Plan

- Variables aléatoires discrètes
  - Définitions
  - Quelques variables aléatoires discrètes importantes
  - Variables aléatoires discrètes conjointes, marginales, conditionnelles, indépendantes
  - Caractéristiques d'une variable aléatoire discrète : espérance et variance
- Variables aléatoires continues
  - Définitions
  - Espérance et variance
  - Quelques variables aléatoires continues importantes
  - Variables aléatoires conjointement continues, marginales, conditionnelles, indépendantes

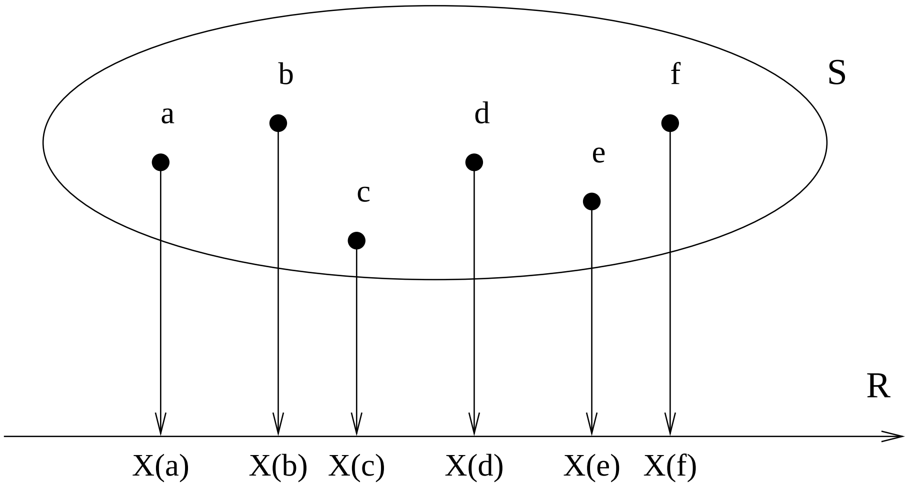
Sources

.

- **Initiation aux probabilités**,Sheldon Ross, édité aux Presses Polytechniques et universitaires romanes, 1994
- **All of Statistics**, Larry Wasserman, Springer, 2004

Variables aléatoires

- Une variable aléatoire est une fonction qui associe un nombre réel à tous les éléments de Ω
- Les variables aléatoires permettent ainsi de passer d'événements, qui peuvent être de natures très diverse, à des nombres, et d'effectuer des calculs sur ces derniers.

