Construire des catégories à ressources avec des catégories différentielles

ou *Une introduction à la sémantique des jeux*

Lison Blondeau-Patissier

Aix-Marseille Université

JFLA 2024

Construire des quoi ?

Théorème

Si $\mathcal{D}$ est une "catégorie différentielle", on peut construire une catégorie à ressources $\mathrm{Res}(\mathcal{D})$.

$\leftarrow$ ici, une catégorie additive monoïdale avec stockage

Construire des quoi ?

Théorème

Si $\mathcal{D}$ est une "catégorie différentielle", on peut construire une catégorie à ressources $\mathrm{Res}(\mathcal{D})$*.*

$\leftarrow$ ici, une catégorie additive monoïdale avec stockage

Ce talk parle :

- de catégories !

Construire des quoi ?

Théorème

Si $\mathcal{D}$ est une "catégorie différentielle", on peut construire une catégorie à ressources $\mathrm{Res}(\mathcal{D})$.

$\leftarrow$ ici, une catégorie additive monoïdale avec stockage

Ce talk parle :

- de catégories !
- mais surtout de catégories à ressources
  - ➔ structure catégorique des *jeux concurrents à pointeurs*
  - ➔ interprètent le λ-*calcul à resources*

De quoi on parle ?

La sémantique des jeux en une slide

Idée principale :
étudier les interactions entre un *programme* et son *contexte*.

$3 + 5 = ?$

$3 + 5 = 8$:)

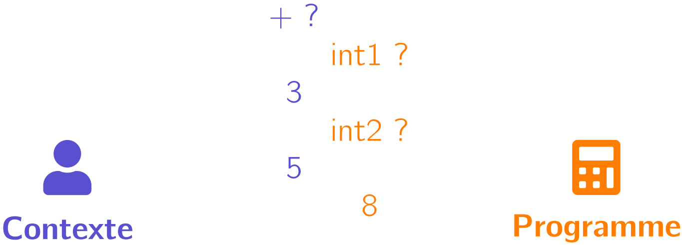
Contexte

Programme

De quoi on parle ?

La sémantique des jeux en une slide

Idée principale :
étudier les interactions entre un *programme* et son *contexte*.



La sémantique des jeux en un peu plus qu'une slide

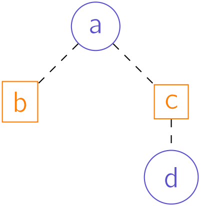
Arènes *(les règles du jeu)*	$\longleftrightarrow$	**Types**
Parties *(une itération du jeu)*	$\longleftrightarrow$	**Exécutions**
Stratégies *(un ensemble de parties)*	$\longleftrightarrow$	**Programmes**

Arène (Types)

Définition

Une arène est $A = \langle |A|, \to_A, \mathrm{pol}_A \rangle$ *avec*

- $\mathrm{pol}_A : |A| \to \{\mathbf{C}, \mathbf{P}\}$
- $\to_A$ *forestiale et alternante.*



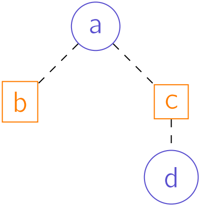
Exemples

Arène (Types)

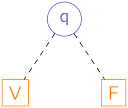
Définition

Une arène est $A = \langle |A|, \rightarrow_A, \mathrm{pol}_A \rangle$ *avec*

- $\mathrm{pol}_A \colon |A| \rightarrow \{\mathbf{C}, \mathbf{P}\}$
- $\rightarrow_A$ *forestiale et alternante.*



Exemples



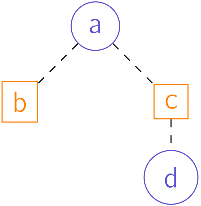
Arène bool

Arène (Types)

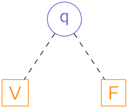
Définition

Une *arène* *est* $A = \langle |A|, \rightarrow_A, \mathrm{pol}_A \rangle$ *avec*

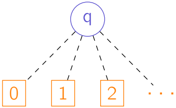
- $\mathrm{pol}_A : |A| \rightarrow \{\mathbf{C}, \mathbf{P}\}$
- $\rightarrow_A$ *forestiale et alternante.*



