{i\in I} p_i \leq a$. Supposons maintenant que $\bigvee_{i\in I} p_i, a \in C$. Pour tout i tel que $p_i \in C$ on a $q_i \leq b$ et donc $\bigvee_{p_i\in C} q_i \leq b$. Donc $(\bigvee_{i\in I} p_i, \bigvee_{p_i\in C} q_i)R_C(a, b)$. $\square$

Proposition B.2.9 Soit Q un treillis complet. Alors $\bigvee_{i\in I}[p_i, q_i]$ existe ssi $\bigvee_{i\in I} p_i$ existe.

Preuve. On sait que $\bigvee_{p_i\in C} q_i$ existe et donc si $\bigvee_{i\in I} p_i$ existe alors $\bigvee_{i\in I}[p_i, q_i]$ existe aussi par la proposition précédente.

Supposons maintenant que le supremum de la famille $\{\ [p_i, q_i]\ \}_{i\in I}$ existe, soit donc $\bigvee_{i\in I}[p_i, q_i] \ = \ [a, b]$. Montrons que a est un supremum pour la famille $\{p_i\}_{i\in I}$. Évidemment $p_i \leq a$ pour tout $i \in I$. Soit donc x tel que $p_i \leq x$ pour tout $i \in I$. Or $(p_i, q_i)R_C(x, \top)$ d'où $(a, b)R_c(x, \top)$ et $a \leq x$. $\square$

Des résultats duaux sont valables pour les infima.

Corollaire B.2.10 Si P et Q sont deux treillis alors $P \otimes_C Q$ est aussi un treillis et $\pi : P \otimes_C Q \longrightarrow P$ est un morphisme de treillis.

Proposition B.2.11 Soient L_1, L_2 deux treillis et soit $f : L_1 \longrightarrow L_2$ un morphisme de treillis. De plus, soit $C \subseteq L_2$ un sous-ensemble convexe et posons $C' = f^{-1}(C)$. Soit enfin Q un treillis complet. Alors $f \otimes Q : L_1 \otimes_{C'} Q \longrightarrow L_2 \otimes_C Q$ est un morphisme de treillis.

Preuve. Les calculs suivants montrent que les suprema sont préservés.

$$\begin{aligned}
f \otimes Q(\bigvee_{i \in I} [p_i, q_i]) &= f \otimes Q([\bigvee_{i \in I} p_i, \bigvee_{p_i \in C'} q_i]) \\
&= [f(\bigvee_{i \in I} p_i), \bigvee_{p_i \in C'} q_i] \\
&= [\bigvee_{i \in I} f(p_i), \bigvee_{p_i \in C'} q_i] \\
&= [\bigvee_{i \in I} f(p_i), \bigvee_{f(p_i) \in C} q_i] \\
&= \bigvee_{i \in I} [f(p_i), q_i] \\
&= \bigvee_{i \in I} (f \otimes Q)[p_i, q_i] \ .
\end{aligned}$$

En effet $f(p_i) \in C$ si et seulement si $p_i \in C$, car $C' = f^{-1}(C)$. Des calculs analogues montrent que aussi les infima sont préservés. $\square$

Lemme B.2.12 Soient L un ensemble ordonné, Q un treillis complet et $C \subseteq L$ convexe. Soient $\phi : L \longrightarrow L$ et $\phi' : L \otimes_C Q \longrightarrow L \otimes_C Q$ tels que $\pi \circ \phi' = \phi \circ \pi$. Si $\mu.\phi$ existe alors $\mu.\phi'$ existe, et dans ce cas on a $\pi(\mu.\phi') = \mu.\phi$.

Preuve. Il faut montrer que l'infimum de l'ensemble $Préf_{\phi'}$ existe. Cela existe si et seulement si l'infimum de l'ensemble $\pi(Préf_{\phi'})$ existe, par la proposition B.2.9. Montrons donc que $\pi(Préf_{\phi'}) = Préf_{\phi}$. On a comme d'habitude $\pi(Préf_{\phi'}) \subseteq Préf_{\phi}$. Soit par contre $p \in Préf_{\phi}$, alors $\phi'([p, \top]) \leq [p, \top]$ et $\pi([p, \top]) = p$, c'est-à-dire que $Préf_{\phi} \subseteq \pi(Préf_{\phi'})$. Pour voir que $\phi'([p, \top]) \leq [p, \top]$, soit $[p', q'] = \phi'([p, \top])$. Or $p' = \pi \circ \phi'([p, \top]) = \phi \circ \pi([p, \top]) = \phi(p) \leq p$. Supposons maintenant que $p', p \in C$, dans ce cas la relation $q' \leq \top$ est trivialement satisfaite. Donc $(p', q') R_C (p, \top)$ et $[p', q'] \leq [p, \top]$.

Enfin, $\mu.\phi = \bigwedge Préf_\phi = \bigwedge \pi(Préf_{\phi'}) = \pi(\bigwedge Préf_{\phi'}) = \pi(\mu.\phi')$. $\square$

Lemme B.2.13 Soient L un ensemble ordonné, Q un treillis complet et $C \subseteq L$ convexe. Soient $\phi : L \longrightarrow L$ et $\phi' : L \otimes_C Q \longrightarrow L \otimes_C Q$ tels que $\pi \circ \phi' = \phi \circ \pi$. Supposons que $\mu.\phi$ existe, de plus que $\mu.\phi \in C$. Soit $\tilde{\phi} : Q \longrightarrow Q$ défini par l'équation $\phi'([\ \mu.\phi, q\ ]) = [\ \mu.\phi, \tilde{\phi}(q)\ ]$. Alors $\tilde{\phi}$ préserve l'ordre et $\mu.\phi' = [\ \mu.\phi, \mu.\tilde{\phi}\ ]$.

Preuve. Observons qu'il s'agit d'une bonne définition. En effet, puisque $\mu.\phi \in C$, on a que $[\mu.\phi, q] = [\mu.\phi, q']$ entraîne $q = q'$. De plus $\phi'(\ [\mu.\phi, q]\ ) = [\phi(\mu.\phi), q'] = [\mu.\phi, q']$.

Or $\tilde{\phi}$ préserve l'ordre, car si $q \leq q'$, on a alors $[\mu.\phi, q] \leq [\mu.\phi, q']$ et donc $[\mu.\phi, \tilde{\phi}(q)] = \phi'(\ [\mu.\phi, q]\ ) \leq \phi'(\ [\mu.\phi, q']\ ) = [\mu.\phi, \tilde{\phi}(q')]$; cela entraîne $\tilde{\phi}(q) \leq \tilde{\phi}(q')$.

Soit donc $\mu.\tilde{\phi}$ le plus petit point préfixe de $\tilde{\phi}$. Or $\phi'(\ [\mu.\phi, \mu.\tilde{\phi}]\ ) = [\mu.\phi, \tilde{\phi}(\mu.\tilde{\phi})] \leq [\mu.\phi, \mu.\tilde{\phi}]$, c'est-à-dire que $[\mu.\phi, \mu.\tilde{\phi}] \in Préf_{\phi'}$.

Mais on sait aussi (lemme B.2.12) que le plus petit point fixe de ϕ' est de la forme $[\mu.\phi, q]$. De $[\mu.\phi, \tilde{\phi}(q)] = \phi'(\ [\mu.\phi, q]\ ) \leq [\mu.\phi, q]$ il en découle $\tilde{\phi}(q) \leq q$ et donc $\mu.\tilde{\phi} \leq q$. Il suit que $\mu.\phi' = [\mu.\phi, \mu.\tilde{\phi}]$. $\square$

Proposition B.2.14 Soient L un μ-treillis, Q un treillis complet, $C \subseteq L$ convexe. Alors $L \otimes_C Q$ est un μ-treillis et $\pi : L \otimes_C Q \longrightarrow L$ est un morphisme de μ-treillis.

Preuve. Soit $\phi \in \mathcal{A}$, $a(\phi) = n + 1$, et supposons que ϕ est défini dans $L \otimes_C Q$ et que $\pi \circ \phi = \phi \circ \pi^{n+1}$. Soient $s \in \{1, \ldots, n+1\}$, $\rho \in (L \otimes_C Q)^n$ et $\lambda = \pi \circ \rho \in L^n$. Soient $\psi = \phi_{s,\,\lambda} = \phi_{s,\,\pi\circ\rho}$ et $\psi' = \phi_{s,\,\rho}$. Il suit que $\pi \circ \psi' = \psi \circ \pi$ et par le lemme $\mu.\psi'$ existe et $\pi(\mu.\psi') = \mu.\psi$, i.e. $\pi(\mu.\phi_{s,\,\rho}) = \mu.\phi_{s,\,\lambda}$. Un raisonnement analogue est valable pour $\nu_X.\phi_{s,\,\rho}$ et l'on conclut à la fois que $L \otimes_C C$ est un μ-treillis et que π est un morphisme de μ-treillis. $\square$

Proposition B.2.15 Soient L_1, L_2 deux μ-treillis, $f : L_1 \longrightarrow L_2$ un morphisme de μ-treillis, $C \subseteq L_2$ convexe et posons $C' = f^{-1}(C)$. Soit Q un treillis complet. Alors $f \otimes Q : L_1 \otimes_{C'} Q \longrightarrow L_2 \otimes_C Q$ est un morphisme de μ-treillis.