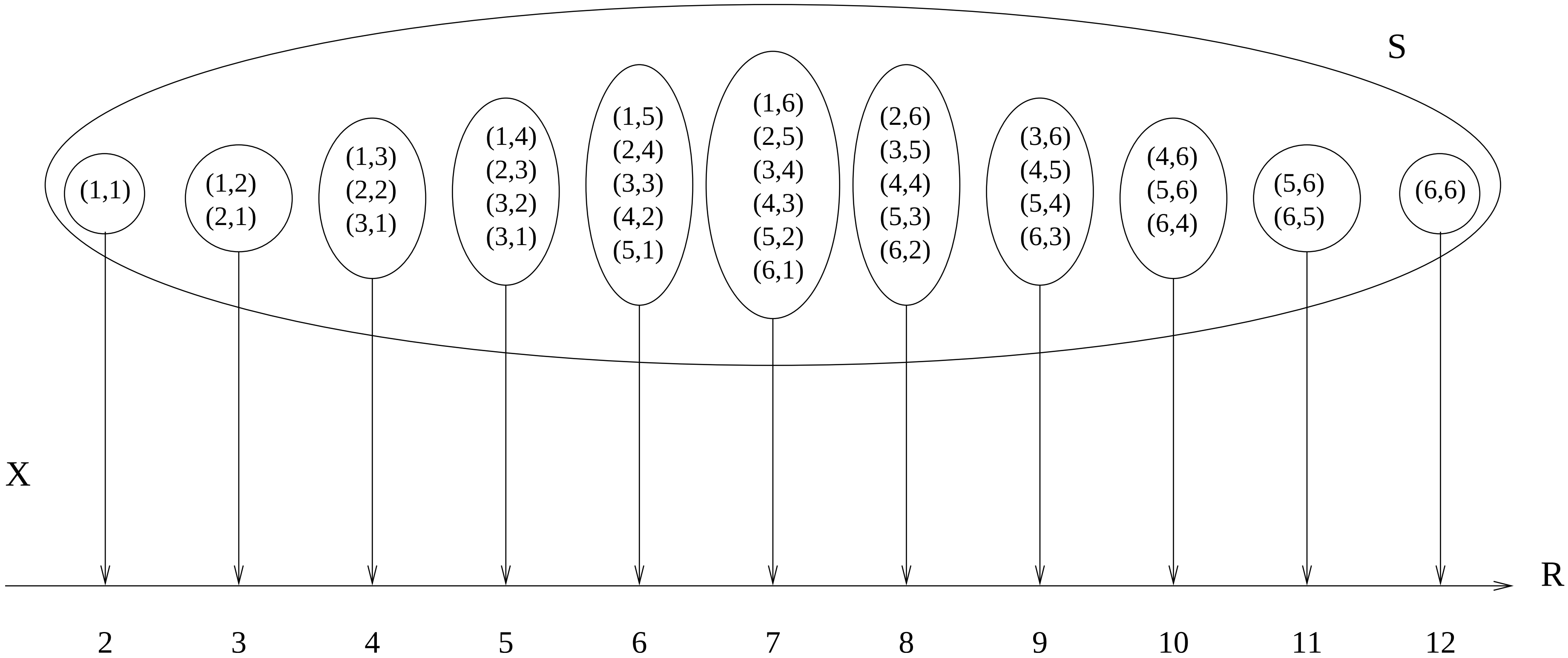


Variables aléatoires

.

- Une variable aléatoire permet aussi de n'associer qu'une valeur à un ensemble d'issues élémentaires, dans le cas où, à l'issue d'une expérience, on s'intéresse plus à une fonction du résultat qu'au résultat lui-même.
- Exemple : Lors d'un jeu de dés, certains jeux accordent de l'importance à la somme obtenue avec deux dés, 7 par exemple, plutôt qu'à la question de savoir si c'est la paire $(1,6)$ qui est apparue, ou $(2,5)$ $\ldots$.
  On peut alors définir une variable aléatoire X qui représente la somme des deux dés.

Variables aléatoires



Variables aléatoires

.

- La valeur d'une variable aléatoire est déterminée par le résultat de l'expérience,
- il est possible d'attribuer une probabilité aux différentes valeurs que la variable aléatoire peut prendre.
- On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire X, la fonction $F_x : R \to [0, 1]$ définie de la façon suivante :

$$F_x(x) = P(X \leq x)$$

Variables aléatoires discrètes

.

- X est **discrète** si l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre est dénombrable.
- On définit la **fonction de probabilité** de X de la manière suivante :

$$f_X(x) = P(X = x) = P(E) \text{ avec } E = \{i \in \Omega | X(i) = x\}$$

Exemple

.

Notre expérience consiste à jeter deux dés équilibrés.
On définit X la variable aléatoire discrète qui représente la somme obtenue.
La fonction de probabilité est définie comme suit :

