

# Thèse

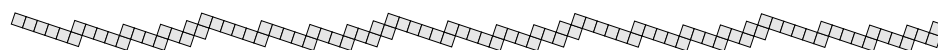
*en vue de l'obtention du diplôme de*

**Doctorat de l'Université de Lyon délivré par l'École Normale Supérieure de Lyon**

Spécialité informatique

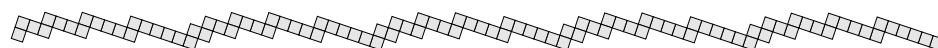
**Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme**

École Doctorale Informatique et Mathématiques



# LES PILES DE SABLE KADANOFF

Kévin PERROT



## Directeurs de thèse

Enrico FORMENTI    Éric RÉMILA

## Rapporteurs

Eric GOLES    Laurent VUILLON

**Soutenue publiquement le 27 juin 2013 devant le jury composé de**

Marie-Pierre BÉAL    Présidente

Enrico FORMENTI    Co-directeur

Eric GOLES    Rapporteur

Éric RÉMILA    Directeur

Stéphane THOMASSÉ    Membre

Laurent VUILLON    Rapporteur



**École Normale Supérieure de Lyon**  
**Laboratoire de l'Informatique et du Parallélisme**  
(UMR 5668 - CNRS - ENS de Lyon - Université Lyon 1)  
46 allée d'Italie  
69364 Lyon Cedex 7, France

**Université de Nice Sophia-Antipolis**  
**Laboratoire I3S**  
(UMR 6070 CNRS)  
2000 route des Lucioles  
BP 121  
F-06903 Sophia Antipolis Cedex, France



---

## RÉSUMÉ

### Les piles de sable Kadanoff

Les modèles de pile de sable sont une sous-classe d'automates cellulaires. BAK *et al.* les ont introduit en 1987 comme une illustration de la notion intuitive d'*auto-organisation critique*.

Le modèle de pile de sable Kadanoff est un système dynamique discret non-linéaire imagé par des grains cubiques se déplaçant de colonne parfaitement empilée en colonne parfaitement empilée. Pour un paramètre  $p$  fixé, la règle ci-contre est appliquée jusqu'à atteindre une configuration stable, appelée *point fixe*.

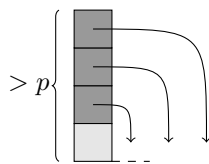
À partir d'une règle locale simple, décrire et comprendre le comportement macroscopique des piles de sable s'avère très rapidement compliqué. La difficulté consiste en la prise en compte simultanée des modalités discrète et continue du système : vue de loin, une pile de sable s'écoule comme un liquide ; mais de près, lorsque

## ABSTRACT

### Kadanoff sandpiles

Sandpile models are a subclass of Cellular Automata. BAK *et al.* introduced them in 1987 for they exemplify the intuitive notion of *Self-Organized Criticality*.

The Kadanoff sandpile model is a non-linear discrete dynamical system illustrating the evolution of cubic sand grains from nicely packed columns to nicely packed columns. For a fixed parameter  $p$ , the rule depicted on the left is applied until reaching a stable configuration, called a *fixed point*.



From a simple local rule, to describe and understand the macroscopic behavior of sandpiles is very quickly challenging. The difficulty consists in the simultaneous study of continuous and discrete aspects of the system: on a large scale, a sandpile flows like a liquid; but on a small scale, when we want to describe exactly the shape of a fixed point, the effects of the discrete dynamic must be taken into

L'on s'attache à décrire exactement une configuration, les effets de la dynamique discrète doivent être pris en compte. Si par exemple nous ajoutons un unique grain à une configuration stable, celui-ci déclenche une avalanche qui ne modifie que la couche supérieure de la pile, mais dont la taille est très difficile à prédire car sensible au moindre changement sur la configuration.

En analogie avec un sablier, nous nous intéressons en particulier à la séquence des points fixes atteints par l'ajout répété d'un nombre fini de grains à une même position, et à l'émergence de structures étonnamment régulières.

