Tests d'hypothèses

1 Ampoules [2] *(corrigé en TD)*

La durée de vie moyenne d'un échantillon de 100 ampoules fluorescentes fabriquées par une usine est estimée à 1750 heures avec un écart-type de 120 heures. Si μ est la durée de vie moyenne de toutes les ampoules produites par l'usine.

1. Tester l'hypothèse $\mu = 1600$ heures contre $\mu \neq 1600$ pour un niveau de signification de 0.05 et un niveau de signification 0.01.
2. Même question que précédemment en testant l'hypothèse $\mu = 1600$ heures contre $\mu < 1600$.

2 Câbles [2] *(corrigé en TD)*

Les charges de rupture de câbles produits par une fabrique ont une valeur moyenne de 1800kg et un écart-type de 100kg. On affirme que la charge de rupture peut être augmentée par une technique nouvelle de procédé de fabrication. Pour tester cette affirmation, on a testé un échantillon de 50 câbles et l'on a trouvé une charge de rupture moyenne de 1850kg. Peut-on admettre cette affirmation à un niveau de signification de 0.01 ?

3 Médicament [2]

Le fabricant d'un médicament breveté affirmait qu'il était efficace à 90% pour guérir une allergie en 8 heures. Dans un échantillon de 200 personnes atteintes par cette allergie, on en a guéri 160 par le médicament. Déterminer si l'affirmation du fabricant est légitime (niveau $\alpha = 0.01$).
Réponse. Soit X la v.a. binomiale de loi $\mathcal{B}(\pi, 200)$ correspondant au nombre de patients guéris par le médicament.

On fait l'hypothèse $H_0 = \{\pi = 0.9\}$ et $H_1 = \{\pi \leq 0.9\}$ (il est logique de considérer une hypothèse H_1 comme celle-ci puisque on ne peut en vouloir au fabricant de faire un médicament qui guérit plus de 90% des patients). Il suffit d'utiliser la formule vue en cours pour un test unilatéral sur une proportion.

La valeur de quantile qui nous intéresse est $-u_{1-\alpha} = -u_{0/99} = -2.33$. Nous avons la statistique de test T définie par :

$$T = \frac{X - n\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}},$$

qui, sous l'hypothèse H_0 et selon l'expérience effectuée, prend la valeur :

$$\begin{aligned} t &= \frac{160 - 200 \cdot 0.9}{\sqrt{200 \cdot 0.9\ cdot(1-0.9)}} \\ &= -4.71, \end{aligned}$$

et donc $t < -2.33$ et on rejette H_0 (avec une probabilité 0.01 de rejeter H_0 à tort).

4 Bouteilles de vin [1]

Un négociant en vin s'intéresse à la contenance des bouteilles d'un cru déterminé. Il se demande si la contenance moyenne n'est pas inférieure à la contenance légale de 75cl. À cet effet, il mesure le contenu de 10 bouteilles prises au hasard et obtient les valeurs suivantes (en cl) :

$$73.2, 72.6, 74.5, 75.0, 75.5, 73.7, 74.1, 75.8, 74.8, 75.0$$

1. En supposant la normalité de la distribution du contenu, et l'écart-type connu égal à 1cl, peut-il conclure que le contenu moyen est inférieur à 75cl, avec un test de niveau 1% ?
Réponse. On pose a priori que le producteur est honnête et que le négociant doit prouver la fraude qu'il soupçonne.

Le contenu X d'une bouteille de vin est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = 1cl$. Moyenne des contenus de l'échantillon étudié : $\bar{x}$=74.42cl. Test de l'hypothèse $H_0 = \{\mu \geq 75cl\}$ (i.e. le producteur est honnête) contre $H_1 = \{\mu < 75cl\}$. Il s'agit d'un test unilatéral. La statistique de test utilisée est

$$T = \frac{\bar{X} - 75}{\sigma/\sqrt{n}},$$

qui, sous H_0 suit une loi normale centrée réduite. Le quantile d'ordre 99% est $t_{0.99} = 2.325$. La région de rejet du test, correspondant au risque de 1% est donc $t < -2.325$. La valeur observée de T est

$$t = -1.834.$$

La valeur t est dans la zone d'acceptation de H_0 et on conserve cette hypothèse.