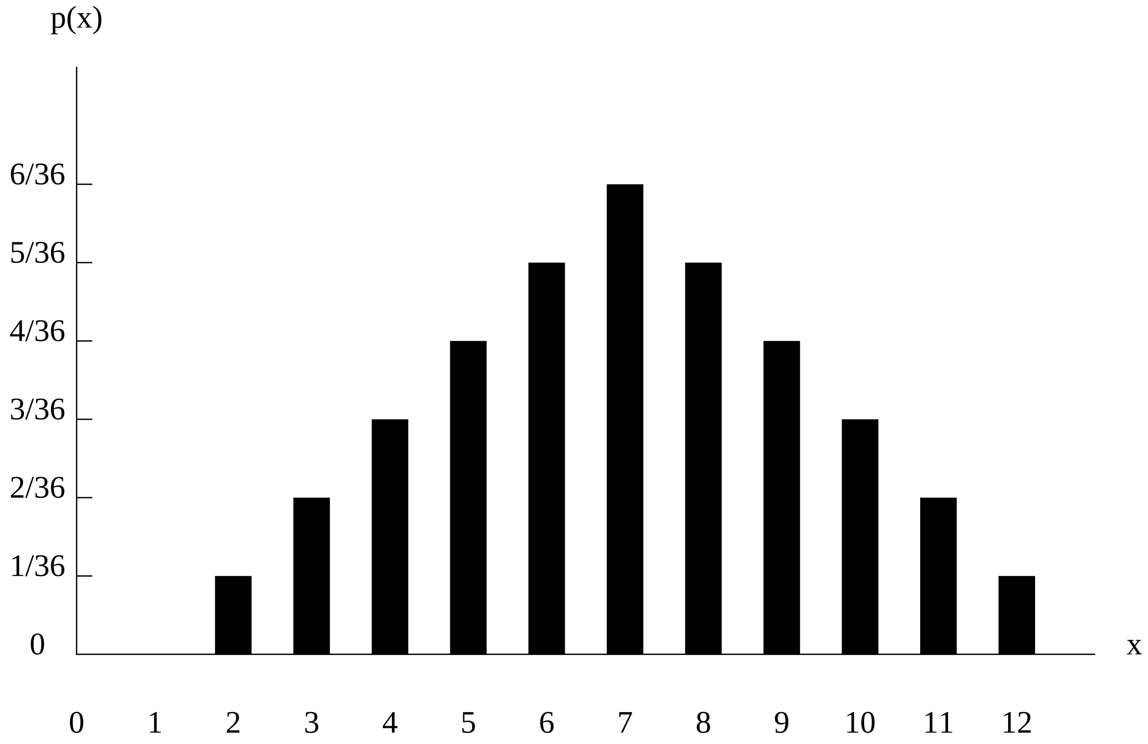
$$
\begin{aligned}
f_X(2) &= P((1,1)) = \frac{1}{36} \\
f_X(3) &= P((1,2),(2,1)) = \frac{2}{36} \\
f_X(4) &= P((1,3),(2,2),(3,1)) = \frac{3}{36} \\
f_X(5) &= P((1,4),(2,3),(3,2),(4,1)) = \frac{4}{36} \\
f_X(6) &= P((1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)) = \frac{5}{36} \\
f_X(7) &= P((1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)) = \frac{6}{36} \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Histogramme

.

Représentation d'une fonction de probabilité f sur un graphique en reportant $f(x)$ sur l'axe des y et x sur l'axe des x.

Histogramme de la loi de probabilité d'une variable aléatoire comptant la somme des nombres obtenus lors du jet de deux dés équilibrés :



Quelques variables aléatoires discrètes importantes

.

- Loi uniforme
- Loi de Bernouilli
- Loi binomiale
- Loi géométrique
- Loi de Poisson

Loi uniforme

.

- Fonction de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } x = 1, \ldots, k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $k > 1$ est un entier

Loi de Bernouilli

- Soit une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p
- On définit la variable aléatoire X pouvant prendre les deux valeurs 0 et 1 avec les probabilités p et $1-p$
- On dit que X suit une loi de Bernouilli
- fonction de probabilité

$$f(x) = p^x(1-p)^{1-x} \text{ avec } x \in \{0, 1\}$$

Loi binomiale

.