Après avoir établi une conjecture sur l'émergence de motifs de vague sur les points fixes, nous nous pencherons dans un premier temps sur une procédure inductive de calcul des points fixes. Chaque étape de l'induction correspond au calcul d'une *avalanche* provoquée par l'ajout d'un nouveau grain, et nous en proposerons une description simple. Cette étude sera prolongée par la définition de *trace* des avalanches sur une colonne  $i$ , qui capture dans un mot d'un alphabet fini l'information nécessaire à la reconstitution du point fixe pour les colonnes à la droite de l'indice  $i$ . Des liens entre les traces à des indices successifs seront alors exploités, liens qui permettent de conclure l'émergence de traces régulières, pour lesquelles la reconstitution du point fixe implique la formation des motifs de

account. If for example we add a single grain on a stabilized sandpile, it triggers an *avalanche* that roughly changes only the upper layer of the configuration, but which size is hard to predict because it is sensitive to the tiniest change of the configuration.

In analogy with an hourglass, we are particularly interested in the sequence of fixed points reached after adding a finite number of grains on one position, with the aim of explaining the emergence of surprisingly regular patterns.

After conjecturing the emergence of wave patterns on fixed points, we firstly consider an inductive procedure for computing fixed points. Each step of the induction corresponds to the computation of an *avalanche* triggered by the addition of a new grain, for which we propose a simple description. This study is carried on with the definition of the *trace* of avalanches on a column  $i$ , which catches in a word among a finite alphabet enough information in order to reconstruct the fixed point on the right of index  $i$ . Links between traces on successive columns are then investigated, links allowing to conclude the emergence of regular traces, whose fixed point's reconstruction involves the appearance and maintain of the wave patterns observed. This first approach is conclusive for the smallest conjectured parameter so far,  $p = 2$ .

The study of the general case goes through the design of a new

vague observés. Cette première approche est concluante pour le plus petit paramètre conjecturé jusqu'ici,  $p = 2$ .

L'étude du cas général que nous proposons passe par la construction d'un nouveau système mêlant différentes représentations des points fixes, qui sera analysé par l'association d'arguments d'algèbre linéaire et combinatoires (liés respectivement aux modalités continue et discrète des piles de sable). Ce résultat d'émergence de régularités dans un système dynamique discret fait appel à des techniques nouvelles, dont la compréhension d'un élément de preuve reste en particulier à raffiner, ce qui permet d'envisager un cadre plus général d'appréhension de la notion d'*émergence*.

**Mots clés :** système dynamique discret, pile de sable, point fixe, structure émergente.

system meddling in different representations of fixed points, which will be analyzed via an association of arguments of linear algebra and combinatorics (respectively corresponding to the continuous and discrete modalities of sandpiles). This result stating the emergence of regularities in a discrete dynamical system put new technics into light, for which the comprehension of a particular point in the proof remains to be increased. This motivates the consideration of a more general frame of work tackling the notion of *emergence*.

**Keywords :** discrete dynamical system, sandpile, fixed point, emergent structure.





*« Mais que se passe-t-il, Ô sage Domosogène, si nous décidons d'enlever  
un grain de sable à ce tas ?  
Aurions-nous toujours un tas ? »*

SOCRATE dialogue avec DOMOSOGÈNE, PLATON

Imaginé par Oscar GNOUROS



---

## REMERCIEMENTS

Merci à Enrico FORMENTI pour son immuable bienveillance, tu as été le premier à m'avoir permis de saisir la beauté des objets et des questions que les mathématiques sont capables d'exprimer, et cet émerveillement semble sans fond.

Merci à Éric RÉMILA pour son attention quotidienne, son soutien, pour avoir partagé avec moi son expérience et sa grande sympathie.

Merci à Eric GOLES et Laurent VUILLON d'avoir rapporté ce manuscrit, de m'avoir transmis des éclaircissements qui alimentent mon enthousiasme pour notre discipline.

Merci à Marie-Pierre BÉAL et Stéphan THOMASSÉ pour leur participation à ma soutenance, c'est un plaisir et un privilège de porter mes travaux à votre appréciation.