Exemples



Arène bool



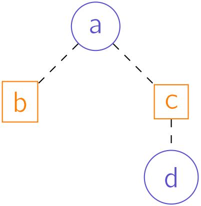
Arène nat

Arène (Types)

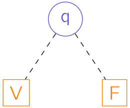
Définition

Une *arène* *est* $A = \langle |A|, \rightarrow_A, \mathrm{pol}_A \rangle$ *avec*

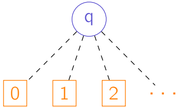
- $\mathrm{pol}_A : |A| \rightarrow \{\mathbf{C}, \mathbf{P}\}$
- $\rightarrow_A$ *forestiale et alternante.*



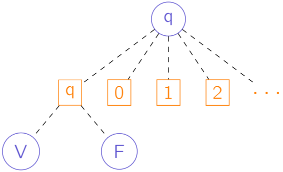
Exemples



Arène bool



Arène nat



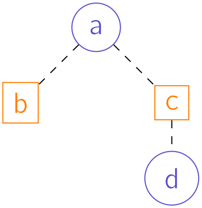
Arène bool → nat

Arène (Types)

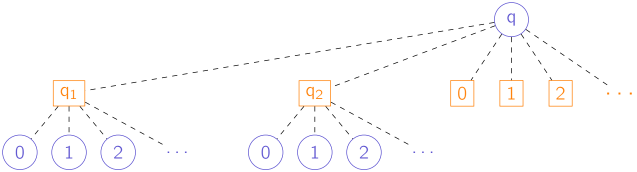
Définition

Une arène *est* $A = \langle |A|, \to_A, \mathrm{pol}_A \rangle$ *avec*

- $\mathrm{pol}_A \colon |A| \to \{\mathbf{C}, \mathbf{P}\}$
- $\to_A$ *forestiale et alternante.*



Exemples



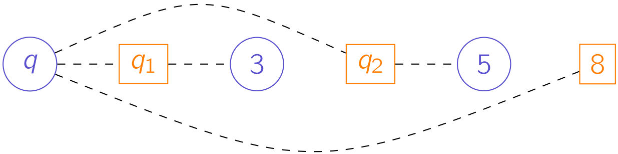
Arène $\mathbf{nat}_1 \to \mathbf{nat}_2 \to \mathbf{nat}$

Parties (exécutions)

Dans les jeux Hyland-Ong (HO) :

Définition

Une partie s dans une arène A est une suite *alternante* d'événements de A, avec des *pointeurs*.



Stratégies (programmes) dans les jeux HO

Définition

Une stratégie est un ensemble de parties.

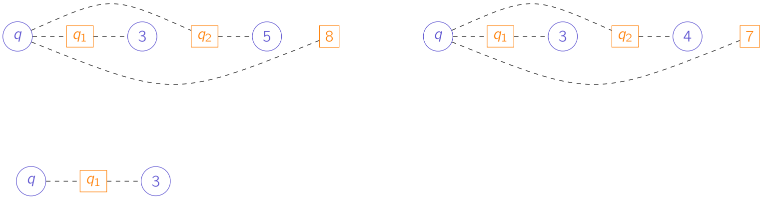
(déterministe, close par préfixe, ...)

Stratégies (programmes) dans les jeux HO

Définition

Une stratégie est un ensemble de parties.

(déterministe, close par préfixe, ...)

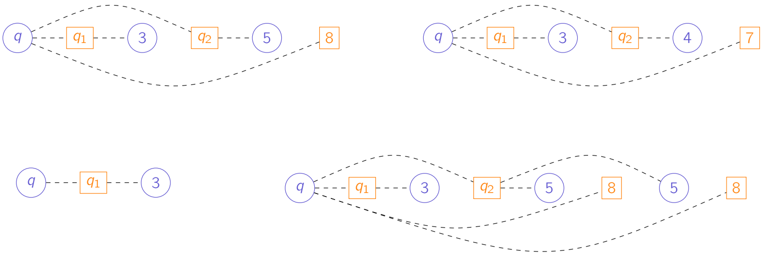


Stratégies (programmes) dans les jeux HO

Définition

Une stratégie est un ensemble de parties.