- On réalise n épreuves de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès est p
- La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès sur l'ensemble des n épreuves est dite variable aléatoire **binomiale** de paramètres (n, p).
- toute séquence comportant i succès et $n - i$ échecs a pour probabilité $p^i \times (1-p)^{n-i}$.
- il y a $\binom{n}{i}$ séquences vérifiant cette propriété
- fonction de probabilité

$$f(i) = \binom{n}{i} p^i \, (1-p)^{n-i}$$

Loi géométrique

.

- Soit une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p
- On renouvelle cette épreuve de manière indépendante jusqu’au premier succès.
- On appelle X la variable aléatoire modélisant la probabilité que le premier succès apparaisse au bout de x itérations.
- On dit que X suit une **loi géométrique** de paramètre p.
- Fonction de probabilité

$$f(x) = p(1-p)^{x-1} \text{ avec } x \geq 1$$

Loi de Poisson

- La loi de Poisson décrit le comportement du nombre d'événements se produisant dans un intervalle de temps fixé, si ces événements se produisent avec une fréquence moyenne connue et indépendamment du temps écoulé depuis l'événement précédent.
- Si le nombre moyen d'occurrences dans cet intervalle est λ, alors la probabilité qu'il existe exactement x occurrences est :

$$f(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

Variables aléatoires discrètes conjointes

.

- Il est souvent nécessaire de considérer des événements relatifs à deux variables simultanément.
- On définit la **fonction de probabilité conjointe** de deux v.a. X et Y :

$$f(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

Exemple

.

- On tire au hasard 3 boules d'une urne contenant 3 rouges, 4 blanches et 5 bleues.
- R et B désignent respectivement le nombre de boules rouges et celui de boules blanches tirées.
- La fonction de probabilité conjointe $p(i,j) = P(R = i, B = j)$ de R et B est représentée dans un tableau à deux entrées :

j

		0	1	2	3
	0	$\frac{10}{220}$	$\frac{40}{220}$	$\frac{30}{220}$	$\frac{4}{220}$
	1	$\frac{30}{220}$	$\frac{60}{220}$	$\frac{18}{220}$	0
i	2	$\frac{15}{220}$	$\frac{12}{220}$	0	0
	3	$\frac{1}{220}$	0	0	0

Fonctions de probabilité marginales

.

- On peut déduire de la fonction de probabilité conjointe de deux variables X et Y la **fonction de probabilité marginale** de X de la façon suivante :

$$f_X(x) = P(X = x) = \sum_{y|p(x,y)>0} P(X = x, Y = y) = \sum_{y|p(x,y)>0} f(x, y)$$

- De façon similaire :

$$f_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{x|p(x,y)>0} P(X = x, Y = y) = \sum_{x|p(x,y)>0} f(x, y)$$

Exemple (suite)

.

j

		0	1	2	3	$P(R=i)$
	0	$\frac{10}{220}$	$\frac{40}{220}$	$\frac{30}{220}$	$\frac{4}{220}$	$\frac{84}{220}$
	1	$\frac{30}{220}$	$\frac{60}{220}$	$\frac{18}{220}$	0	$\frac{108}{220}$
i	2	$\frac{15}{220}$	$\frac{12}{220}$	0	0	$\frac{27}{220}$
	3	$\frac{1}{220}$	0	0	0	$\frac{1}{220}$
	$P(B=j)$	$\frac{56}{220}$	$\frac{112}{220}$	$\frac{48}{220}$	$\frac{4}{220}$	

- La fonction marginale de R est calculée en faisant les totaux par ligne, tandis que celle de B l'est en faisant les totaux par colonne.
- C'est le fait que les fonctions de R et B individuellement puissent être lues dans les marges du tableau qui leur vaut leur nom de fonctions marginales.

Variables aléatoires indépendantes

.

- Deux variables aléatoires X et Y sont dites **indépendantes** si, pour tout choix d'une paire d'ensembles A et B de nombres réels, on a :

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \times P(Y \in B)$$

- En d'autres termes, X et Y sont indépendantes si, quels que soient A et B, les événements $E_A = (X \in A)$ et $E_B = (X \in B)$ sont indépendants.
- Cela revient à dire que :

$$p(x, y) = p_X(x) p_Y(y) \; \forall x, y$$

- D'un point de vue intuitif, X et Y sont indépendantes si le fait de connaître la valeur de l'une n'influe pas sur la distribution de l'autre. Des variables qui ne sont pas indépendantes sont dites dépendantes.