Merci à mes co-bureaux, à l'équipe MC2, ses assistant-e-s, à celles et ceux que j'ai croisés au LIP, à l'ÉNS de Lyon et/ou au cours du "master Enrico" à Nice et Sophia-Antipolis, j'estime avoir eu une chance fabuleuse en partageant ces années avec vous tous. Vous contribuez chacun à ma passion pour notre univers que je sens enthousiaste et chaleureux. J'espère ne pas faire preuve de trop de naïveté en écrivant cela, et je me souhaite donc que vous ne me manquiez pas, même si c'est joué d'avance.

Dear (inter)national collaborators, you take a great part in my fondness for our job, and I do really appreciate discovering your fresh look at everything.

Ce dernier merci n'est pas le moindre, il va à toutes celles et ceux qui peuplent les  $\langle 24$  moins un certain nombre  $\rangle$  autres heures de la journée, ma famille, mes amis. Je pense en particulier à une patate grâce à qui mes journées ont pris, prennent, et je le souhaite continuerons à prendre un sens axiologiquement congru.



---

# SOMMAIRE

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Généalogie</b>	<b>7</b>
<b>2 Introduction aux piles de sable Kadanoff</b>	<b>39</b>
<b>3 Plénitude des avalanches</b>	<b>65</b>
<b>4 Trace des avalanches</b>	<b>87</b>
<b>5 Dynamique interne des points fixes</b>	<b>111</b>
<b>6 Discussion</b>	<b>133</b>
<b>Table des figures</b>	<b>141</b>
<b>Index I - II</b>	<b>143</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>147</b>
<b>Bibliographie personnelle</b>	<b>153</b>
<b>Table des matières</b>	<b>155</b>
<b>Le Domsogène</b>	<b>159</b>



---

# INTRODUCTION

QUEL EST LE POINT COMMUN entre une colonie de fourmis, un cerveau, et Internet ? Ce sont tous des systèmes qui évoluent dans le temps, sont composés d'un grand nombre d'éléments identiques en interaction, et qui présentent des comportements collectifs qui semblent difficilement réductibles aux règles qui les régissent. Il est admis que ces règles sont locales : chaque élément modifie son comportement en fonction de quelques voisins, mais ne prend pas en compte l'état du système dans sa globalité. Comment alors expliquer l'incroyable *complexité* de ces systèmes regardés comme un tout, simplement à partir des règles décrivant les interactions au niveau local ? Nous ne savons pas déduire ces comportements à partir du mouvement de chaque fourmi, chaque neurone, chaque utilisateur d'un réseau, et ne connaissons pas même les règles qu'ils suivent avec certitude. De tels systèmes abondent dans la nature, à de nombreuses échelles. Les modèles de pile de sable sont une tentative pour capturer ces phénomènes d'*émergence* dans un cadre formel, et comprendre précisément dans quelle mesure il est possible de réduire des observations globales d'un système au comportement local de ses parties.

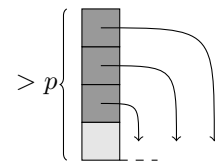
Ces questions ne sont pas nouvelles, mais l'augmentation des capacités de calcul a permis d'étudier des problèmes qui étaient jusque là hors de portée [Wea48]. Comprendre et démontrer des propriétés de régularité émergeant de la dynamique de systèmes discrets devient très vite un défi, et il existe de nombreuses questions ouvertes dans ce domaine. Prenons l'exemple défini en 1986 par Chris LANGTON, d'une *fourmi* posée sur un échiquier de taille infinie, dont les cases sont blanches ou noires [Lan86]. La fourmi suit alors la règle suivante : si la case est noire, alors la case devient blanche et la fourmi tourne d'un quart de tour sur la droite puis avance d'une case devant elle ; si la case est blanche, alors la case devient noire et la fourmi tourne d'un quart de tour sur la gauche puis avance d'une case devant elle. Il est conjecturé que pour

tout échiquier de départ comportant un nombre fini de cases noires, la fourmi atteint en un temps fini un comportement périodique qualifié d'*autoroute* (la fourmi avance alors dans une direction oblique avec une période de 104 itérations). Nous ne savons pas encore si cette conjecture est vraie ou fautive [GMGo2]. La suite de Collatz est au moins aussi surprenante, elle est définie pour un entier  $n$  par l'itération de la fonction suivante : si l'entier est pair, nous le divisons par 2 ; s'il est impair, nous le multiplions par 3 et ajoutons 1. Il a été conjecturé par Lothar COLLATZ dans les années 1930 qu'à partir de tout nombre strictement positif, cette suite atteint le chiffre 1. Voici par exemple la trajectoire du nombre 27 :

