1 Espérance et variance

1.1 Premiers résultats

1. Montrer que, X étant une v.a. définie sur l'ensemble $\mathcal{X}$, on a :
   (a) $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$
   (b) pour a et b dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$ et $\mathbb{V}[aX + b] = a^2\mathbb{V}[X]$
2. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. normales indépendantes de paramètres respectifs $\mu_1, \ldots, \mu_n$ et $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$ et $Z = \sum_{i=1}^n a_i X_i$. Montrer que
   (a) $\mathbb{E}[Z] = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i$
   (b) $\mathbb{V}[Z] = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma^2$
   pour répondre à ces questions on utiliera le fait que la densité de probabilité p_z de Z est égale au produit des densités de probabilités $p_1(x) \ldots p_n(x)$ des X_i

1.2 Lois usuelles

Montrer les résultats concernant l'espérance et la variance d'une v.a. suivant :
- une loi binomiale de paramètres n et p
- une loi normale de paramètres μ et σ^2
- une loi de Poisson de paramètre m

1.3 Quelques inégalités bien connues

Nous avons les inégalités suivantes :

Inégalité de Markov Soit X une v.a. réelle prenant des valeurs non négatives. Supposons que $\mathbb{E}(X)$ existe. Alors pour tout $t > 0$

$$P(X > t) \leq \frac{E(X)}{t}.$$

Inégalité de Chebyshev Soit X une v.a. réelle. Soit $\mu = \mathbb{E}(X)$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}(X)$. Alors, pour tout $t > 0$

$$P(|X - \mu| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}.$$

Inégalité de Hoeffding Soit $Y_1, \ldots, Y_n$ des v.a. indépendantes telles que $\mathbb{E}(Yi) = 0$ et $a_i \leq Y_i \leq b_i$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, pour tout $t > 0$,

$$P(\sum_{i=1}^n Y_i > \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon} \prod_{i=1}^n e^{t^2(b_i - a_i)^2/8}.$$

1. Déduire l'inégalité de Chebyshev à partir de l'inégalité de Markov.
2. Montrer que dans le cas de n variables de Bernoulli indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ de paramètre p, l'inégalité de Hoeffding s'écrit : pour tout $\varepsilon > 0$,

   $$P(|\bar{X}_n - p| > \varepsilon) \leq 2e^{-2n^2\varepsilon}$$

   où $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$.

2 Lecture des tables et de la limite centrale

2.1 Échauffement

1. Étant donné une variable aléatoire normale centrée réduite, quel est le quantile de niveau 0.95 ? Quelle est la probabilité que cette variable prenne une valeur inférieure à 0.5 ? Et une valeur supérieure à -0.3 ?
2. Répondre aux mêmes questions que précédemment mais avec une v.a. normale de moyenne 2 et d'écart-type 4.

2.2 Poids des enfants de 6 ans

Selon le ministère de la santé, le poids des garçons agés de 6 ans est distribué suivqnt une loi normale de moyenne 30kg et d'écart-type 3kg.

1. quelle est la proportion des garçons de 6 ans ayant un poids entre 23 et 40kg ? Entre 27 et 33 kg ?
2. quel est le poids sous lequel se trouve 85% des enfants de 6 ans ?

2.3 Production d'ampoules

Une société produisant des ampoules électriques s'intéresse à la qualité du processus de fabrication des ampoules. Pour ce faire, les reponsables de cette étude comptent le nombre d'ampoules présentant un défaut dans plusieurs cartons (chacun d'eux contenant 144 ampoules) choisis au hasard et obtiennent un nombre moyen de 1.44 ampoules défectueuses pour un écart-type de 1.2.

1. expliquer pourquoi décrire le nombre d'ampoules défectueuse par une loi normale n'est pas la meilleure démarche ;
2. chaque semaine, 36 cartons sont choisis aléatoirement et le nombre moyen M d'ampoules défectueuses (sur les 36 cartons) est enregistré. Utiliser le théorème central limite pour identifier la distribution de M ;
3. au cours d'une semaine, le nombre moyen M d'ampoules défectueuses est 1.7. Quelle est la probabilté d'observer une valeur de M supérieure ou égale à 1.7 ; les reponsables de la chaîne de production doivent-ils s'inquiéter d'un possible dysfonctionnement de leurs appareils de production ?