1 Premier classifieur à noyaux

Déterminer la valeur des coefficients α_i et b du classifieur à noyaux vu en cours. Rappel : l'ensemble d'apprentissage est $\mathcal{S} = \{(\mathbf{x}_1, y_1), \ldots, (\mathbf{x}_m, y_m))\}$ avec $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}$ et $y_i \in \mathcal{Y} = \{-1, +1\}$ et $\mathcal{S}$ se décompose en m^+ exemples positifs et m^- exemples négatifs.

2 Noyaux basiques

Dans cet exercice, on désigne par $\langle\cdot,\cdot\rangle_d$ l'application

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle_d : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d &\to \mathbb{R}\\ (\mathbf{u},\mathbf{v}) &\mapsto \langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_d = \sum_{i=1}^d u_i v_i\end{aligned}$$

1. montrer brièvement que $\langle\cdot,\cdot\rangle_d$ est bilinéaire, symétrique, définie et positive (c'est donc un noyau) ;
2. soit la fonction définie pour un d fixé par $k_d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_d + 1$; trouver une application ϕ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^{d+1}$ telle que $k(u,v) = \langle\phi(\mathbf{u}),\phi(\mathbf{v})\rangle_{d+1}$
3. soit l'application :

   $$\begin{aligned}\phi : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^5\\ \mathbf{u} &\mapsto \phi(\mathbf{u}) = [u_1, u_2, 2u_1u_2, u_1^2, u_2^2]^\top\end{aligned}$$

   simplifier l'écriture du noyau k défini par $k(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \langle\phi(\mathbf{u}),\phi(\mathbf{v})\rangle_5$;
4. soit $\mathcal{S} = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_\ell\}$ un ensemble de vecteurs de $\mathbb{R}^d$
   (a) donner la taille et le terme général de la matrice de Gram K associée à $\langle\cdot,\cdot\rangle_d$ et $\mathcal{S}$;
   (b) montrer que les valeurs propres K sont positives ou nulles (indice : utiliser la matrice X de taille $d \times \ell$ définie par $X = [\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}\_\ell])$
5. Soit l'application ϕ définie par

   $$\begin{aligned}\phi : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^6\\ \mathbf{u} &\mapsto \phi(\mathbf{u}) = \left[3u_1, -3u_2, 2u_1u_2, \sqrt{2}u_1^2, \sqrt{2}u_2^2, \sqrt{2}\right]^\top\end{aligned}$$

   simplifier l'écriture du noyau k défini par $k(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \langle\phi(\mathbf{u}),\phi(\mathbf{v})\rangle_6$ e n faisant en particulier apparaître le produit scalaire $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle_2$
6. Dans cette question, on suppose que d est un entier naturel fixé. Soit l'application $k_{\cos}$ définie par

   $$\begin{aligned}k_{\cos} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d &\to \mathbb{R}\\ (\mathbf{u},\mathbf{v}) &\mapsto k_{\cos}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \cos(\mathbf{u},\mathbf{v})\end{aligned}$$

   où $\cos(\mathbf{u},\mathbf{v})$ désigne le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. Trouver une application $\phi_{\cos}$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ telle que

   $$k_{\cos}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \langle\phi(\mathbf{u}),\phi(\mathbf{v})\rangle_d$$

7. Soit l'application k_q définie par

   $$\begin{aligned}k_q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}\\ (\mathbf{u},\mathbf{v}) = ([u_1\ u_2]^\top, [v_1\ v_2]^\top) &\mapsto k_q(\mathbf{u},\mathbf{v}) = u_1^2v_1^2 + 4u_2v_2 + 3u_1v_1u_2v_2\end{aligned}$$

   Trouver une application ϕ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que

   $$k_q(\mathbf{u},\mathbf{v})) = \langle\phi(\mathbf{u}),\phi(\mathbf{v})\rangle_3.$$