27-82-41-124-62-31-94-47-142-71-214-107-322-161-484-242-121-364-182-91-274-137-412-206-103-310-155-466-233-700-350-175-526-263-790-395-1186-593-1780-890-445-1336-668-334-167-502-251-754-377-1132-566-283-850-425-1276-638-319-958-479-1438-719-2158-1079-3238-1619-4858-2429-7288-3644-1822-911-2734-1367-4102-2051-6154-3077-9232-4616-2308-1154-577-1732-866-433-1300-650-325-976-488-244-122-61-184-92-46-23-70-35-106-53-160-80-40-20-10-5-16-8-4-2-1

Cette conjecture est elle aussi toujours ouverte, malgré le grand intérêt qu'elle suscite [Lago3 ; Lago6]. Nous pouvons citer également le problème du *rotor-router* défini en 2001 par James PROPP, à la dynamique proche des modèles de pile de sable, et dont une question à l'apparence simple sur le comportement asymptotique a été longtemps conjecturée [Levo4 ; LPo8].

Ce manuscrit présente l'étude d'un système dynamique discret —en espace et en temps— illustrant des grains cubiques se déplaçant de colonne parfaitement empilée en colonne parfaitement empilée. Le modèle de pile de sable Kadanoff décrit l'évolution en une dimension d'une pile constituée d'un nombre fini de grains empilés sur une seule colonne —tels qu'ils tomberaient d'un sablier— jusqu'à une position stable. Les grains se déplacent par petits groupes suivant l'application répétée d'une règle simple jusqu'à ce que la pile atteigne une configuration dans laquelle celle-ci ne peut plus être appliquée, que nous appellerons un *point fixe*. Pour un entier  $p \geq 1$  fixé, la règle est la suivante : si la différence de hauteur entre deux colonnes  $i$  et  $i+1$  est strictement supérieure à  $p$ , alors  $p$  grains s'éboulent de la colonne  $i$  vers les  $p$  colonnes  $i+1, i+2, \dots, i+p$ . Bien que la règle soit locale et élémentaire, il est difficile d'expliquer et de prédire le comportement de la pile de sable dans son ensemble. Nous nous intéresserons à la dynamique des grains de sable dans ce modèle où la règle est



les grains s'ébou-  
lent sur la *droite*.



appliquée séquentiellement, et plus particulièrement à une description de la forme des points fixes en fonction du nombre de grains initialement empilés, dans le but d'expliquer l'émergence de motifs à l'allure de vague périodiquement répétés sur les configurations stables. De façon intéressante, ces motifs réguliers ne couvrent pas entièrement les points fixes, mais émergent d'une partie à l'allure désordonnée.

Les piles de sable sont proches de la limite entre les phénomènes discrets et continus : de loin, le système évolue grossièrement de façon continue, vers une pile en forme de triangle ; mais de près, lorsque nous nous attachons à décrire exactement la forme d'une configuration, les effets de la dynamique discrète doivent être pris en compte. Si par exemple nous ajoutons un grain à une configuration stable, nous déclenchons une avalanche qui ne modifie grossièrement que la surface de la pile de sable, mais dont la taille est difficile à prédire car ce phénomène est très sensible au moindre changement sur la pile. La question que nous posons concerne l'étude à une échelle très fine (au grain près) de la forme asymptotique (lorsque le nombre de grains tend vers l'infini) des points fixes. Nous mêlerons ainsi de façon non triviale les modalités discrète et continue des piles de sable, et il en ressort une application —peut-être simplement distrayante— au *paradoxe sorite* : nous proposerons une distinction naturelle et précise pour décider si un amas de sable peut-être qualifié de *tas* ou non.