Preuve. On a vu que $f \otimes Q$ est un morphisme de treillis. Soit donc $\phi \in \mathcal{A}$ tel que $a(\phi) = n+1$ et supposons que $(f \otimes Q) \circ \phi = \phi \circ (f \otimes Q)^{n+1}$. Soient $s \in \{1, \ldots, n+1\}$ et $\lambda \in (L_1 \otimes_{C'} Q)^n$. Posons $\psi' = \phi_{s,\, \lambda}$ et $\psi = \phi_{s,\, (f \otimes Q) \circ \lambda}$, donc $(f \otimes Q) \circ \psi' = \psi \circ (f \otimes Q)$. On a que $\pi(\mu.\psi) \in C$ ssi $\pi(\mu.\psi') \in C'$, car $f(\ \pi(\mu.\psi')\ ) = \pi(\mu.\psi)$:

$$
\begin{aligned}
f(\ \pi(\mu.\psi')\ ) &= f(\ \pi(\mu.\phi_{s,\, \lambda})\ ) \\
&= f(\ \mu.\phi_{s,\, \pi \circ \lambda}\ ) \\
&= \mu.\phi_{s,\, f \circ \pi \circ \lambda} \\
&= \mu.\phi_{s,\, \pi \circ (f \otimes Q) \circ \lambda} \\
&= \pi(\mu.\phi_{s,\, (f \otimes Q) \circ \lambda}) \\
&= \pi(\mu.\psi) \ .
\end{aligned}
$$

Supposons donc que $\pi(\mu.\psi) \in C$. On sait alors que $\mu.\psi = [\pi(\mu.\psi), \mu.\tilde{\psi}]$. De même, $\mu.\psi' = [\pi(\mu.\psi'), \mu.\tilde{\psi}']$, de plus $f \otimes Q(\mu.\psi') = [f(\pi(\mu.\psi')), \mu.\tilde{\psi}'] = [\pi(\mu.\psi), \mu.\tilde{\psi}']$. Il suffit donc de voir que les opérateurs $\tilde{\psi}', \tilde{\psi} : Q \longrightarrow Q$ sont égaux. Cela est une conséquence du fait que $(f \otimes Q) \circ \psi' = \psi \circ (f \otimes Q)$:

$$
\begin{aligned}
[\pi(\mu.\psi), \tilde{\psi}(q)] &= \psi(\ [\pi(\mu.\psi), q]\ ) \\
&= \psi(\ [f(\pi(\mu.\psi')), q]\ ) \\
&= \psi \circ (f \otimes Q)(\ [\pi(\mu.\psi'), q]\ ) \\
&= (f \otimes Q) \circ \psi'(\ [\pi(\mu.\psi'), q]\ ) \\
&= (f \otimes Q)(\ [\pi(\mu.\psi'), \tilde{\psi}'(q)]\ ) \\
&= [f(\pi(\mu.\psi')), \tilde{\psi}'(q)] \\
&= [\pi(\mu.\psi), \tilde{\psi}'(q)] \ .
\end{aligned}
$$

La démonstration que $f \otimes Q$ préserve les plus grands points postfixes est duale. □

B.3 Propriétés des objets libres dans la catégorie des μ-treillis

Dans la suite soit $\mathcal{J}_P$ le μ-treillis libre sur l'ensemble ordonné P. Pour un ensemble convexe $C \subseteq \mathcal{J}_P$, soit $\mathcal{J}_P[C] = \mathcal{J}_P \otimes_C 2$. Si le convexe C est l'intervalle $[a, b]$ écrivons $\mathcal{J}_P[a, b]$ pour $\mathcal{J}_P[C]$.

Proposition B.3.1 Dans $\mathcal{J}_P$ chaque élément $p \in P$ est à la fois σ-atomique et π-atomique.

Preuve. Supposons que $p \leq a_1 \vee a_2$. La fonction $j : P \longrightarrow \mathcal{J}_P[p, a_1 \vee a_2]$ qui mène p en $[p, \top]$ préserve l'ordre. Il existe alors un morphisme de μ-treillis $i : \mathcal{J}_P \longrightarrow \mathcal{J}_P[p, a_1 \vee a_2]$ tel que $\pi \circ i = Id_{\mathcal{J}_P}$, car la relation est vraie sur les générateurs. Enfin $[p, \top] = i(p) \leq i(a_1 \vee a_2) = i(a_1) \vee i(a_2) = [a \vee b, x]$. Puisque $p, a_1 \vee a_2 \in [p, a_1 \vee a_2]$, il suit $\top \leq x$. Mais aussi $x = \bigvee_{a_i \in [p, a_1 \vee a_2]} q_i$, où $i(a_i) = [a_i, q_i]$. Si $a_i \notin [p, a_1 \vee a_2]$, $i = 1, 2$, alors $\bigvee_{a_i \in [p, a_1 \vee a_2]} q_i = \bot$ et donc ou bien $p \leq a_1$, ou bien $p \leq a_2$. On utilise une argumentation duale pour montrer que p est π-atomique, pour tout $p \in P$. $\square$

Proposition B.3.2 $\mathcal{J}_P$ satisfait la condition de Whitman, à savoir si

$$\bigwedge_{i=1,\ldots,n} a_i \leq \bigvee_{j=1,\ldots,m} b_j ,$$

alors ou bien il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que

$$a_i \leq \bigvee_{j=1,\ldots,m} b_j ,$$

ou bien il existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tel que

$$\bigwedge_{i=1,\ldots,n} a_i \leq b_j .$$

Preuve. Soit $a = \bigwedge_{i=1,\ldots,n} a_i \leq \bigvee_{j=1,\ldots,m} b_j = b$. La fonction $j : P \longrightarrow \mathcal{J}_P[a, b]$ qui mène p en $[p, \top]$ préserve l'ordre. Il existe donc une extension $i : \mathcal{J}_P \longrightarrow \mathcal{J}_P[a, b]$, et l'on peut voir que $\pi \circ i = Id_{\mathcal{J}_P}$, car la relation est vraie sur les générateurs.

Soient $i(a_i) = [a_i, q_i]$ et $i(b_j) = [b_j, m_j]$. Or $[a, \bigwedge_{a_i \in [a,b]} q_i] = \bigwedge_{i=1,\ldots,n} i(a_i) = i(a) \leq i(b) = \bigvee_{j=1,\ldots,m} i(b_j) = [b, \bigvee_{b_j \in [a,b]} m_j]$. Puisque $a, b \in [a, b]$, on a $\bigwedge_{a_i \in [a,b]} q_i \leq \bigvee_{b_j \in [a,b]} m_j$ et cela entraîne que ou bien il existe i tel que $a_i \in [a, b]$ ou bien il existe j tel que $b_j \in [a, b]$. $\square$

B.4 Échec des conditions de Whitman infinitaires dans les objets libres

Nous allons écrire $F_\infty(P)$ pour le treillis libre sur P avec infima et suprema dénombrables. Il est intéressant de comprendre si le μ-treillis libre $\mathcal{J}_P$ est un sous-treillis de $F_\infty(P)$. Nous allons donner une réponse négative.

Dans le μ-treillis libre $\mathcal{J}_P$ le plus petit point préfixe d'un opérateur $\psi = \phi_{s,\lambda}$ avec $\phi \in \mathcal{A}$ satisfait:

$$\mu.\psi \quad = \quad \bigvee_{n \geq 0} \psi^n(\perp) \; .$$

Nous démontrons cela dans le chapitre 5. À la fois, dans le treillis $F_\infty(P)$, la condition de Whitman infinitaire suivante est vraie, c'est-à-dire que si

$$\bigwedge_{i \in I} a_i \quad \leq \quad \bigvee_{j \in J} b_j \; ,$$

alors il existe $i \in I$ tel que

$$a_i \quad \leq \quad \bigvee_{j \in J} b_j \; ,$$

ou bien il existe $j \in J$ tel que

$$\bigwedge_{i \in I} a_i \quad \leq \quad b_j \; ,$$

où I et J sont des ensembles dénombrables. Il en découle que si $\mathcal{J}_P$ est un sous-treillis de $F_\infty(P)$ alors la condition suivante est vraie:

$$\begin{aligned} A \wedge B \leq \mu.\psi \quad \Rightarrow \quad & A \leq \mu.\psi \; , && \text{ou bien} \\ & B \leq \mu.\psi \; , && \text{ou bien} \\ & \exists n \; A \wedge B \leq \psi^n(\perp) && . \end{aligned}$$

Considérons le μ-treillis $\mathcal{J}_{\{a,b,c\}}$ et le polynôme:

$$\psi(x) \;=\; a \wedge (b \vee (c \wedge (a \vee (b \wedge (c \vee x))))) \; .$$

Un tel polynôme ne possède pas un point fixe dans le treillis libre $F(\{a, b, c\})$ sur les trois générateurs a, b, c (Freese, Ježek et Nation, 1995, §I.5). Posons $A = a$, $B =$

$b \vee (c \wedge (a \vee (b \wedge (c \vee \mu.\psi))))$. On a que:

$$A \wedge B = \psi(\ \mu.\psi\ ) \leq \mu.\psi\ .$$

En utilisant les conditions de Whitman finitaires, il est simple de voir que $A \not\leq \mu.\psi$, car sinon $a \leq b$ ou $a \leq c$, et que $B \not\leq \mu.\psi$, car $b \not\leq a$. Supposons qu'il est vrai que:

$$A \wedge B \leq \psi^n(\bot)$$

pour quelque n. Il suit que $\mu.\psi = A \wedge B \leq \psi^n(\bot)$ et donc

$$\psi^{n+1}(\bot) = \psi^n(\bot)$$

dans $\mathcal{J}_{\{a,b,c\}}$. Mais l'inclusion de $F(P)$ dans $\mathcal{J}_P$ est un plongement et donc $\psi^n(\bot)$ est un point fixe de $\psi(x)$ dans le treillis libre sur trois générateurs, ce qui est une contradiction.

B.5 Les μ-treillis fondés ne sont pas fermés sous les limites inductives

Le but de cette section est de construire explicitement un μ-treillis L qui n'est pas fondé. Ce μ-treillis est un treillis avec les propriétés suivantes:

1. tout polynôme a un point fixe, car en effet il s'agit d'un μ-treillis,
2. il n'est pas localement fini, ni localement distributif, car le treillis libre sur trois générateurs est un sous-treillis de L,
3. il n'est pas complet, car il n'est pas fondé.

Observons que le μ-treillis libre sur trois générateurs $\mathcal{J}_{\{a,b,c\}}$ satisfait déjà les deux premières propriétés, mais on ne sait pas s'il est complet, même s'il est raisonnable de douter que $\mathcal{J}_{\{a,b,c\}}$ soit un treillis complet. L est donc fabriqué à partir de $\mathcal{J}_{\{a,b,c\}}$ en forçant l'existence d'une chaîne infiniment descendante qui ne possède pas un infimum.

Dans la suite nous allons noter par $L[l]$ le double de L par l'intervalle $[l, l]$.

Lemme B.5.1 Soit L un μ-treillis fondé et soit $l \in L$. Alors $L[l]$ est aussi fondé.

Preuve. Soient ϕ, ϕ' tels que $\pi \circ \phi' = \phi \circ \pi$. Par induction sur les ordinaux, nous allons montrer que, pour tout ordinal α, ${\phi'}^{\alpha}(\bot)$ existe dans $L[l]$ si et seulement si $\phi^{\alpha}(\bot)$ existe dans L et, dans ce cas, on a que $\pi({\phi'}^{\alpha}(\bot)) = \phi^{\alpha}(\bot)$. En effet $\pi({\phi'}^{0}(\bot)) = \bot = \phi^{0}(\bot)$. De même, si $\pi({\phi'}^{\alpha}(\bot)) = \phi^{\alpha}(\bot)$, alors $\pi({\phi'}^{\alpha+1}(\bot)) = \pi \circ \phi'({\phi'}^{\alpha}(\bot)) = \phi \circ \pi({\phi'}^{\alpha}(\bot)) = \phi(\phi^{\alpha}(\bot)) = \phi^{\alpha+1}(\bot)$. Enfin, soit β un ordinal limite et supposons que pour tout $\alpha < \beta$ on a $\pi({\phi'}^{\alpha}(\bot)) = \phi^{\alpha}(\bot)$. On voit alors que $\pi(\{{\phi'}^{\alpha}(\bot) | \alpha < \beta\}) = \{\phi^{\alpha}(\bot) | \alpha < \beta\}$ et le supremum de l'ensemble $\{{\phi'}^{\alpha}(\bot) | \alpha < \beta\}$ existe si et seulement si le supremum de l'ensemble $\{\phi^{\alpha}(\bot) | \alpha < \beta\}$ existe et, dans ce cas, on a que $\pi(\bigvee_{\alpha<\beta} {\phi'}^{\alpha}(\bot)) = \bigvee_{\alpha\leq\beta} \phi^{\alpha}(\bot)$. On peut conclure que $L[l]$ est fondé si L est bien fondé. $\square$

Soient $\psi, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{J}_{P+\{x\}}$ tels que $\psi(x) = \psi_1(x) \wedge \psi_2(x)$, posons $\mu = \mu.\psi$ et supposons que $\mu < \psi_1(\mu)$ et $\mu < \psi_2(\mu)$. Supposons enfin que $\psi^n(\bot) < \psi^{n+1}(\bot)$ pour tout $n \geq 0$. Si l'on peut trouver de tels ψ_i, on obtient la proposition suivante:

Proposition B.5.2 Les μ-treillis fondés ne sont pas fermés sous les limites inductives. Il existe un μ-treillis qui n'est pas fondé.