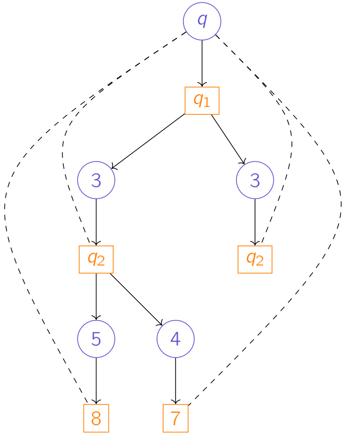
(déterministe, close par préfixe, ...)



Augmentations dans les jeux concurrents à pointeurs

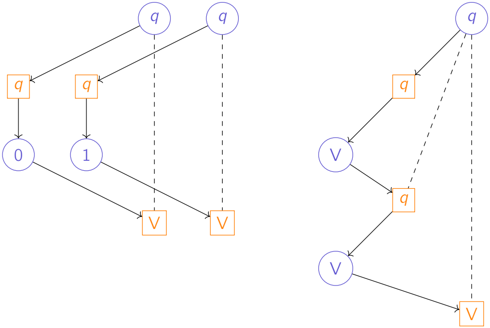
Définition

Une augmentation p *dans une arène A est un sous-arbre épais alternant d'événements de A, avec des pointeurs et une causalité $\rightarrow_{\mathtt{p}}$*
(et quelques conditions en plus).



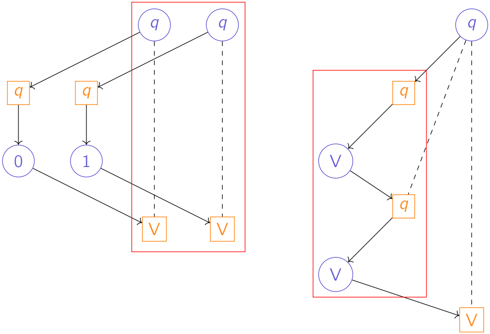
Composition dans PCG

Comment composer r : **nat** → **bool** avec p : **bool** → **bool** ?



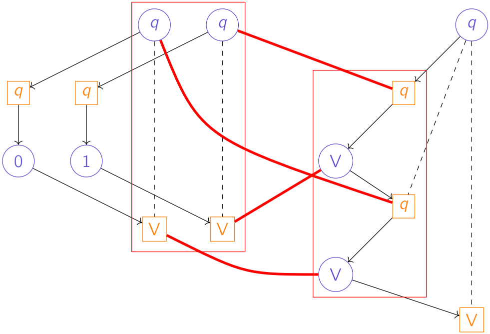
Composition dans PCG

Comment composer r: **nat** → **bool** avec p: **bool** → **bool** ?



Composition dans PCG

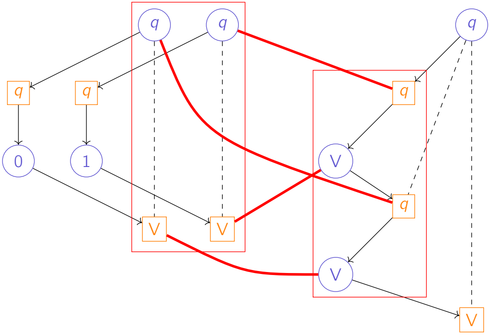
Comment composer r : **nat** → **bool** avec p : **bool** → **bool** ?



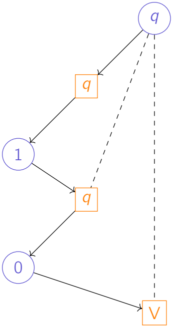
Interaction r $\circledast_{\varphi}$ p

Composition dans PCG

Comment composer r : **nat** $\to$ **bool** avec p : **bool** $\to$ **bool** ?



Interaction r $\circledast_{\varphi}$ p



Composition r $\circ_{\varphi}$ p

Stratégies (programmes) dans PCG

Définition

Une stratégie σ *sur une arène* A *est* $\sigma : \mathsf{Aug}(A) \to \mathbb{R}^+$, *qu'on écrit*

$$\sigma = \sum_{\mathsf{p} \in \mathsf{Aug}(A)} \sigma(\mathsf{p}) \cdot \mathsf{p}$$

Stratégies (programmes) dans PCG

Définition

Une stratégie σ *sur une arène* A *est* $\sigma \colon \mathrm{Aug}(A) \to \mathbb{R}^+$, *qu'on écrit*

$$\sigma = \sum_{\mathrm{p} \in \mathrm{Aug}(A)} \sigma(\mathrm{p}) \cdot \mathrm{p}$$

Définition

La composition de deux stratégies est la somme des compositions des augmentations de leur support.