Exemple

.

- On réalise $n+m$ épreuves indépendantes ayant chacune p pour probabilité de succès.
- La variable X est le nombre de succès lors des n premières épreuves et Y est le nombre de succès lors des m dernières.
- X et Y sont indépendantes car le fait de connaître le nombre de succès lors des n premières épreuves n'influe en rien sur celui des succès lors des m dernières (c'est là la traduction de l'indépendance des épreuves).
- En revanche, X et Z sont dépendantes si Z représente le nombre total de succès au cours des $n+m$ épreuves.

Fonctions de probabilité conditionnelles

.

Etant donné deux variables aléatoires X et Y, on définit la fonction de probabilité de X sous la condition $Y = y$:

$$\begin{aligned} p_{X|Y}(x|y) &= P(X = x|Y = y) \\ &= \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} \\ &= \frac{p(x, y)}{p_Y(y)} \end{aligned}$$

Fonctions de probabilité conditionnelles - 2

.

Lorsque X et Y sont indépendantes, les fonctions conditionnelles et non conditionnelles sont identiques :

$$
\begin{aligned}
p_{X|Y}(x|y) &= P(X = x|Y = y) \\
&= \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} \\
&= \frac{P(X = x)P(Y = y)}{P(Y = y)} \\
&= P(X = x)
\end{aligned}
$$

Caractéristiques d’une variable aléatoire

.

- La loi d’une variable aléatoire est constituée par l’ensemble des probabilités des valeurs que peut prendre cette variable.
- Dans certains cas, le nombre de valeurs possibles de la variable est extrêmement élevé ou même infini.
- Il est intéressant, dans ces cas, de dégager certaines caractéristiques qui permettent d’esquisser l’allure générale de ces lois.
- On définit deux caractéristiques des lois de probabilités :
  - l’**espérance** permet de situer la variable.
  - la **variance** permet d’estimer la dispersion de la variable

Espérance

.

- Pour une variable aléatoire discrète X et f sa fonction de probabilité, on définit l'espérance de X, notée $E[X]$, par l'expression :

$$E[X] = \sum_{x|f(x)>0} xf(x)$$

- En termes concrets, l'espérance de X est la moyenne pondérée des valeurs que X peut prendre, les poids étant les probabilités que ces valeurs soient prises.
  Exemple : L'espérance de la v.a. X, résultat du lancer d'un dé équilibré est :
  $E[X] = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$
  BOF !

Espérance - 2

.

- Interprétation en recourant à la définition des probabilités comme mesures de fréquences relatives :
  La probabilité d'un événement E est la proportion du nombre de réalisation de E dans une séquence infiniment longue d'expériences identiques
- Supposons que l'on se livre à jeu d'argent pour lequel on connaît la probabilité de chaque gain. On représente par X la variable aléatoire représentant le gain.
- Cette v.a. peut prendre les valeurs $x_1, \ldots, x_n$ avec les probabilités $p(x_1), \ldots p(x_n)$.
- La proportion de jeux pour laquelle la somme x_i aura été gagnée va se rapprocher de $p(x_i)$.
- L'espérance de la v.a. X est alors le gain moyen par jeu : $\sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$

Variance

.

- $E[X]$ nous donne une moyenne pondérée des valeurs possibles d'une variable aléatoire X.
- Mais elle ne nous dit rien des variations de X autour de l'espérance.
- Soit les variables aléatoires suivantes :
  X avec $p_X(0) = 1$
  Y avec $p_Y(-1) = \frac{1}{2}, p_Y(1) = \frac{1}{2}$
  Z avec $p_Z(-100) = \frac{1}{2}, p_Z(100) = \frac{1}{2}$
- $E[X] = E[Y] = E[Z] = 0$
- Mais il y a de bien plus grands écarts entre les différentes valeur de Y qu'entre celles de X (qui est constante) et de plus grands écarts entre celles de Z qu'entre celles de Y.