2. On suppose que la contenance moyenne réelle est égale à 74.5cl et que l'écart-type est connu et égal à 1cl. Calculer l'erreur de seconde espèce du test précédent.
La variable aléatoire $\bar{X}$ égale à la moyenne d'échantillon suit maintenant une loi normale d'espérance $\mu = 74.5cl$. Dans ce cas, il y a bien fraude. Le risque β est de ne pas la détecter, c'est-à-dire d'accepter l'hypothèse H_0 alors qu'elle est fausse :

$$\begin{aligned}\beta(\mu) &= P\left(\frac{\bar{X} - 75}{\sigma/\sqrt{n}} > -2.325\right) \\ &= P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > -2.325 - \frac{\mu - 75}{\sigma/\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

Or la statistique $U = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ est distribuée selon une loi normale centrée réduite et il suffit de lire la table de cette loi pour calculer $\beta(74.5)$:

$$\beta(74.5) = 0.77.$$

3. Faire de même pour les valeurs suivantes de la contenance moyenne : 73cl, 73.5cl, 74cl. Commenter. *Réponse. En utilisant les arguments précédents, on trouve*
   - $\beta(73) = 0.000$;
   - $\beta(73.5) = 0.008$;
   - $\beta(73) = 0.21$.

   On remarque ainsi que plus μ est loin de 75 plus le risque de ne pas s'en apercevoir est faible (comme on pouvait s'y attendre !).
4. Le négociant veut pouvoir détecter, avec une probabilité élevée (0.99), une contenance moyenne de 74.5cl tout en gardant un test de niveau 1%. Que doit-il faire ? *Réponse. La seule possibilité est d'augmenter la taille de l'échantillon. Il s'agit d'un problème classique en statistique : déterminer la taille de l'échantillon qui va permettre d'avoir un risque β fixé* a priori *(ici 1%). On procède de la façon suivante. Pour obtenir un risque β de 1%, avec une contenance moyenne de 74.5cl, il suffit avoir l'égalité $0.01 = P(U > -2.325 - (74.5 - 75)/(1/\sqrt{n}))$. En écrivant que le second terme apparaissant dans cette probabilité dépasse le quantile 0.01 de la loi normale centrée réduite on obtient : $\sqrt{n}(75 - 74.5)/1 \geq 4.65$ d'où $n \geq 87$. Il suffit donc de tester 87 bouteilles au moins pour pouvoir détecter la fraude quasiment à coup sûr.*

Remarque : la correction provient en grande partie de [1].

5 Spock [1]

À Boston en 1986, le célèbre docteur Benjamin Spock, militant contre la guerre du Vietnam, fut jugé pour incitation publique à la désertion. Le juge chargé de l'affaire était soupçonné de ne pas être équitable dans la sélection des jurés : parmi les 700 personnes qu'il avait désignées comme jurés lors de ses procès précédents, 15% étaient des femmes alors que, sur l'ensemble de la ville, 29% des jurés éligibles étaient des femmes.

1. On note H_0 l'hypothèse suivante : « le choix des jurés est fait selon un tirage au sort équiprobable (avec la même chance pour chaque citoyen(ne) éligible) ». Tester l'hypothèse H_0 au niveau $\alpha = 0.05$. Que peut-on dire de l'impartialité du juge dans son choix des jurés. Comment argumenter devant une cour de justice pour récuser le juge en question ? *Réponse. On rejette l'hypothèse d'impartialité (test bilatéral sur une proportion). La probabilité critique associée à la statistique de test est tellement faible qu'il est pratiquement impossible que le jury ait été choisi totalement au hasard.*
2. Répondre aux mêmes questions en supposant que les pourcentages précédents sont les mêmes mais que le juge, étant plus jeune, n'a désigné que 40 jurés au cours de sa carrière. *Réponse. Cette fois-ci, on accepte l'hypothèse H_0. (On peut utiliser la probabilité critique ou bien le test usuel – ce qui est équivalent).*