Si $\sigma \colon A \to B$ et $\tau \colon B \to C$, on a

$$\tau \circ \sigma \colon A \to C\,.$$

Catégories à ressources

Définition

Une catégorie à ressources est une SMC

- *additive*
- *pour tout objet A, une bialgèbre* $(A, \delta_A, \varepsilon_A, \mu_A, \eta_A)$

$$\delta_A \colon A \to A \otimes A \qquad \varepsilon_A \colon A \to I$$

$$\mu_A \colon A \otimes A \to A \qquad \eta_A \colon I \to A$$

Catégories à ressources

Définition

Une catégorie à ressources est une SMC

- *additive*
- *pour tout objet A, une bialgèbre $(A, \delta_A, \varepsilon_A, \mu_A, \eta_A)$*

$$\delta_A \colon A \to A \otimes A \qquad \varepsilon_A \colon A \to I$$

$$\mu_A \colon A \otimes A \to A \qquad \eta_A \colon I \to A$$

- *et une identité pointée $\mathrm{id}^\bullet_A \colon A \to A$.* *(J'y reviens plus tard)*

λ-calcul

λ-calcul :

$$M, N, \ldots = x \mid \lambda x.M \mid MN$$

β-réduction :

$$(\lambda x.M)\, N \rightarrow_\beta M[N/x]$$

Exemples :

$$(\lambda x.xx)y \rightarrow_\beta yy$$
$$(\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \rightarrow_\beta (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$$

Calcul à ressources

λ-calcul **à ressources** :

$$s, t, \ldots = x \mid \lambda x.s \mid \langle s \rangle [t_1, \ldots, t_n]$$

β-réduction :

$$\langle \lambda x.s \rangle \overline{t} \rightharpoonup_\beta \sum_{\sigma \in S} s[t_{\sigma(1)}/x_1, \ldots, t_{\sigma(n)}/x_n]$$

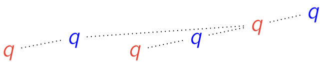
Exemples :

$$\begin{aligned} & \langle \lambda x.\langle x \rangle [x] \rangle [\lambda x.\langle x \rangle [x], \lambda x.\langle x \rangle [x]] \\ \rightharpoonup_\beta \; & 2 \cdot (\langle \lambda x.\langle x \rangle [x] \rangle [\lambda x.\langle x \rangle [x]]) \\ \rightharpoonup_\beta \; & 0 \end{aligned}$$

Interprétation

Types :

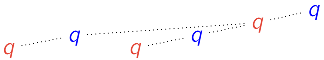
$$((o \to o) \to (o \to o) \to o) \to o$$



Interprétation

Types :

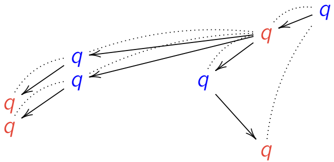
$$((o \to o) \to (o \to o) \to o) \to o$$



Termes :

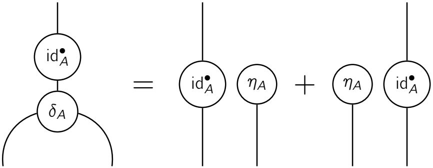
$$\lambda f^{(o\to o)\to(o\to o)\to o}.f\,[\lambda x^{o}.x,\ \lambda y^{o}.y]\,[\lambda z^{o}.f\,[\,]\,[\,]\,]$$

$$((o \to o) \to (o \to o) \to o) \to o$$



Retour sur les catégories à ressources

L'**identité pointée** permet d'identifier les éléments qui ne peuvent être appelé qu'une fois, ou qui n'appellent leurs éléments qu'une seule fois.



Ex. : $\mathrm{id}_A^\bullet$ *n'est pas duplicable*

Définition

Un morphisme $f\colon A \to B$ *est pointé si* $\mathrm{id}_B^\bullet \circ f = f$.