Variance - 2

- On mesure les variations d'une v.a. X par l'espérance du carré de l'écart entre X et son espérance, que l'on appelle **variance** de X, notée $Var(X)$:

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2]$$

Qui peut aussi être calculée de la façon suivante :

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

- La racine carrée de $Var(X)$ est appelée l'**écart-type** de X, qui se note σ. On a donc :

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Variables aléatoires continues

.

- X est continue s'il existe une fonction f_X, appelée **densité de probabilité** telle que :
  - $f_X(x) \geq 0 \; \forall x$
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$
  - $\forall a \leq b \;\; P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)dx$
- La fonction de répartition est obtenue en intégrant la densité de probabilité :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Variables aléatoires continues (2)

.

- En traçant la représentation graphique de la densité de probabilité, la probabilité $P(a \leq X \leq b)$ se lit comme l'aire sous la courbe sur l'intervalle $[a, b]$
- En conséquence, $P(X = a) = 0$ pour tout nombre réel a.
- Interprétation intuitive de la densité : $f(a)$ est une sorte de mesure de la probabilité que X soit proche de a.

Espérance

.

- cas discret :

$$E[X] = \sum_{x|p(x)>0} x f(x)$$

- cas continu :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Variance

Même définition que pour une variable aléatoire discrète :

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2]$$

ou bien :

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

Quelques variables aléatoires continues importantes

.

- Loi uniforme
- Loi normale
- Loi exponentielle

Loi uniforme

.

- X suit une loi uniforme entre a et b si :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Loi normale

.

- X suit une loi normale de paramètres μ et σ si

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{1}{2\sigma^2}(s-\mu^2)}$$

- on note $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- μ est l'espérance de X
- σ^2 est la variance de X
- si $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, on dit que X suit une loi normale centrée réduite

Loi exponentielle

.

- X suit une loi exponentielle de paramètre β si

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \exp^{\frac{-x}{\beta}}, x > 0$$

- propriété de perte de mémoire :
  La probabilité qu'un phénomène se produise entre les temps t et $t+s$ s'il ne s'est pas produit avant est la même que la probabilité qu'il se produise entre les temps 0 et s. On peut oublier l'instant de départ pour modéliser la probabilité.

$$\forall s, t \in R^+, P(X > s + t | X > t) = P(X > s)$$

Variables aléatoire conjointement continues

.

- Les variables aléatoires X et Y sont dites conjointement continues s'il existe une fonction f de deux arguments réels ayant pour tout sous-ensemble C du plan la propriété suivante :

$$P((X,Y) \in C) = \int\int_{(x,y)\in C} f(x,y)dxdy$$

- f est appelée densité conjointe ou simultanée de X et de Y.
- Si A et B sont deux ensembles de nombres réels, en définissant $C = \{(x,y)|x \in A, t \in B\}$, on obtient :

$$P(X \in A, Y \in B) = \int_B \int_A f(x,y)dxdy$$

Variables aléatoire conjointement continues (2)

.

- Fonction de répartition :

$$
\begin{aligned}
F(a,b) &= P(X \in]-\infty, a], Y \in]-\infty, b]) \\
&= \int_{-\infty}^{b} \int_{-\infty}^{a} f(x,y)\,dx\,dy
\end{aligned}
$$

Densités marginales

.

$$
\begin{aligned}
P(X \in A) &= P(X \in A, Y \in]-\infty, \infty[) \\
&= \int_A \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx \\
&= \int_A f_X(x)dx
\end{aligned}
$$

avec $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$

Variables continues indépendantes

.

- cas discret :

$$p(x,y) = p_X(x)p_Y(y)\ \forall x,y$$

- cas continu :

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$