On peut choisir $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{J}_{\{a,b,c,x\}}$: $\psi_1(x) = a$ et $\psi_2(x) = b \vee (c \wedge (a \vee (b \wedge (c \vee x))))$; on peut se convaincre que pour tout $l \in \mathcal{J}_{\{a,b,c\}}$ on a que $\psi_1(l) \wedge \psi_2(l) < \psi_i(l)$, car $\psi_i(l) \not\leq \psi_j(l)$ si $i \neq j$, ce qui est facile à voir si l'on utilise la propriété de Whitman. De plus, on sait que la chaîne $\{\psi^n(\bot)\}_{n\geq 0}$ est infinie. On obtient la proposition suivante:

Proposition B.5.3 Il existe un treillis tel que tout polynôme possède un point fixe, qui n'est pas complet, ni localement fini, ni localement distributif.

Preuve. (Proposition B.5.3). Soit L le treillis construit dans la proposition B.5.2 à partir de $\mathcal{J}_{\{a,b,c\}}$ et des ψ_i. Puisque L est un μ-treillis, tout polynôme possède un point fixe. Or L n'est pas complet, car il n'est pas fondé. Aussi, $F(\{a, b, c\})$ est un sous-treillis de L de type fini, mais ce treillis n'est pas fini, ni distributif. $\square$

Preuve. (Proposition B.5.2). Définissons une suite de plongements $i_n : L_{n-1} \rightarrowtail L_n$ dont on va étudier la limite inductive L.

Soient $L_0 = \mathcal{J}_P$, $L_1 = \mathcal{J}_P[\mu.\psi]$ et posons $\mu_0 = \mu.\psi \in L_0$. Puisqu'il existe une copie de P dans L_1, on voit qu'il existe un plongement $i_1 : L_0 \rightarrowtail L_1$, car $\pi \circ i_1 = Id_{\mathcal{J}_P}$. Dans L_1 il existe deux copies de μ_0, qu'on appelle μ_1, μ_0, de façon que $\mu_1 = \mu.\psi \in L_1$.

Supposons qu'on a construit un plongement $i_n : L_{n-1} \rightarrowtail L_n$, où $L_n = L_{n-1}[\mu.\psi]$. Soient $C = \{\mu.\psi\} \subseteq L_n$ et $C' = i^{-1}(C)$. Or $C' = \{\mu.\psi\}$, car i est injectif et $i(\mu.\psi) = \mu.\psi$. Donc le plongement i_n est relevé à un plongement $i_{n+1} : L_{n-1}[\mu.\psi] \rightarrowtail L_n[\mu.\psi]$; en observant que $L_{n-1}[\mu.\psi] = L_n$ on obtient le plongement $i_{n+1} : L_n \rightarrowtail L_{n+1}$, où $L_{n+1} = L_n[\mu.\psi]$. Si dans L^n il existe $\mu_0, \ldots, \mu_n$ et $\mu_n = \mu.\psi$, alors dans L^{n+1} il existe $\mu_0, \ldots, \mu_{n-1}$ et de plus deux copies μ_n, μ_{n+1} de $\mu_n \in L_n$, qu'on a appelé de façon que $\mu_{n+1} = \mu.\psi \in L_{n+1}$.

Dans L_n il existe donc $n+1$ copies différentes de l'original $\mu.\psi$ qu'on a appelé μ_i pour $i = 0, \ldots, n$ et elles sont organisées dans un ordre linéaire. De plus on sais que pour tout $i = 0, \ldots, n$ et $k \geq 0$ on a $\psi^k(\perp) \leq \mu_i$ et $\mu_n = \mu.\psi$. Montrons que $\mu_0 < \mu_1 < \ldots < \mu_n$. En effet, μ_n est obtenu de μ_{n-1} par une opération de doublage de μ_{n-1}, $L_n = L_{n-1}[\mu_{n-1}]$; on a appelé $\mu_n = \mu.\psi$ et μ_{n-1} l'autre copie de μ_{n-1}. Soit $\mu = \mu_{n-1}$, si l'on montre que $\psi(\ [\mu, \perp]\ ) = [\mu, \top]$ dans $L_{n-1}[\mu_{n-1}]$, il suit que $\mu_n = \mu.\psi = [\mu, \top] > [\mu, \perp] = \mu_{n-1}$. Or:

$$\begin{aligned}
\psi(\ [\mu, \perp]\ ) &= \psi_1(\ [\mu, \perp]\ ) \wedge \psi_2(\ [\mu, \perp]\ ) \\
&= [\psi_1(\mu), x_1] \wedge [\psi_2(\mu), x_2] \\
&= [\psi_1(\mu) \wedge \psi_2(\mu), \textstyle\bigwedge_{\psi_i(\mu)=\mu} x_i] \\
&= [\psi(\mu), \top]
\end{aligned}$$

car $\psi_j(\mu) \neq \mu$ pour $j = 1, 2$. Cette inégalité est une conséquence du fait que $\psi_j(\mu_0) \neq \mu_0$ et que le composé $i : L_0 \longrightarrow L_{n-1}$ est un plongement qui préserve la structure de μ-treillis.

On voit aussi que $i_n(\mu_k) = \mu_{k+1}$, pour tout n et tout $k = 0, \dots n-1$. Ce fait est vrai pour $n = 1$, car $i(\mu_0) = i(\mu.\psi) = \mu.\psi = \mu_1$. Supposons la proposition vraie pour n, montrons qu'elle est vraie pour $n+1$. Rappelons que $i_{n+1} = i_n \otimes 2 : L_{n-1}[\mu_{n-1}] \longrightarrow L[\mu_n]$ et donc:

$$i_{n+1}(\mu_k) \quad = \quad \begin{cases} \mu_{k+1}, & k = n, n-1 \;, \\ i_n(\mu_k) = \mu_{k+1}, & k < n-1 \;. \end{cases}$$

En effet, si μ_k est obtenu par doublage de μ_{n-1}, c'est-à-dire si $k = n, n-1$, alors $\mu_k = [\mu_{n-1}, x]$ et $i_{n+1}(\mu_k) = [i_n(\mu_{n-1}), x] = [\mu_n, x] \in \{\mu_{n+1}, \mu_n\}$. Puisque $i_{n+1}(\mu_n) = i_{n+1}(\mu.\psi) = \mu.\psi = \mu_{n+1}$ et i_n est un plongement, on voit que la propriété est vraie pour $k = n, n-1$. Si $k < n-1$ alors μ_k n'est pas obtenu par doublage et sa seconde coordonnée ne sert pas au calcul de i_{n+1}: $i_{n+1}(\mu_k) = i_{n+1}([\mu_k, x]) = [i_n(\mu_k), x] = [\mu_{k+1}, x] = \mu_{k+1}$.

Soit L la limite inductive de cette suite. Dénotons par $[\mu_0, n]$ la classe d'équivalence de μ_0 à l'étage n dans L. Les $\{[\mu_0, n]\}_{n \geq 0}$ forment une chaîne infinie descendante car $[\mu_0, n+1] < [\mu_0, n]$. Pour tout $n, k \geq 0$ on a que $\psi^k(\bot) \leq [\mu_0, k]$. Il suit alors que $\bigvee_{n \geq 0} \psi^n(\bot)$ n'existe pas et donc L n'est pas fondé en tant que μ-treillis; à fortiori, il n'est pas un treillis complet. $\square$

APPENDICE C

PREUVES CIRCULAIRES

Le but de cet appendice est de donner les intuitions logiques qu'on trouve dans notre démonstration du fait que le treillis $\mathcal{J}_P$ est libre. En effet, on peut considérer une stratégie gagnante pour le médiateur dans le jeu $\langle G, H \rangle$, $G, H \in \mathcal{J}(P)$, comme une preuve que $G \leq H$. On peut se restreindre à considérer des stratégies à mémoire bornée pour voir que selon cette interprétation les preuves peuvent contenir des cycles, à savoir elles sont circulaires. Notre observation principale est alors que les preuves circulaires donnent un système tout à fait raisonnable pour présenter les points fixes des opérateurs.

La façon usuelle pour introduire le plus petit point préfixe d'un opérateur ϕ est à l'aide des règles suivantes:

$$\frac{t \vdash \phi[\,\mu_x.\phi[x]\,]}{t \vdash \mu_x.\phi[x]}\, R\mu \qquad\qquad \frac{\phi[t] \vdash t}{\mu_x.\phi[x] \vdash t}\, L\mu$$

De ces deux règles, la seconde n'est pas une bonne règle du point de vue de la procédure d'élimination des coupures. Par exemple, il n'est pas clair comment éliminer la coupure suivante:

$$\frac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\Pi_1\\ \phi[t] \vdash t\end{array}}{\mu_x.\phi[x] \vdash t}\, L\mu \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\Pi_2\\ t \vdash t'\end{array}}{\mu_x.\phi[x] \vdash t'}\,\mathrm{Cut} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\Pi_1\\ \phi[t] \vdash t\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\Pi_2\\ t \vdash t'\end{array}}{\phi[t] \vdash t'}\,\mathrm{Cut}}{\mu_x.\phi[x] \vdash t'}\, ??$$

En effet le problème majeur de la règle $L\mu$ est qu'elle déplace l'information de la droite vers la gauche.