Le chapitre 1 présentera la Généalogie du modèle de pile de sable Kadanoff, à partir de l'idée d'*auto-organisation critique* dont ces modèles sont une instanciation. À partir du modèle original de tas de sable, dont les propriétés statistiques semblent avoir une portée de paradigme, jusqu'au premier modèle unidimensionnel étudié d'un point de vue combinatoire, nous présenterons en suivant la chronologie l'enchaînement des questions qui nous mènent à l'étude que nous présenterons dans les chapitres qui suivent. Nous distinguerons bien tous les modèles introduits, qui sont en partie assimilables dans le cas unidimensionnel mais comportent des différences importantes dans leur généralisation.

Nous en arriverons à la définition du modèle de pile de sable Kadanoff dans le chapitre 2, suivi de quelques remarques préliminaires et des résultats connus. Nous donnerons une première définition très naturelle à partir de la hauteur des grains empilés sur chaque colonne, puis en formulerons une seconde à partir de la pente entre deux colonnes adjacentes, qui s'avère plus commode à manipuler et qui définit bien le même modèle. Ce système dynamique comporte une structure de treillis et un unique point fixe, qui est l'objet principal auquel nous nous intéresserons, et pour lequel nous présenterons quelques exemples menant à la conjecture d'une forme générale comportant des motifs de vague répétés très régulièrement. Les résultats de  $\mathbf{P}$ -complétude du

problème de l'avalanche (prédiction de l'instabilité produite par l'ajout d'un grain de sable à une configuration) suggèrent une séquentialité irréductible de sa dynamique à partir de deux dimensions, le cas unidimensionnel que nous étudions restant ouvert.

La compréhension du phénomène d'avalanche est l'objet du chapitre 3, à travers l'étude d'une méthode inductive de calcul des points fixes. Plutôt que de partir d'un nombre fini  $N$  de grains empilés puis d'appliquer la règle locale jusqu'à stabilisation de la configuration, nous verrons qu'il est possible d'atteindre ce point fixe en ajoutant un à un les grains de sable. Chaque ajout déclenche une réaction en chaîne que nous définirons par le terme *avalanche*, et à la fin des  $N$  premières avalanches nous obtenons le même point fixe que par la méthode directe partant de  $N$  grains empilés ; les actions d'ajout d'un grain et de stabilisation sont ainsi commutatives. L'avantage de cette seconde procédure est qu'elle nous permet une étude inductive des points fixes, par les avalanches du modèle, dont nous verrons qu'elles sont très structurées. Ces développements mèneront à la description exhaustive de leur déroulement, à partir du moment où une certaine condition de plénitude est vérifiée. Nous proposerons enfin une étude de cette condition de plénitude pour le plus petit paramètre qui nous intéresse,  $p = 2$  (c'est-à-dire lorsque deux grains s'éboulent à chaque application de la règle), concluant qu'asymptotiquement elle n'est pas vérifiée sur une partie de taille relative nulle de chaque avalanche. Nous conjecturerons que c'est également le cas pour les autres valeurs de  $p$ , et poursuivrons cette étude dans le chapitre qui suit.

La condition de plénitude et la description d'une avalanche qui en résulte permettent d'établir une grande invariabilité des points fixes. Dans le chapitre 4, nous exploiterons cette invariabilité à travers une approche originale. Au lieu de considérer l'évolution temporelle sur les avalanches, c'est-à-dire la première avalanche, puis la seconde, puis la troisième... nous considérerons leur évolution spatiale. Il s'agira d'encoder dans un mot  $u$  la façon dont chaque grain est passé au dessus d'une certaine colonne  $i$  au cours des  $N$  premières avalanches, tel que la connaissance de  $u$  permette de reconstruire le point fixe pour les colonnes à la droite de  $i$ . Nous appellerons  $u$  la *trace* jusque  $N$  en  $i$ . Intuitivement, si nous pouvons reconstruire le point fixe sur la droite de  $i$ , alors nous pouvons déduire de  $u$  la trace  $u'$  jusque  $N$  en  $i+n$  pour tout  $n \geq 0$ . C'est ce que nous ferons, à travers la définition d'un transducteur à états finis (un automate fini déterministe qui produit un mot à chaque transition), tel que l'image de la trace jusque  $N$  en  $i$  soit la trace jusque  $N$  en  $i+p$ . Il sera alors possible d'étudier les itérations successives du transducteur, qui décrivent l'évolution spatiale des traces jusque  $N$  : en  $i$ , puis en  $i+p$ , puis en  $i+2p$ , puis en  $i+3p$ ,... et d'en déduire l'émergence de traces régulières, telles que la reconstitution du point fixe à partir d'une

trace  $i+np$  fasse apparaître les motifs de vague. Encore une fois, certains résultats seront restreints au paramètre  $p=2$ . Nous aurons alors une preuve complète de l'apparition des motifs de vague pour ce paramètre, et discuterons des difficultés à généraliser ces développements.