6 Comparaison de deux populations

Soit $X_1, \dots, X_{n_x}$ v.a. i.i.d avec $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ et $Y_1, \dots, Y_{n_y}$ v.a. i.i.d avec $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$ et les définitions usuelles pour $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ ainsi que pour les écarts-types empiriques S_x^2 et S_y^2. Introduisons par ailleurs S^2 avec :

$$S^2 = \frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}.$$

1. Supposons que σ_x et σ_y soient connus. Quelle est la loi de $\bar{X} - \bar{Y}$? En déduire une règle de rejet au niveau α pour l'hypothèse nulle $H_0 = \{\mu_x = \mu_y\}$ contre $H_1 = \{\mu_x \neq \mu_y\}$.
   Réponses.
   - *Rappel général : si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$*
   - *$\bar{X} - \bar{Y} \sim \mathcal{N}(\mu_x - \mu_y, \frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y})$?, soit, sous l'hypothèse H_0, $\bar{X} - \bar{Y} \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y})$*
   - *Une règle de rejet au niveau α pour l'hypotèse nulle $H_0 = \{\mu_x = \mu_y\}$ contre $H_1 = \{\mu_x \neq \mu_y\}$ se déduit directement de la distribution de $\bar{X} - \bar{Y}$, qui suit une loi normale et dont il faut comparer la moyenne à la valeur de référence 0.*
   - *On obtient ainsi directement qu'il faut rejeter H_0 au niveau α si*

   $$\frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_x^2}{n_y}}} > u_{1-\alpha/2}$$

   c'est-à-dire si

   $$\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_x^2}{n_y}}} > u_{1-\alpha/2} \quad \textit{ou} \quad \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_x^2}{n_y}}} < -u_{1-\alpha/2}$$

   où $\bar{x}$ est une réalisation de $\bar{X}$ (de même pour $\bar{y}$ et $\bar{Y}$) et $u_{1-\alpha/2}$ le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi normale centrée réduite.
2. Supposons à présent que σ_x et σ_y soient inconnus mais égaux. Quelle est la loi de $\bar{X} - \bar{Y}$? Quelle est la loi de $(n_x + n_y - 2)S^2/\sigma^2$? En déduire une règle de rejet au niveau α pour l'hypothèse nulle $H_0 = \{\mu_x = \mu_y\}$ contre $H_1 = \{\mu_x \neq \mu_y\}$. Le test associé à cette règle de décision est appelé « t test »et est très utilisé en pratique (par exemple, pour déterminer si un algorithme d'apprentissage est meilleur qu'un autre).
   - *$\bar{X} - \bar{Y} \sim \mathcal{N}(\mu_x - \mu_y, \sigma\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y})$*
   - *$(n_x + n_y - 2)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n_x+n_y-2}$ puisque cette variable est la somme de deux v.a. du χ^2 ayant respectivement n_x et n_y degrés de liberté. Par conséquent,*

   $$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_x - \mu_y))}{S\sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}} \sim \mathcal{T}_{n_x+n_y-2}$$

   où $\mathcal{T}_{n_x+n_y-2}$ désigne la loi de Student à $n_x + n_y - 2$ degrés de liberté.

– *On en déduit que l'on peut rejeter H_0 au niveau α si*

$$\frac{|\bar{X}-\bar{Y}|}{S\sqrt{\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}}} > t_{n_x+n_y-2,1-\alpha/2}$$

soit

$$\frac{\bar{x}-\bar{y}}{S\sqrt{\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}}} > t_{n_x+n_y-2,1-\alpha/2} \quad \textit{ou} \quad \frac{\bar{x}-\bar{y}}{S\sqrt{\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}}} < -t_{n_x+n_y-2,1-\alpha/2}$$

où $t_{n_x+n_y-2,1-\alpha/2}$ est le quantile de niveau $1-\alpha/2$ de la loi de Student à n_x+n_y-2 degrés de liberté.

Références

[1] J.-J. Daudin, S. Robin, and C. Vuillet. *Statistique inférentielle – idées, démarches, exemples*. Presses universitaires de Rennes, 2001.

[2] M. R. Spiegel. *Théorie et applications de la statistique*. Series Schaum, 1976.