On peut donner une interprétation catégorielle à ce problème: soient C une catégorie et $\Phi : C \longrightarrow C$ un foncteur et soit $\mu.\Phi$ l'algèbre initiale pour ce foncteur. On obtient par initialité une collection de fonctions:

$$\{ \; C(\Phi(a), a) \xrightarrow{L\mu_a} C(\mu.\Phi, a) \; \}_{a \in Ob(C)} \; .$$

Cette collection est dinaturelle, c'est-à-dire que pour une flèche $f : a \longrightarrow b$ le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
& C(\Phi(a),a) \arrow[r, "L\mu_a"] & C(\mu.\Phi,a) \arrow[dd, "f_*"] \\
C(\Phi(b),a) \arrow[ur, "\Phi(f)^*"] \arrow[dr, "f_*"'] & & \\
& C(\Phi(b),b) \arrow[r, "L\mu_b"] & C(\mu.\Phi,b)
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Cependant, cette collection n'est pas naturelle dans sa seconde variable:

$$\begin{tikzcd}
C(\Phi(a),a) \arrow[r, "L\mu_a"] \arrow[d, "f_*"] & C(\mu.\Phi,a) \arrow[d, "f_*"] \\
C(\Phi(a),b) \arrow[r, "??"] & C(\mu.\Phi,b) \; .
\end{tikzcd}$$

Nous allons essayer de comprendre pour quelle raison il existe une solution à ce problème, chose implicite dans le travail sur le μ-treillis $\mathcal{J}_P$.

Observons d'abord que la règle $L\mu$ peut être remplacée par la règle suivante, qui nous rappelle la déduction naturelle:

$$\frac{\begin{array}{c} \langle x \vdash t \rangle \\ \vdots \, \Pi \\ \phi[x] \vdash t \end{array}}{\mu_x.\phi[x] \vdash t}$$

à savoir: *si l'on veut montrer que $\mu_x.\phi[x] \vdash t$, il suffit avoir une preuve Π de $\phi[x] \vdash t$, où x est un élément arbitraire que l'on suppose plus petit que t.* On appelle $x \vdash t$ une hypothèse ouverte. Observons maintenant que si l'on identifie la variable x avec le terme $\mu_x.\phi[x] \vdash t$ on obtient un schéma pour une preuve circulaire:

$$\frac{\begin{array}{c}\langle x \vdash t \rangle \\ \vdots\, \Pi \\ \phi[x] \vdash t\end{array}}{x \vdash t}$$

à savoir: *pour prouver que $x \vdash t$ il suffit supposer que $x \vdash t$ et prouver que $\phi[x] \vdash t$.* Cela nous donne une bonne raison pour penser que des structures de graphe étiqueté avec cycles peuvent aboutir à une présentation des points fixes.

Dans la preuve que le μ-treillis $\mathcal{J}_P$ est libre nous étions confronté avec le problème contraire: étant donné une preuve circulaire, comment peut-on la transformer dans une structure d'arbre usuelle? Ce problème se pose quand on veut démontrer que la surjection

$$F_\mu(P) \twoheadrightarrow \mathcal{J}_P \ ,$$

naturelle en P, du μ-treillis libre $F_\mu(P)$ vers $\mathcal{J}_P$, qu'on définit par extension à l'aide des identifications sur les générateurs, est un plongement. L'idée utilisée est la suivante. On peut considérer une preuve circulaire comme un ensemble fini $\{\Pi_i\}_{i\in I}$ de bonnes preuves (ou preuves de circularité plus petite) de $\phi[x] \vdash t_i$. Or chaque preuve Π_j dépend de certaines hypothèses ouvertes de la forme $x \vdash t_i$ avec i possiblement différent de j. Sur cette collection de preuves il y a une structure de graphe sous-jacent auquel nous ajoutons des transitions/règles de la forme:

$$\frac{\phi[x] \vdash t_i}{x \vdash t_i}\,\mathrm{Reg}$$

de toute hypothèse ouverte de la forme $x \vdash t_i$ vers la racine de Π_i — nous suivons la direction des règles pour la recherche des preuves — et de cette façon nous introduisons aussi de la circularité dans ces preuves. Si $I = \{1, 2\}$, on peut dessiner la situation comme il suit:

$$\frac{\begin{array}{c}\langle x \vdash t_1\, ,\ x \vdash t_2 \rangle \\ \vdots\, \Pi_1\end{array}}{\phi[x] \vdash t_1} \qquad \frac{\begin{array}{c}\langle x \vdash t_1\, ,\ x \vdash t_2 \rangle \\ \vdots\, \Pi_2\end{array}}{\phi[x] \vdash t_2} \ .$$

Étant donné cette structure on peut vraiment montrer que $\mu_x.\phi[x] \vdash t_i$ pour tout $i \in I$ et si x est une notation abrégée pour $\mu_x.\phi[x]$, alors cette structure est en train de dire quelque chose qui est vraie et pas seulement conditionnelle aux hypothèses ouvertes. En effet, en substituant dans les preuves x pour $\bigwedge_{i\in I} t_i$, on obtient des preuves complètes et donc il est vrai que pour tout $i \in I$ on a:

$$\phi[\bigwedge_{i\in I} t_i\,] \;\;\vdash\;\; t_i\,.$$

On déduit que $\bigwedge_{i\in I} t_i$ est un point préfixe de ϕ et donc $\mu_x.\phi[x] \vdash \bigwedge_{i\in I} t_i$. D'ici, on conclut que:

$$\mu_x.\phi[x] \;\;\vdash\;\; t_i\,,$$

pour tout $i \in I$. Pour le cas $I = \{1, 2\}$ on peut traduire le schéma de preuve circulaire dans une preuve traditionnelle comme il suit:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\,\Pi_1[t_1 \wedge t_2/x]}{\phi[t_1 \wedge t_2] \vdash t_1} \qquad \dfrac{\vdots\,\Pi_2[t_1 \wedge t_2/x]}{\phi[t_1 \wedge t_2] \vdash t_2}}{\phi[t_1 \wedge t_2] \vdash t_1 \wedge t_2}\,R\wedge}{\mu_x.\phi[x] \vdash t_1 \wedge t_2}\,L\mu \qquad \dfrac{\vdots}{t_1 \wedge t_2 \vdash t_i}}{\mu_x.\phi[x] \vdash t_i}\,\text{Cut} \quad .$$

Dans la suite, nous allons introduire un calcul traditionnel pour le μ-treillis et après nous allons décrire le calcul des preuves circulaires qui est une traduction directe dans un formalisme logique de la présentation de $\mathcal{J}_P$ qu'on vient de donner. Enfin, nous allons décrire un algorithme pour traduire une preuve circulaire dans une preuve du calcul traditionnel.

C.1 Une présentation traditionnelle du μ-treillis libre

Définition C.1.1 Soit $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ un ensemble dénombrable de variables. L'ensemble des *termes* $T(P)$ est défini par induction, avec les fonctions $FV, BIND : T(P) \longrightarrow P_f(X)$ de l'ensemble des termes vers l'ensemble des parties finies de X.

- Pour tout $p \in P$, $p \in T(P)$ et $FV(p) = BIND(p) = \emptyset$.

- Pour tout $x \in X$, $x \in T(P)$ et $FV(x) = \{x\}$, $BIND(x) = \emptyset$.
- $\bot, \top \in T(P)$ et $FV(\bot) = FV(\top) = \emptyset = BIND(\top) = BIND(\bot)$.
- Si $t_1, t_2 \in T(P)$ et $BIND(t_i) \cap BIND(t_j) = \emptyset$ pour $i \neq j$, alors $t_1 \vee t_2 \in T(P)$ et $t_1 \wedge t_2 \in T(P)$. On a que $FV(t_1 \wedge t_2) = FV(t_1 \vee t_2) = FV(t_1) \cup FV(t_2)$ et $BIND(t_1 \wedge t_2) = BIND(t_1 \vee t_2) = BIND(t_1) \cup BIND(t_2)$.
- Si $t \in T(P)$ et $x \in FV(t)$, alors $\mu_x.t \in T(P)$ et $\nu_x.t \in T(P)$. $FV(\mu_x.t) = FV(\nu_x.t) = FV(t) \backslash \{x\}$, $BIND(\mu_x.t) = BIND(\nu_x.t) = BIND(t) \cup \{x\}$.

Définition C.1.2 Un terme $t \in T(P)$ est *clos* si $FV(t) = \emptyset$. Soit $T_c(P)$ l'ensemble des termes clos. Observons que $p, \bot, \top \in T_c(P)$. Si $t_1, t_2 \in T_c(P)$, alors $t_1 \vee t_2 \in T_c(P)$ et $t_1 \wedge t_2 \in T_c(P)$.

Définition C.1.3 Soient $t_1, t_2 \in T_c(P)$. Posons $t_1 \vdash t_2$ si et seulement s'il existe un couple $\langle A, \lambda \rangle$, où A est un arbre fini et $\lambda : A_0 \longrightarrow T_c(P) \times T_c(P)$ est un étiquetage des sommets de l'arbre par des couples de termes. De plus, si a_0 est la racine de l'arbre A, alors $\lambda(a_0) = (t_1, t_2)$ et si $a \in A_0$, alors

$$\frac{\{\lambda(a')\}_{a \to a'}}{\lambda(a)}$$

est une règle du calcul suivante (cf. page 154).

Proposition C.1.4 Soit $\cong$ la relation d'équivalence définie par $t_1 \cong t_2$ si et seulement si $t_1 \vdash t_2$ et $t_2 \vdash t_1$. L'ensemble $T_c(P)/\cong$ des classes d'équivalence de termes clos est un μ-treillis qui est libre sur P.

$$\frac{p_1 \leq p_2}{p_1 \vdash p_2}\, P$$

$$\frac{}{t \vdash t}\, I \qquad \frac{t_1 \vdash t_2 \quad t_2 \vdash t_3}{t_1 \vdash t_3}\, C$$

$$\frac{}{t \vdash \top}\, R\top$$

$$\frac{t_1 \vdash t_2 \quad t_1 \vdash t_3}{t_1 \vdash t_2 \wedge t_3}\, R\wedge \qquad \frac{t_i \vdash t_3}{t_1 \wedge t_2 \vdash t_3}\, L\wedge$$

$$\frac{}{\bot \vdash t}\, L\bot$$

$$\frac{t_1 \vdash t_i}{t_1 \vdash t_2 \vee t_3}\, R\vee \qquad \frac{t_1 \vdash t_3 \quad t_2 \vdash t_3}{t_1 \vee t_2 \vdash t_3}\, L\vee$$

$$\frac{t_1 \vdash t_2[\mu_x.t_2/x]}{t_1 \vdash \mu_x.t_2}\, R\mu \qquad \frac{t_1[t_2/x] \vdash t_2}{\mu_x.t_1 \vdash t_2}\, L\mu$$

$$\frac{t_1 \vdash t_2[t_1/x]}{t_1 \vdash \nu_x.t_2}\, R\nu \qquad \frac{t_1[\nu_x.t_1/x] \vdash t_2}{\nu_x.t_1 \vdash t_2}\, L\nu$$

Remarque C.1.5 Il n'est pas clair comment éliminer les coupures suivantes:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ t_1 \vdash t_2[\mu_x.t_2/x]\end{matrix}}{t_1 \vdash \mu_x.t_2} \quad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ t_2[t_3/x] \vdash t_3\end{matrix}}{\mu_x.t_2 \vdash t_3}}{t_1 \vdash t_3}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ t_1[t_2/x] \vdash t_2\end{matrix}}{\mu_x.t_1 \vdash t_2} \quad \begin{matrix}\vdots\\ t_2 \vdash t_3\end{matrix}}{\mu_x.t_1 \vdash t_3} \;.$$

En particulier les règles $L\mu$ et $R\nu$ apparaissent être les plus problématiques.

