A rendre pour le mercredi 7 mars 2007

1 Estimateurs (inspirés de [1])

1.1 Estimateur de variance minimum

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon i.i.d d'une loi de moyenne μ et de variance σ^2.

1. Donner la condition sur les constantes réelles $a_1, \ldots, a_n$ pour que $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ soit un estimateur sans biais de μ.
2. Parmi les estimateurs sans biais de cette forme déterminer celui qui est de variance minimum. Calculer sa variance.

1.2 Estimateurs sans biais

Sachant que X se distribue selon une loi normale de variance σ^2 et connaissant les variances et les tailles de trois échantillons, à savoir, $s_1^2 = 8$, $s_2^2 = 10$, $s_3^2 = 14$, et $n_1 = 10$, $n_2 = 7$ et $n_3 = 5$

1. montrer que, dans le cas de k échantillons, l'estimateur

$$T = \frac{n_1 s_1^2 + \ldots + n_k s_k^2}{n_1 + \ldots + n_k}$$

   est un estimateur sans biais de σ^2 ;
2. déterminer une estimation sans biais de σ^2 en utilisant n_1, n_2 et n_3 ;
3. montrer que

$$\frac{1}{5}(2s_1^2 + 2s_2^2 + s_3^2)$$

   est aussi une estimation sans biais de σ^2 ;
4. quel est le meilleur estimateur de celui utilisé en 2 et celui utilisé en 3 ?

1.3 Estimateur sans biais, loi uniforme

Une v.a. aléatoire X suit une loi uniforme sur $[0; \theta]$ a une densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{\theta}.$$

Montrer que $2\bar{X}$ est un estimateur sans biais de θ.

2 Estimateurs du maximum de vraisemblance (cf. [1])

2.1 Loi de Poisson

Déterminer l'estimateur de maximum de vraisemblance de m pour une loi de Poisson de paramètre m fondé sur n observations. Quel est le biais de cet estimateur ?

2.2 Lois exponentielles

Cet exercice s'intéresse aux estimateurs de vraisemblance de quelques lois exponentielles.

1. Soit la densité de probabilité

$$p_\theta(x) = (1+\theta)x^\theta, \quad \theta > -1, 0 < x < 1.$$

   (a) Montrer que p_θ définit bien une densité de probabilité.

   (b) Donner l'estimateur de maximum de vraisemblance de θ à l'aide d'un échantillon de taille n.

2. Soit la densité de probabilité
$$p_\theta(x) = \theta e^{-x\theta}, \quad x > 0.$$
   (a) Montrer que p_θ définit bien une densité de probabilité.
   (b) Donner l'estimateur de maximum de vraisemblance de θ à l'aide d'un échantillon de taille n.
   (c) Soit $X \sim \theta$. Donner un estimateur de $\mathbb{E}[X]$.

3 Intervalles de confiance (cf. [2])

3.1 Cours

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, \pi)$. Dans cet exercice, nous nous intéressons à la démonstration du résultat de cours donnant un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ pour π de la forme

$$IC_{1-\alpha} = \left[\frac{\frac{x}{n} + \frac{u^2_{1-\alpha/2}}{2n} \pm \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{u^2_{1-\alpha/2}}{4n} + \frac{x}{n}\left(1 - \frac{x}{n}\right)}}{1 + \frac{u^2_{1-\alpha/2}}{n}} \right] \tag{1}$$

où $u_{1-\alpha/2}$ est le quantile de niveau $1-\alpha/2$ de la loi normale centrée réduite.

1. Quand peut-on considérer que la loi de X peut être approchée par une loi normale ? Quels sont les paramètres de cette loi normale ? En supposant l'approximation normale valide, donner une statistique pivotale T^{pv} permettant de former un intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ pour π.
2. Suivant le cours, l'intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$ pour π s'obtient à partir de la statistique pivotale T^{pv} et de la propriété que $P(t_{\alpha/2} < T^{pv} < t_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha$, t_a désignant le quantile de niveau a de la loi de T^{pv}. Préciser pourquoi $t_{\alpha/2} = -u_{1-\alpha/2}$ et $t_{1-\alpha/2} = u_{1-\alpha/2}$.
3. Déduire des questions précédentes l'expression (1) de $IC_{1-\alpha}$ en précisant chaque étape du calcul.

3.2 Temps de réaction

La mesure du temps de réaction, supposé suivre une loi normale, de plusieurs sujets sur une expérience donnée fournit un écart-type de 0.05s. Quelle doit être la taille de l'échantillon de mesures pour que l'erreur de l'estimation du temps de réaction n'excède pas 0.01s à 95% ? à 99% ?

3.3 Loi de Student

Soit T un v.a de Student à ν degrés de liberté. Quelle sont les valeurs critiques de t pour lesquelles $P(T > t) = 0.05$ pour $\nu = 16$, $\nu = 27$, $\nu = 200$?

3.4 Sphères

On procède à 10 mesures du diamètre d'une sphère. On trouve une moyenne de 4.38cm et un écart-type de 0.06cm. Donner des intervalles de confiance à 95% et à 99% pour le diamètre de la sphère.

3.5 Roues

Les mesures des diamètres de n roues dentées issues d'un échantillon aléatoire, fabriquées pendant une journéee par une centaine de machines, donnent un diamètre moyen de 0.824cm pour un écart-type empirique de 0.042cm.

1. si $n = 2000$, déterminer les intervalles de confiance à 95% et à 99% du diamètre moyen des roues ;

2. faire ce calcul de deux manières différentes lorsque $n = 201$;
3. faire la même chose lorsque $n = 20$.

3.6 Poids d'un groupe de sprinteurs

On a pesé 10 athlètes courant le 100m capables de couvrir cette distance en moins de 10 secondes. Nous avons les poids suivant :

$$75.9, 75.0, 75.5, 75.6, 76.1, 76.5, 77.0, 75.2, 76.0, 76.7$$

En admettant que ces résultats sont issus d'une population infinie distribuée selon une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2.

1. Construire un intervalle de confiance à 95% pour μ si σ^2 est supposé connu et $\sigma^2 = 0.25$.
2. Construire un intervalle de confiance à 95% pour μ lorsque σ^2 est inconnu.
3. Construire un intervalle de confiance à 95% pour σ.

3.7 Ampoules

On étudie la production d'une entreprise spécialisée dans la fabrication d'ampoules. On extrait de la production totale un échantillon de 40 ampoules et on trouve 3 ampoules défectueuses.

1. Construire un intervalle de confiance à 95% pour la proportion d'ampoules défectueuses.
2. Construire un intervalle de confiance à 95% dans le cas ou l'échantillon est de taille 400 et qu'on y découvre 30 ampoules défectueuses.

Références

[1] P. G. Hoel. *Introduction to Mathematical Statistics*. John Wiley and Sons, 1984.

[2] M. R. Spiegel. *Théorie et applications de la statistique*. Series Schaum, 1976.