Le chapitre 5 présentera une nouvelle approche, à partir de la définition d'un système décrivant la *dynamique interne* des points fixes, c'est-à-dire tel que l'orbite d'un point choisi en fonction du nombre de grains  $N$  décrive le point fixe à  $N$  grains auquel nous nous intéressons. En partant de la colonne initiale d'indice 0, l'idée est que chaque itération nous permettra de donner la hauteur d'une nouvelle colonne. Le point obtenu après une itération nous donnera la hauteur à l'indice 1, après deux itérations à l'indice 2, après trois itérations à l'indice 3... Le reste du chapitre s'intéressera alors à manipuler ce système non-linéaire pour accorder ses composantes discrète et continue. Une transformation clé nous donnera une intuition sur le comportement de ce système, ce qui permettra de prouver que pour tout nombre de grains  $N$ , l'orbite converge très rapidement vers des points réguliers. Nous déduirons alors de la régularité de ces points, qui décrivent le point fixe à  $N$  grains, la régulière apparition des motifs de vague. Cette dernière étude permettra donc de démontrer notre conjecture sur la forme des points fixes pour tout paramètre  $p$  du modèle de pile de sable Kadanoff.

Nous terminerons dans le chapitre 6 avec une discussion du résultat et des techniques employées.

Au cours de nos discussions, nous emploierons le qualificatif *complexe* uniquement dans un sens intuitif tiré de son étymologie latine *con-* « avec » *plexus* « entrelacement » ; de même le mot *émergence* désignera l'idée informelle d'apparition d'un phénomène difficilement prévisible.



## GÉNÉALOGIE

1.1	Modèle de tas de sable Bak-Tang-Wiesenfeld BTW . . . . .	8
1.1.1	Nature et auto-organisation critique . . . . .	8
1.1.2	Définition . . . . .	9
1.1.3	BTW et criticalité . . . . .	11
1.1.4	BTW et auto-organisation . . . . .	12
1.2	Modèle de tas de sable abélien ASM . . . . .	12
1.2.1	Définition . . . . .	12
1.2.2	Groupe abélien . . . . .	15
1.3	Modèle de pile de sable SPM . . . . .	23
1.3.1	BTW unidimensionnel . . . . .	23
1.3.2	Définition . . . . .	26
1.3.3	Résultats . . . . .	28
1.3.4	Progéniture . . . . .	31
1.4	Chip Firing Game CFG . . . . .	34

CE CHAPITRE PRÉSENTE LA SUITE DE MODÈLES et de questions qui ont conduit à l'étude des pile de sable Kadanoff que nous proposons dans ce manuscrit. Les piles de sable sont capables d'exhiber des comportements très complexes et difficiles à appréhender, à partir de règles très simples décrivant localement le mouvement de particules. Historiquement, le modèle de tas de sable Bak-Tang-Wiesenfeld a été introduit dans le but de capturer le comportement de nombreux systèmes dynamiques non-linéaires, à travers la propriété d'*auto-organisation critique* (partie 1.1). Le comportement de ce modèle est très riche, et les premiers développements formels initiés par Deepak DHAR dans un cadre algébrique ont apporté des éléments de compréhension remarquables, tout comme de nouvelles questions fascinantes. Nous aborderons en particulier certaines configurations définies algébriquement de façon très

naturelle, et dont la structure surprenante n'a reçu que peu d'explications (partie 1.2). Nous en arriverons à exposer des modèles plus simples, saisissant des aspects de la *complexité* de leurs ancêtres, et pour lesquels nous présenterons des approches combinatoires (partie 1.3). Le modèle de pile de sable Kadanoff, que nous étudierons en détail par la suite, fait partie de cette descendance. Nous terminerons par l'exposé du Chip Firing Game, qui englobe dans un cadre très général cette généalogie (partie 1.4).