C.2 Une présentation du μ-treillis libre par les preuves circulaires

Définition C.2.1 Soit X un ensemble de variables. Un *système polarisé d'équations* S est un triplet $\langle X_S, q_S, \epsilon_S\rangle$ où $X_S \subseteq_f X$ est un sous-ensemble fini de X, $q_S : X_S \longrightarrow F(X,P)$ et $\epsilon_S : X_S \longrightarrow \{\mu,\nu\}$. Ici $F(X,P)$ est l'ensemble des polynômes sur les variables dans les ensembles P ou X, c'est-à-dire expressions formelles construites à partir des variables, des infima et de suprema finis. Nous allons représenter un système polarisé d'équations $\langle X_S, q_S, \epsilon_S\rangle$ simplement par:

$$\{\ x =_Q q_x\ \}_{x\in X_S}\ ,$$

où l'on sous-entend que $Q = \epsilon_S(x)$ et $q_x = q_S(x)$. Dans la suite, nous allons utiliser cette notation de type ensembliste.

Définition C.2.2 Soit S un système polarisé d'équations. Définissons la relation $\rightarrow$ entre les variables de X_S de la façon suivante:

$$x \rightarrow y \ \text{ si et seulement si } \ q_x \text{ contient la variable } y\ .$$

Disons que S est canoniquement soluble si $\langle X_S, \rightarrow\rangle$ est une forêt avec retours $\langle F, \beta\rangle$, tout $x \in X_S$ est un retour et si $y \in X$ est tel que q_x contient y, $x \in X_S$, alors $y \in X_S$. Ici par forêt avec retours on entend la somme d'arbres avec retours dans la catégorie des graphes. Une forêt avec retours possède un ensemble distingué de racines. Si S est canoniquement soluble, on peut trouver d'abord une solution partielle $\sigma(x) \in T(P)$ pour tout $x \in X_S$ par induction sur la structure bien fondée de la forêt F par:

$$\sigma(x) \quad = \quad \epsilon(x).q_x[\ \{\sigma(y)/y\}_{x \to_F y}\ ]\ ,$$

où l'on a noté par $\to_F$ une transition de cette forêt, c'est-à-dire une transition descendante. On peut trouver ensuite une solution $ev(y) \in T_c(P)$ pour toute variable $y \in X_S$ en posant:

$$ev(y) \quad = \quad \sigma(y)[\ \{ev(x)/x\}_{x<y}\ ]\ ,$$

où $x < y$ si x est un ancêtre propre de y dans la forêt. Si S est un tel système, la définition de ev s'étend à tout polynôme dans les variables dans X_S par substitution:

$$ev(\,p\,) \quad = \quad p[\ \{ev(x)/x\}_{x \in X_S}\ ]\ .$$

Définition C.2.3 Nous allons associer à chaque terme $t \in T(P)$ un couple $\langle p_t, S_t \rangle$ où p_t est un polynôme et S_t est un système polarisé d'équations. Si $t \in T_c(P)$, alors S_t est canoniquement soluble, de plus p_t est tel que ses variables sont exactement les racines de la forêt de S_t. Dans la suite, nous allons représenter un terme par ce couple.

- Pour tout $p \in P$, $p_p = p$ et $S_p = \emptyset$.
- Pour tout $y \in X$, $p_y = y$ et $S_y = \emptyset$.
- $p_\bot = \bot$ et $S_\bot = \emptyset$, $p_\top = \top$ et $S_\top = \emptyset$.
- $p_{t_1 \wedge t_2} = p_{t_1} \wedge p_{t_2}$ et $S_{t_1 \wedge t_2} = S_{t_1} \cup S_{t_2}$.
- $p_{t_1 \vee t_2} = p_{t_1} \vee p_{t_2}$ et $S_{t_1 \vee t_2} = S_{t_1} \cup S_{t_2}$.
- $p_{\mu_y.t[y]} = y$ et $S_{\mu_y.t[y]} = S_{t[y]} \cup \{y =_\mu p_{t[y]}\}$.
- $p_{\nu_y.t[y]} = y$ et $S_{\nu_y.t[y]} = S_{t[y]} \cup \{y =_\nu p_{t[y]}\}$.

Remarque C.2.4 Si $t \in T(P)$ et $S_t = \langle X_t, p, \epsilon \rangle$, alors $X_t = BIND(t)$. De plus, si $t \in T_c(P)$, alors $ev(t) = t$.

Exemple C.2.5 Considérons le terme $t = \mu_x.\nu_y.(x \wedge \mu_z.(z \vee y))$. On a $p_t = x$ et S_t est le système suivant:

$$\begin{cases} x & =_\mu \quad y \\ y & =_\nu \quad x \wedge z \\ z & =_\mu \quad z \vee y \; . \end{cases}$$

La forêt avec retours associée au système S_t est l'arbre suivant:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d] \\ y \arrow[d] \arrow[u, bend right] \\ z \arrow[u, bend right] \arrow[loop left] \end{tikzcd} \quad .$$

Définition C.2.6 Soient $t_1, t_2 \in T(P)$ deux termes. Une *preuve circulaire* sur t_1, t_2 est un couple $\Pi = \langle G, \lambda \rangle$ où G est un graphe pointé fini et connexe avec point de départ g_0 et λ est un étiquetage des sommets par des couples de polynômes en P et X. Les conditions suivantes sont satisfaites:

1. Pour tout $g \in G_0$
$$\frac{\{\ \lambda(g')\ \}_{g \to g'}}{\lambda(g)}$$
est une règle du calcul pour t_1, t_2 (cf. page 158).

2. Pour tout cycle propre γ de G soit $L(\gamma) \subseteq X_{t_1}$ défini par:
$$L(\gamma) \quad = \quad \{\ x \in X_{t_1} \mid \text{il existe une transition de la forme } Lx \text{ sur } \gamma\ \}$$
et définissons $R(\gamma)$ de façon semblable. Alors $L(\gamma) \neq \emptyset$ ou $R(\gamma) \neq \emptyset$ et si ces ensembles ne sont pas vides, ils contiennent une seule variable de hauteur minimale. Donc: ou bien $\min L(\gamma)$ est une μ-variable, ou bien $\min R(\gamma)$ est une ν-variable.

Définition C.2.7 Soient $t_1, t_2 \in T(P)$. Posons $t_1 \models_c t_2$ si et seulement s'il existe une preuve circulaire $\Pi = \langle G, \lambda \rangle$ sur t_1, t_2 telle que $\lambda(g_0) = p_{t_1} \models_c p_{t_2}$.

Le calcul pour t_1, t_2 est défini à l'aide des systèmes S_{t_1} et S_{t_2} par les règles suivantes:

$$\frac{p_1 \leq p_2}{p_1 \models_c p_2}\, P$$

$$\frac{}{s \models_c \top}\, R\top$$

$$\frac{s_1 \models_c s_2 \quad s_1 \models_c s_3}{s_1 \models_c s_2 \wedge s_3}\, R\wedge \qquad \frac{s_i \models_c s_3}{s_1 \wedge s_2 \models_c s_3}\, L\wedge$$

$$\frac{}{\bot \models_c s}\, L\bot$$

$$\frac{s_1 \models_c s_i}{s_1 \models_c s_2 \vee s_3}\, R\vee \qquad \frac{s_1 \models_c s_3 \quad s_2 \models_c s_3}{s_1 \vee s_2 \models_c s_3}\, L\vee$$

$$\frac{s \models_c q_y}{s \models_c y}\, Ry,\ y \in X_{t_2} \qquad \frac{q_x \models_c s}{x \models_c s}\, Lx,\ x \in X_{t_1}$$

Remarque C.2.8 Tous les s_i sont des polynômes (c'est-à-dire combinaisons formelles de infima et suprema) en X et P. Si $g \to g'$ est une transition de la forme

$$\frac{q_x \models_c s}{x \models_c s}\, Lx\ .$$

alors $x =_Q q_x$ est une équation dans S_{t_1}, $Q \in \{\mu, \nu\}$. Une observation similaire vaut si $g \to g'$ est une transition de la forme Ry.

Exemple C.2.9 Rappelons que $S_{\mu_x.\nu_y.(x\wedge\mu_z.(z\vee y))}$ est le système suivant:

$$\begin{cases} x & =_\mu & y \\ y & =_\nu & x \wedge z \\ z & =_\mu & z \vee y \end{cases}$$

et la forêt associée est $x \to y \to z$. Voici donc une preuve circulaire que $\mu_x.\nu_y.(x \wedge \mu_z.(z \vee y)) \models_c \perp$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\langle\, x \models_c \perp \,\rangle}{x \wedge z \models_c \perp}\, L\wedge}{y \models_c \perp}\, Ly}{x \models_c \perp}\, Lx \qquad .$$

Avec la notation $\langle x \models_c \perp\rangle$ on veut entendre que le sommet étiqueté de cette façon est en réalité le même que le sommet étiqueté par $x \models_c \perp$. Montrons aussi une preuve que $t = \nu_x.\mu_y(x \wedge y) \models_c \perp$. Or $p_t = x$ et S_t est le système suivant:

$$\begin{cases} x & =_\nu & y \\ y & =_\mu & x \wedge y \end{cases}$$

et $x \to y$ est la forêt associée. Donc:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\langle\, y \models_c \perp \,\rangle}{x \wedge y \models_c \perp}\, L\wedge}{y \models_c \perp}\, Ly}{x \models_c \perp}\, Lx \qquad .$$

La suivante, par contre, n'est pas une preuve circulaire que $t \models_c \perp$, car elle ne satisfait pas la condition 2 sur les cycles:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\langle\, x \models_c \perp \,\rangle}{x \wedge y \models_c \perp}\, L\wedge}{y \models_c \perp}\, Ly}{x \models_c \perp}\, Lx \qquad .$$

En effet la variable de hauteur minimale sur l'unique cycle γ, $x = \min L(\gamma)$, est une ν-variable gauche.

C.3 Traduction vers le système traditionnel

Le but de cette section est de démontrer que le système des preuves circulaires n'est pas plus puissant que le système traditionnel, à savoir:

Théorème C.3.1 Soient $t_1, t_2 \in T(P)$, on a que:

$$t_1 \vdash_{c} t_2 \;\text{ entraîne }\; t_1 \vdash t_2 \; .$$

Pour faire cela nous allons nous plonger dans un calcul plus fort, relativisé à une notion de solution partielle.