Catégories “différentielles”

On s'intéresse aux catégories

- additives
- monoïdales
- avec stockage : on a $(!, \mathrm{dig}, \mathrm{der}, \Delta, \mathrm{e}, \nabla, \mathrm{u})$

$$!\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C} \qquad \mathrm{der}_A\colon !A \to A$$

$$\Delta_A\colon !A \to !A \otimes !A \qquad \mathrm{e}_A\colon !A \to I$$

- et une codéreliction $\mathrm{cod}_A\colon A \to !A$

Catégories “différentielles”

On s’intéresse aux catégories

- additives
- monoïdales
- avec stockage : on a $(!, \mathrm{dig}, \mathrm{der}, \Delta, \mathrm{e}, \nabla, \mathrm{u})$

$$!\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C} \qquad \mathrm{der}_A\colon\, !A \to A$$
$$\Delta_A\colon\, !A \to !A \otimes !A \qquad \mathrm{e}_A\colon\, !A \to I$$

- et une codéreliction $\mathrm{cod}_A\colon A \to !A$

Remarque : $\mathrm{der}_A \circ \mathrm{cod}_A = \mathrm{id}_A$, mais pas l’inverse en général !

La construction

Théorème

Si $\mathcal{D}$ est une "catégorie différentielle", on peut construire une catégorie à ressources $\mathrm{Res}(\mathcal{D})$.

La construction

Théorème

Si $\mathcal{D}$ est une “catégorie différentielle”, on peut construire une catégorie à ressources $\mathrm{Res}(\mathcal{D})$.

Idée de la preuve :

$$\mathrm{Res}(\mathcal{D})_0 = \mathcal{D}_0$$
$$\mathrm{Res}(\mathcal{D})[A, B] = \mathcal{D}[!A, !B]$$
$$\mathrm{id}^{\bullet}_A = \mathrm{cod}_A \circ \mathrm{der}_A$$

$\square$

Conclusion(s)

1. Théorème : *Si $\mathcal{D}$ est une "catégorie différentielle", on peut construire une catégorie à ressources* $\mathrm{Res}(\mathcal{D})$.

Conclusion(s)

1. Théorème : *Si $\mathcal{D}$ est une "catégorie différentielle", on peut construire une catégorie à ressources* $\mathsf{Res}(\mathcal{D})$.

2. La sémantique des jeux, c'est chouette ! ☺

Conclusion(s)

1. Théorème : *Si $\mathcal{D}$ est une "catégorie différentielle", on peut construire une catégorie à ressources* $\mathrm{Res}(\mathcal{D})$.

2. La sémantique des jeux, c'est chouette ! ☺

3.

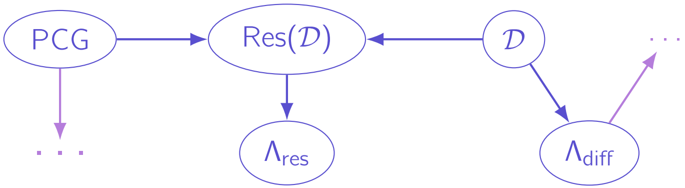
$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{PCG} & \longrightarrow & \mathrm{Res}(\mathcal{D}) & \longleftarrow & \mathcal{D} \\ & & \downarrow & & \searrow \\ & & \Lambda_{\mathrm{res}} & & \Lambda_{\mathrm{diff}} \end{array}$$

Conclusion(s)

1. Théorème : *Si $\mathcal{D}$ est une "catégorie différentielle", on peut construire une catégorie à ressources* $\mathrm{Res}(\mathcal{D})$.

2. La sémantique des jeux, c'est chouette ! ☺

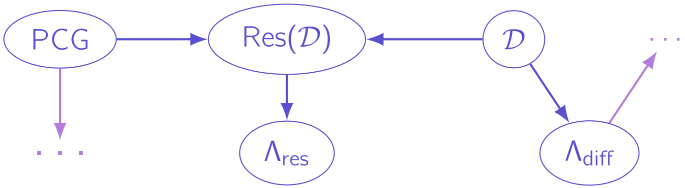
3.



Conclusion(s)

1. Théorème : *Si $\mathcal{D}$ est une "catégorie différentielle", on peut construire une catégorie à ressources* $\mathrm{Res}(\mathcal{D})$.

2. La sémantique des jeux, c'est chouette ! ☺

3. 

Merci !