Définition C.3.2 Soit $t \in T_c(P)$, une *solution partielle* pour t est une fonction partielle $\psi : X_t \longrightarrow T_c(P)$ telle que $Supp(\psi) = \{ \; x \mid \psi(x) \text{ est définie } \}$ est un idéal d'ordre, c'est-à-dire que si $\psi(y)$ est défini et $x \to_F y$, alors $\psi(x)$ est aussi défini. On peut alors définir:

$$ev_\psi(y) \;\; = \;\; \begin{cases} \psi(y) \; , & \text{si } \psi(y) \text{ est défini ,} \\ \sigma(y)[\; \{ev_\psi(x)/x\}_{x<y} \;] \; , & \text{sinon .} \end{cases}$$

On étend cette définition à tout polynôme comme d'habitude par substitution. Si ψ est une solution partielle pour t, nous allons noter $X_t \setminus \psi$ l'ensemble des variables sur lequel ψ n'est pas définie. Soit $y \in X_t \setminus \psi$ une variable d'hauteur minimale, définissons:

$$fn_\psi(y) \;\; = \;\; q_y[\; \{ev_\psi(x)/x\}_{x<y} \;]$$

et observons que:

$$ev_\psi(y) \;\; = \;\; Q_y . fn_\psi(y) \; ,$$

où $Q = \epsilon(y) \in \{\mu, \nu\}$.

Définition C.3.3 Pour $i = 1, 2$, soient $t_i \in T(P)$ et ψ_i des solutions partielles. Une *preuve mixte* sur (t_i, ψ_i) est un couple $\Pi = \langle G, \lambda \rangle$ où G est un graphe pointé fini et transitif avec sommet de départ g_0 et λ est un étiquetage des sommets par des couples de polynômes en P et X. Les conditions suivantes sont satisfaites:

1. Pour tout $g \in G_0$

   $$\frac{\{ \; \lambda(g') \; \}_{g \to g'}}{\lambda(g)}$$

   est une règle du calcul pour (t_i, ψ_i) (cf. page 161).

2. Pour tout cycle propre γ dans G, soit $\min L(\gamma)$ est une μ-variable, soit $\min R(\gamma)$ est une ν-variable.

Définition C.3.4 Soient $u_1, u_2 \in T(P)$. Posons $u_1 \models_m u_2$ si et seulement s'il existe $t_1, t_2 \in T(P)$, des solutions partielles ψ_i pour les t_i et une preuve mixte $\Pi = \langle G, \lambda \rangle$ sur (t_i, ψ_i) tels que $\lambda(g_0) = s_1 \models_m s_2$ et $ev_{\psi_i}(\ s_i\ ) = u_i$.

Le calcul pour t_1, t_2 et ψ_1, ψ_2 est défini par les règles suivantes, à l'aide des systèmes S_{t_1} et S_{t_2} et des solutions partielles ψ_1 et ψ_2.

$$\frac{ev_{\psi_1}(s_1) \vdash ev_{\psi_2}(s_2)}{s_1 \models_m s_2}\, F_\mu(P)$$

$$\frac{}{s \models_m \top}\, R\top$$

$$\frac{s_1 \models_m s_2 \quad s_1 \models_m s_3}{s_1 \models_m s_2 \wedge s_3}\, R\wedge \qquad \frac{s_i \models_m s_3}{s_1 \wedge s_2 \models_m s_3}\, L\wedge$$

$$\frac{}{\bot \models_m s}\, L\bot$$

$$\frac{s_1 \models_m s_i}{s_1 \models_m s_2 \vee s_3}\, R\vee \qquad \frac{s_1 \models_m s_3 \quad s_2 \models_m s_3}{s_1 \vee s_2 \models_m s_3}\, L\vee$$

$$\frac{s \models_m q_y}{s \models_m y}\, Ry,\ y \in X_{t_2} \setminus \psi_2 \qquad \frac{q_x \models_m s}{x \models_m s}\, Lx,\ x \in X_{t_1} \setminus \psi_1$$

Remarque C.3.5 Si $g \to g'$ est une transition de la forme

$$\frac{q_x \models_m s}{x \models_m s} Lx$$

alors $x =_Q q_x$, $Q \in \{\mu, \nu\}$, est une équation de S_{t_1} et $\psi_i(x)$ n'est pas défini. Une remarque similaire vaut si $g \to g'$ est une transition de la forme Ly.

Lemme C.3.6 Si $t_1 \vdash_c t_2$ alors $t_1 \vdash_m t_2$ et donc pour prouver que $t_1 \vdash_c t_2$ entraîne $t_1 \vdash t_2$, il suffit de démontrer que $t_1 \models_m t_2$ entraîne $t_1 \vdash t_2$.

Preuve. La fonction $\emptyset : X_t \longrightarrow T_c(P)$ définie nulle part est une solution partielle et $ev(q) = ev_\emptyset(q)$ pour tout polynôme q. De plus, $ev(p) = p$ pour tout $p \in P$ et donc chaque axiome de la forme P devient un axiome de la forme $F_\mu(P)$. $\square$

Définition C.3.7 Soit Π une preuve mixte sur (t_i, ψ_i). Disons qu'une équation $x =_Q q_x \in S_{t_1}$ est active dans Π s'il existe une transition $g \to g'$ de la forme Lx. De même, disons qu'une équation $y =_Q q_y \in S_{t_2}$ est active dans Π s'il existe une transition $g \to g'$ de la forme Ry.

Proposition C.3.8 Soient t_1, t_2 des termes, ψ_i des solutions pour les t_i et soit Π une preuve mixte sur les (t_i, ψ_i). Soit $g \in G_0$ un sommet tel que $\lambda(g) = s_1 \models_m s_2$. Il existe alors une preuve de $ev(s_1) \vdash ev(s_2)$ dans le calcul usuel.

Corollaire C.3.9 Soient $t_1, t_2 \in T(P)$. Si $t_1 \models_m t_2$, alors $t_1 \vdash t_2$ et donc $t_1 \models_c t_2$ entraîne $t_1 \vdash t_2$.

Preuve. La preuve est par induction sur:

$$\chi(t_i, \psi_i) \quad = \quad \mathrm{card}\,(\ X_{t_1} \setminus \psi_1\ ) \ + \ \mathrm{card}\,(\ X_{t_2} \setminus \psi_2\ )\ .$$

Si $\chi(t_i, \psi_i) = 0$ alors on n'a pas de règles de la forme Rx ou Lx et G est un graphe fini acyclique. On peut alors démontrer la proposition par induction sur la structure acyclique du graphe.

Supposons que la propriété est vraie pour tout g' tel que $g \to g'$ et montrons qu'elle est vraie aussi pour g. La règle:

$$\frac{\{\lambda(g')\}_{g \to g'}}{\lambda(g)}$$

est une entre les règles $F_\mu(P), R\top, L\wedge, R\wedge, L\bot, R\vee, L\vee$, car $\chi(t_i, \psi_i) = 0$.

Pour une règle $F_\mu(P)$ il est évident:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{ev_{\psi_1}(\ s_1\ ) \vdash ev_{\psi_2}(\ s_2\ )}}{s_1 \vdash_m\ s_2}\, F_\mu(P) \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\vdots}{ev_{\psi_1}(\ s_1\ ) \vdash ev_{\psi_2}(\ s_2\ )}$$

Pour $R\top$:

$$\frac{}{s \vdash \top}\, R\top \quad \rightsquigarrow \quad \frac{}{ev_{\psi_1}(\ s\ ) \vdash ev_{\psi_2}(\ \top\ )}\, R\top$$

car $ev_{\psi_2}(\ \top\ ) = \top$. De même, en utilisant le fait que $ev_{\psi_i}(\ s_1 \wedge s_2\ ) = ev_{\psi_i}(\ s_1\ ) \wedge ev_{\psi_i}(\ s_2\ )$ on a que:

$$\frac{s_1 \vdash s_2 \quad s_1 \vdash s_3}{s_1 \vdash s_2 \wedge s_3}\, R\wedge \quad \rightsquigarrow \quad \frac{ev_{\psi_1}(\ s_1\ ) \vdash ev_{\psi_1}(\ s_2\ ) \quad ev_{\psi_1}(\ s_1\ ) \vdash ev_{\psi_1}(\ s_3\ )}{ev_{\psi_1}(\ s_1\ ) \vdash ev_{\psi_1}(\ s_2 \wedge s_3\ )}\, R\wedge$$

$$\frac{s_i \vdash s_3}{s_1 \wedge s_2 \vdash s_3}\, L\wedge \quad \rightsquigarrow \quad \frac{ev_{\psi_1}(s_i) \vdash ev_{\psi_2}(s_3)}{ev_{\psi_1}(s_1 \wedge s_2) \vdash ev_{\psi_2}(s_3)}\, L\wedge$$

On raisonne de même façon pour les règles $L\bot, L\vee, R\vee$, en utilisant le fait que $ev_{\psi_i}(\ \bot\ ) = \bot$ et $ev_{\psi_i}(\ s_1 \vee s_2) = ev_{\psi_i}(\ s_1) \vee ev_{\psi_i}(\ s_2\ )$.

Supposons que $\chi(\psi_i, t_i) > 0$. On distingue deux cas:

1. soit il existe une μ-variable minimale gauche $x \in X_{t_1} \setminus \psi_1$, soit il existe une ν-variable minimale droite $y \in X_{t_2} \setminus \psi_2$.

2. toute variable minimale gauche $x \in X_{t_1} \setminus \psi_1$ est une ν-variable et toute variable minimale gauche $y \in X_{t_2} \setminus \psi_2$ est une μ-variable.

Premier cas. Supposons qu'il existe une μ-variable minimale gauche $x \in X_{t_1} \setminus \psi_1$. Par dualité nous considérons implicitement le cas d'une ν-variable minimale droite. Soit

$x =_\mu q_x$ l'équation associée à x. Si $\Pi = \langle G, \lambda \rangle$, soit $A \subseteq G_1$ l'ensemble des arêtes $g \to g'$ de la forme:

$$\frac{q_x \models_{\overline{m}} s}{x \models_{\overline{m}} s} Lx$$

pour quelque polynôme s; si $\alpha \in A$ soit s_α tel polynôme.

Le graphe G' est défini par: $G'_0 = G_0$ et $G'_1 = G_1 \setminus A$; à partir de ce graphe nous allons considérer les graphes pointés suivantes $\mathcal{G}_0 = \overline{G', g_0}$, et pour $\alpha \in A$ $\mathcal{G}_\alpha = \overline{G', \mathrm{cod}(\alpha)}$. Ici $\overline{G', g}$ est le sous-graphe de G' transitif à g.

La fonction λ induit une structure de preuve mixte Π_0 sur $\mathcal{G}_0$ et Π_α sur les $\mathcal{G}_\alpha$, si l'on étend la définition de ψ_1 à x de la juste façon. En effet on pourrait introduire des sommets terminaux de la forme:

$$\frac{}{x \models_{\overline{m}} s_\alpha}$$

dans $\mathcal{G}_0$ ou $\mathcal{G}_\alpha$ et il s'agit d'étendre la définition de ψ_1 à x afin d'obtenir un axiome de la forme $F_\mu(P)$, tout en laissant vrais les autres axiomes de la forme $F_\mu(P)$.

Étendons la définition de ψ_1 à x à l'aide de ϕ_1 définie par:

$$\phi_1(y) \quad = \quad \begin{cases} \psi_1(y)\ , & y \in Supp(\psi_1)\ , \\ ev_{\psi_1}(x)\ \wedge\ \bigwedge_{\alpha\in A} ev_{\psi_2}(\ s_\alpha\ )\ , & x = y\ . \end{cases}$$

De cette façon pour tout $\alpha_0 \in A$ on obtient une preuve mixte Π_{α_0} sur $(t_1, \phi_1, t_2, \psi_2)$. Il est évident que pour un sommet terminal provenant d'une arête $\alpha \in A$ on a maintenant un axiome:

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ ev_{\phi_1}(x) \vdash ev_{\psi_2}(s_\alpha)\end{array}}{x \models_{\overline{m}} s_\alpha} F_\mu(P) \qquad .$$

Considérons un vieux sommet terminal de la forme:

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ ev_{\psi_1}(s) \vdash ev(s')\end{array}}{s \models_{\overline{m}} s'} F_\mu(P) \qquad .$$

On a que $ev_{\psi_1}(s) = t[ev_{\psi_1}(x)/x]$ et de même $ev_{\phi_1}(s) = t[ev_{\phi_1}(x)/x]$, de plus $ev_{\phi_1}(x) = \phi_1(x) \vdash ev_{\psi_1}(x)$ et donc on obtient:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ ev_{\phi_1}(s) \vdash ev_{\psi_1}(s)\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ ev_{\psi_1}(s) \vdash ev_{\psi_2}(s')\end{array}}{ev_{\phi_1}(s) \vdash ev_{\psi_2}(s')}\,\text{Cut}}{s \vdash_m s'}\,F_\mu(P) \quad .$$

Or $\chi(\Pi_\alpha) < \chi(\Pi)$ et puisque $\lambda(\text{cod}(\alpha)) = q_x \vdash_m s_\alpha$, on peut utiliser l'hypothèse d'induction pour déduire que:

$$f_{\psi_1}(x)[\phi_1(x)/x] \;=\; ev_{\phi_1}(q_x) \;\vdash\; ev_{\psi_2}(s_\alpha)\ .$$

On a aussi que:

$$f_{\psi_1}(x)[\phi_1(x)/x] \;\vdash\; f_{\psi_1}(x)[ev_{\psi_1}(x)/x] \;\vdash\; ev_{\psi_1}(x)\ ,$$

et l'on obtient:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{f_{\psi_1}(x)[\phi_1(x)/x] \vdash \phi_1(x)}\,R\wedge}{\mu_x.f_{\psi_1}(x) \vdash \phi_1(x)}\,L\mu \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \phi_1(x) \vdash ev_{\psi_2}(s_\alpha)\end{array}}{ev_{\phi_1}(x) = \mu_x.f_{\psi_1}(x) \vdash ev_{\psi_2}(s_\alpha)}\,\text{Cut}}{x \vdash_m s_\alpha}\,F_\mu(P) \quad .$$

On peut maintenant étendre ψ_1 à x par ϕ_1 en posant $\phi_1(x) = ev_{\psi_1}(x)$. Avec cela on obtient des preuves mixtes sur G_0 et G_α, toujours telles que $\chi(\Pi_0) < \chi(\Pi)$ et $\chi(\Pi_\alpha) < \chi(\Pi)$. Maintenant on a que $ev_{\phi_1} = ev_{\psi_1}$ et le résultat découle, à cause que, par connexité, tout sommet g est dans G_0 ou dans quelque G_α.

Second cas. Supposons que toute variable minimale gauche $x \in X_{t_1} \setminus \psi_1$ est une ν-variable et toute variable minimale droite $y \in X_{t_2} \setminus \psi_2$ est une μ-variable.

On peut supposer que toute variable minimale est active, si non on peut étendre ψ_i à une variable minimale non active par ϕ_i en laissant $ev_{\phi_i} = ev_{\psi_i}$ et le résultat découle par induction.

Soit $A \subseteq G_1$ l'ensemble des arêtes α de la forme Lx pour une variable minimale x de $X_{t_1} \setminus \psi_1$ ou de la forme Ry pour une variable minimale $y \in X_{t_2} \setminus \psi_2$. Si $\alpha \in A$ soit $G^\alpha = \overline{G, \mathrm{cod}(\alpha)}$ le sous-graphe de G des descendants de $\mathrm{cod}(\alpha)$.

Choisissons $\alpha_0 \in A$ et supposons qu'on a démontré que pour tout α tel que $G^\alpha \subset G^{\alpha_0}$, c'est-à-dire $G^\alpha \subseteq G^{\alpha_0}$ mais $G^\alpha \neq G^{\alpha_0}$, la proposition est vraie. Soit G_{α_0} le graphe obtenu de G^{α_0} en coupant ces arêtes et en prenant le sous-graphe des descendants de $\mathrm{cod}(\alpha_0)$.

Lemme C.3.10 Il existe une variable minimale $x \in X_{t_1} \setminus \psi_1$ ou une variable minimale $y \in X_{t_2} \setminus \psi_2$ qui n'est pas active dans le graphe G_{α_0}.

Preuve. Supposons en premier que $X_{t_2} \setminus \psi_2 = \emptyset$. Dans ce cas si la transition α_0 est une transition pour x, c'est-à-dire qu'elle est de la forme:

$$\frac{q_x \models_m \ s_{\alpha_0}}{x \models_m \ s_{\alpha_0}}$$

alors x n'est pas active dans G_{α_0}. Soit en effet α_1 une transition de la même forme dans G_{α_0}. Alors $G^\alpha = G^{\alpha_0}$ et l'on peut trouver des chemins $\mathrm{cod}(\alpha_0) \to^* \mathrm{dom}(\alpha_1)$ et $\mathrm{cod}(\alpha_1) \to^* \mathrm{cod}(\alpha_0)$, mais cela donne un cycle γ qui contredit la condition sur les cycles de la preuve Π.

Supposons que $x \in X_{t_1} \setminus \psi_1$ et $y \in X_{t_2} \setminus \psi_{t_2}$. Dans ce cas ou bien x n'est pas active ou bien y n'est pas active dans G_{α_0}. En effet soit α_1 une transition pour x dans G_{α_0}, si α_2 est une autre transition de A dans G_{α_0}, alors on a que $G^{\alpha_1} = G^{\alpha_0} = G^{\alpha_2}$. En choisissant des chemins $\mathrm{cod}(\alpha_0) \to^* \mathrm{dom}(\alpha_i)$ et $\mathrm{cod}(\alpha_i) \to^* \mathrm{cod}(\alpha_0)$ on obtient un cycle γ dans G sur lequel se trouvent α_1 et α_2. À cause de la condition sur les cycles et par minimalité, on voit que α_2 est aussi une transition pour x et donc y n'est pas active. $\square$

On choisit donc une variable minimale qui n'est pas active dans G_{α_0}, disons $x \in X_{t_1} \setminus \psi_1$. Nous allons étendre ψ_1 à x par ϕ_1 en posant $\phi_1(x) = ev_{\psi_1}(x)$ et de cette façon on a que $ev_{\phi_1} = ev_{\psi_1}$ pour tout polynôme. Le graphe pointé G_{α_0} a une structure de preuve mixte Π_{α_0} sur $(t_1, \phi_1), (t_2, \psi_2)$. En effet dans G_{α_0} on peut avoir introduit des sommets terminaux de la forme:

$$\frac{}{x \models_m \ s_\alpha} \ .$$

À la fois on connaît, par l'hypothèse d'induction sur G^α, que $ev_{\psi_1}(q_x) \vdash ev_{\psi_2}(s_\alpha)$, et on peut transformer un tel sommet dans un axiome de type $F_\mu(P)$:

$$\cfrac{\cfrac{\vdots}{f_{\psi_1}(x)[ev_{\psi_1}(x)/x] = ev_{\psi_1}(q_x) \vdash ev_{\psi_2}(s_\alpha)}\ L\nu}{\cfrac{\nu_x.f_{\psi_1}(x) = ev_{\psi_1}(x) \models_m \ ev_{\psi_2}(s_\alpha)}{x \models_m \ s_\alpha}\ F_\mu(P)} \ .$$

Puisque $\chi(\Pi_{\alpha_0}) < \chi(\Pi)$, on peut utiliser l'hypothèse d'induction pour voir que la proposition voulue est vraie pour tout sommet de G_{α_0}, car $ev_{\psi_1} = ev_{\phi_1}$. Avec les hypothèses faites sur tous les G^α tels que $G^\alpha \subset G^{\alpha_0}$ on obtient que la proposition est vraie aussi pour tout sommet de G^{α_0}.

Enfin soit $G_0 = \overline{G', g_0}$ le sous-graphe des descendants de g_0 du graphe $G' = \langle G_0, G_1 \setminus A \rangle$. Dans ce graphe aucune variable est active et donc on peut raisonner comme pour les G_α et enfin déduire que la proposition est vraie aussi pour tout sommet de G. $\square$

CONCLUSION

Le point de départ de cette recherche était une exigence de modéliser le calcul interactif en se servant des jeux et en étudiant le monde algébrique qui appartient aux jeux. De ce point de vue, une interprétation finale et complète des résultats algébriques présentés dans cette thèse doit être développée. Cependant, une évaluation partielle nous suggère deux types de généralisation de notre recherche. D'un côté il est nécessaire de pouvoir comparer formellement notre modèle du calcul interactif, c'est-à-dire les jeux pour les μ-treillis libres, et les modèles existants, par exemple le calcul des systèmes communicants (Milner, 1980). Nous croyons que cela sera possible si l'on ajoute à la théorie des treillis des opérations élémentaires qui représentent des actions, en se servant de la dualité pour obtenir des coactions. On obtiendra de cette façon une catégorie de μ-algèbres dont il sera intéressant d'étudier les objets libres à l'aide des jeux. Une autre possibilité est d'étudier des μ-treillis libres enrichis sur des quantales (Joyal, 1997). De cette façon on pourra aussi considérer les relations entre la théorie du calcul interactif, la théorie des jeux monétaires et la théorie classique des jeux et du comportement économique (Von Neumann et Morgenstern, 1944). Une seconde généralisation qui semble être nécessaire, est d'étudier dans la théorie des μ-treillis l'algèbre des stratégies gagnantes. Le but est évidemment de donner un système algébrique pour les programmes dans les systèmes interactifs; d'un point de vue algébrique cette généralisation correspond à relever les résultats au niveau des catégories bicomplètes avec la propriété que chaque endo-foncteur appartenant à un ensemble donné possède une algèbre initiale et une co-algèbre finale.

Nous aimerions aussi développer d'autres aspects de cette recherche. Par exemple, il est bien connu que l'étude des points fixes est d'intérêt général en informatique théorique et les résultats présentés ici attendent d'être comparés avec d'autres études sur le sujet, en particulier avec l'algèbre universelle avec solution des équations de point fixe (Bloom et Ésik, 1993) ou les études sur les algèbres initiales des endo-foncteurs (Lambek, 1968) et les types récursivement définis (Reynolds et Plotkin, 1993). Aussi, il sera intéressant de comparer nos techniques avec les techniques utilisées dans la littérature sur le μ-calcul propositionnel. Nous croyons que la description explicite du μ-treillis libre pourra aider à démontrer que la hiérarchie des quantificateurs est stricte, ce qui est vrai pour le μ-calcul propositionnel (Bradfield, 1998). Observons qu'un tel problème est relié au problème de caractériser les polynômes sans point fixe dans un treillis libre, cf. (Freese, Ježek et Nation, 1995, chapitre 1). Enfin, les stratégies dans un jeu de la forme $\langle G, H \rangle$ et donc les preuves circulaires sont des objets mathématiques strictement connexes aux tableaux pour le μ-calcul propositionnel (Kozen, 1983; Stirling et Walker, 1991; Bradfield, 1992). Plus précisément, elles sont des analogues finis des réfutations de (Walukiewicz, 1995; Niwiński et Walukiewicz, 1996). Nous croyons que les réfutations régulières peuvent être relevées à un système des preuves qui satisfait l'élimination des coupures et enfin qu'elles peuvent être utilisées afin de décrire des μ-algèbres de Boole avec opérateurs libres.

RÉFÉRENCES

Abramsky, S. et Jagadeesan, R. 1994. « Games and full completeness for multiplicative linear logic ». *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 59, no 2, p. 543–574.

Abramsky, S., Jagadeesan, R., et Malacaria, P. 1994. « Full abstraction for PCF ». In *Theoretical Aspects of Computer Software*. T. 789, Coll. « Lecture Notes in Computer Science », p. 1–15. Berlin: Springer-Verlag.

Arnold, A. 1995. « An initial semantics for the μ-calculus on trees and Rabin's complementation lemma ». *Theoretical Computer Science*, vol. 148, no 1, p. 121–132.

Birkhoff, G. 1967. *Lattice theory*. Providence, RI: American Mathematical Society. Troisième édition. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXV.

Blass, A. 1972. « Degrees of indeterminacy of games ». *Polska Akademia Nauk. Fundamenta Mathematicae*, vol. 77, no 2, p. 151–166.

——— 1992. « A game semantics for linear logic ». *Annals of Pure and Applied Logic*, vol. 56, no 1-3, p. 183–220.

Bloom, S. L. et Ésik, Z. 1993. *Iteration theories*. Berlin: Springer-Verlag.

Borceux, F. 1994a. *Handbook of categorical algebra. 1. Basic category theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

——— 1994b. *Handbook of categorical algebra. 2. Categories and structures*. Cambridge: Cambridge University Press.

Bradfield, J. C. 1992. *Verifying Temporal Properties of Systems*. Boston, MA: Birkhäuser.

——— 1998. « The modal mu-calculus alternation hierarchy is strict ». *Theoretical Computer Science*, vol. 195, no 2, p. 133–153.

Conway, J. H. 1976. *On numbers and games*. London: Academic Press. London Mathematical Society Monographs, No. 6.

——— 1978. « Loopy games ». *Annals of Discrete Mathematics*, vol. 3, p. 55–74. Advances in graph theory (Cambridge Combinatorial Conf., Trinity College, Cambridge, 1977).

Day, A. 1970. « A simple solution to the word problem for lattices ». *Canadian Mathematical Bulletin. Bulletin Canadien de Mathématiques*, vol. 13, p. 253–254.

——— 1977. « Splitting lattices generate all lattices ». *Algebra Universalis*, vol. 7, no 2, p. 163–169.

Emerson, E. A. et Jutla, C. S. 1991. « Tree automata, mu-calculus and determinacy (extended abstract) ». In *32nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science (San Juan, Puerto Rico, 1-4 October 1991)*, p. 368–377. IEEE.

Felscher, W. 1986. « Dialogues as a foundation for intuitionistic logic ». In Gabbay, D. et Guenther, F., éditeurs, *Handbook of Philosophical Logic, Volume III*, p. 341–372. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freese, R. 1982. « Some order-theoretic questions about free modular lattices ». In *Ordered sets (Banff, Alberta, 1981)*, p. 355–377. Dordrecht: Reidel.

Freese, R., Ježek, J., et Nation, J. B. 1995. *Free lattices*. Providence, RI: American Mathematical Society.

Girard, J.-Y. 1987. « Linear logic ». *Theoretical Computer Science*, vol. 50, no 1, p. 101.

Goldblatt, R. 1992. *Logics of time and computation*. Stanford, CA: Stanford University Center for the Study of Language and Information.

Gurevich, Y. et Harrington, L. 1982. « Trees, automata, and games ». In *Proceedings of the Fourteenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing (San Francisco, CA, 5-7 May 1982)*, p. 60–65. ACM.

Hu, H. et Joyal, A. 1997. « Coherence completions of categories and their enriched softness ». In *Mathematical foundations of programming semantics (Pittsburgh, PA, 1997)*. Amsterdam: Elsevier. 17 pp. (electronic).

Hyland, J. M. E. et Ong, C.-H. L. 1994. On full abstraction for PCF: I, II and III. Apparaîtra in *Information and Computation*.

Joyal, A. 1977. « Remarques sur la théorie des jeux á deux personnes ». *La Gazette des Sciences Mathématiques du Québec*, vol. 1, no 4.

——— 1995a. « Free bicomplete categories ». *La Société Royale du Canada. L'Académie des Sciences. Comptes Rendus Mathématiques (Mathematical Reports)*, vol. 17, no 5, p. 219–224.

——— 1995b. « Free bicompletion of enriched categories ». *La Société Royale du Canada. L'Académie des Sciences. Comptes Rendus Mathématiques (Mathematical Reports)*, vol. 17, no 5, p. 213–218.

——— 1997. « Free lattices, communication, and money games ». In *Logic and scientific methods (Florence, Italy, August 19–25, 1995)*, p. 29–68. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Joyal, A., Nielsen, M., et Winskel, G. 1996. « Bisimulation from open maps ». *Information and Computation*, vol. 127, no 2, p. 164–185.

Kozen, D. 1983. « Results on the propositional μ-calculus ». *Theoretical Computer Science*, vol. 27, no 3, p. 333–354.

Lambek, J. 1968. « A fixpoint theorem for complete categories ». *Mathematische Zeitschrift*, vol. 103, p. 151–161.

Lambek, J. et Scott, P. J. 1986. *Introduction to higher order categorical logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

MacLane, S. 1971. *Categories for the working mathematician*. New York: Springer-Verlag. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5.

McKenzie, R. 1972. « Equational bases and nonmodular lattice varieties ». *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 174, p. 1–43.

McKenzie, R., McNulty, G. F., et Taylor, W. F. 1987. *Algebras, lattices, varieties*. Monterey, CA: Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software.

McNaughton, R. 1993. « Infinite games played on finite graphs ». *Annals of Pure and Applied Logic*, vol. 65, no 2, p. 149–184.

Milne, R. et Strachey, C. 1976. *A theory of programming language semantics*. London: Chapman and Hall.

Milner, R. 1980. *A calculus of communicating systems*. T. 92, Coll. « Lecture Notes in Computer Science ». Berlin: Springer-Verlag.

Nerode, A., Yakhnis, A., et Yakhnis, V. 1992. « Concurrent programs as strategies in games ». In *Logic from computer science (Berkeley, CA, 1989)*, p. 405–479. New York: Springer.

Niwiński, D. 1985. « Equational μ-calculus ». In *Computation theory (Zaborów, 1984)*. T. 208, Coll. « Lecture Notes in Computer Science », p. 169–176. Berlin: Springer.

——— 1997. « Fixed point characterization of infinite behavior of finite-state systems ». *Theoretical Computer Science*, vol. 189, no 1-2, p. 1–69.

Niwiński, D. et Walukiewicz, I. 1996. « Games for the μ-calculus ». *Theoretical Computer Science*, vol. 163, no 1-2, p. 99–116.

Pedicchio, M. C. 1999. « Algebraic theories ». In Sobral, M., Clementino, M., Picado, J., et Sousa, L., éditeurs, *School on Category Theory and Applications*. Coll. « Textos de Matemática, Série B », no 21, p. 101–162. Coimbra: Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

Pratt, V. R. 1981. « A decidable mu-calculus: Preliminary report ». In *22nd Annual*

Symposium on Foundations of Computer Science (Nashville, TN, 28-30 October 1981), p. 421–427. IEEE.

Rabin, M. O. 1969. « Decidability of second order theories and automata on infinite trees ». *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 141, p. 1–35.

Reynolds, J. C. et Plotkin, G. D. 1993. « On functors expressible in the polymorphic typed lambda calculus ». *Information and Computation*, vol. 105, no 1, p. 1–29.

Stirling, C. et Walker, D. 1991. « Local model checking in the modal mu-calculus ». *Theoretical Computer Science*, vol. 89, no 1, p. 161–177.

Tarski, A. 1955. « A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications ». *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 5, p. 285–309.

Thomas, W. 1997. « Languages, automata, and logic ». In Rozenberg, G. et Salomaa, A., éditeurs, *Handbook of formal languages, Vol. 3*, p. 389–455. Berlin: Springer.

Von Neumann, J. et Morgenstern, O. 1944. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Walukiewicz, I. 1995. « Completeness of Kozen's axiomatisation of the propositional μ-calculus ». In *Proceedings, Tenth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science (San Diego, CA, 26-29 June 1995)*, p. 14–24. IEEE Computer Society Press.

Walukiewicz, I. 1996. *Pushdown Processes: Games and Model Checking*. Rapport de recherche RS-96-54, Århus: BRICS, Department of Computer Science, University of Aarhus.

Whitman, P. M. 1941. « Free lattices ». *Annals of Mathematics, Second Series*, vol. 42, p. 325–330.

Winskel, G. 1993. *The formal semantics of programming languages. An introduction*. Cambridge, MA: MIT Press.

Zielonka, W. 1998. « Infinite games on finitely coloured graphs with applications to automata on infinite trees ». *Theoretical Computer Science*, vol. 200, no 1-2, p. 135–183.