### 1.1 MODÈLE DE TAS DE SABLE BAK-TANG-WIESENFELD BTW

Dans cette partie, nous présentons le modèle de tas de sable Bak-Tang-Wiesenfeld (BTW), et discutons brièvement de l'auto-organisation critique (*Self-Organised Criticality*). Cette dernière fait référence à la tendance de certains systèmes de grande taille à se conduire, sans réglage précis d'un paramètre (auto-organisation), vers des états dont les instabilités sont décrites par des lois de puissance (criticalité). Ces états sont appelés *critiques* car ils ne possèdent aucune échelle caractéristique, dans le sens où ils se comportent de la même façon à toutes les échelles.

#### 1.1.1 Nature et auto-organisation critique

L'auto-organisation critique a une visée paradigmatique, pour l'explication d'une variété de phénomènes *complexes* observés dans la nature. Cette propriété, qui s'intéresse à la diffusion des instabilités dans les systèmes non-linéaires, est évidemment mentionnée pour l'étude des tas de sable, mais a également trouvé un écho dans de nombreux domaines, dont des travaux sur la structure fractale des montagnes et la fréquence des tremblements de terre [BC94], les fluctuations du marché [LS96], l'extinction des espèces [SBF+95], et en sciences politiques sur la propagation des actes collectifs de désobéissance civile [Bra12], pour ne citer que quelques exemples.

**NATURE** La nature regorge d'exemples de systèmes présentant des comportements collectifs *complexes*. Un effort important est mené pour l'identification et la compréhension des mécanismes sous-jacents à ces comportements, mais déjà dans le cas où les mêmes règles locales simples sont suivies par chaque unité, il est difficile de trouver des conditions générales permettant de prédire leur *complexité* spatio-temporelle. Entre le comportement évident d'entités indépendantes, pouvant être analysé en considérant chacune individuellement, et les systèmes parfaitement synchrones, il y a un large spectre de situations. Certains présentent par exemple des fractales à la fois dans leur structure spatiale et sur leur comportement dans le temps. Si les fractales font parti des formes

géométriques émergents de phénomènes naturels (l'univers est composé d'amas de galaxies, organisés en amas d'amas de galaxies, etc. . .), nous avons toujours besoin de comprendre leur origine dynamique, c'est-à-dire comment la nature les a créés.

**AUTO-ORGANISATION CRITIQUE** L'auto-organisation critique est un concept ayant pour but de décrire une classe de systèmes dynamiques qui évoluent vers un ensemble d'états dans lesquels des propriétés physiques apparaissent à toutes les échelles. Elle étudie les changements brutaux du comportement de systèmes composés d'un nombre important d'éléments en interaction dynamique, sans intervention extérieure et sans paramètre de contrôle. L'auto-organisation critique n'a cependant pas de définition formelle, elle est essentiellement identifiée par une description phénoménologique (à partir d'observations empiriques), et de nombreux points sont ainsi débattus. Aucun consensus ne l'emporte sur les propriétés définissant un système comme « *complexe* ». Dans ce manuscrit, nous présenterons quelques premières observations sur le modèle original de tas de sable, mais n'entrerons pas dans le détail de ces discussions.

### 1.1.2 Définition

Le modèle de tas de sable BTW capture des propriétés importantes de nombreux systèmes non-linéaires, dont une organisation spontanée vers des états quasi-stationnaires présentant de fortes invariances au passage à l'échelle. Il a été défini par Per BAK, Chao TANG et Kurt WIESENFELD en 1987 [BTW87].

Informellement, considérons une table sur laquelle nous ajoutons des grains de sable un à un. Après une période transiente, une pile se forme qui atteint les bords, de sorte que —statistiquement— autant de grains tomberont sur les bords qu'il n'en sera ajouté. Cet état est critique dans le sens où l'ajout d'un unique grain peut provoquer une avalanche de toute taille : une petite perturbation n'implique pas forcément de petits effets. Si la pente de la configuration est raide, une avalanche couvrant le système entier peut se produire ; si la pente est faible, seules de petites avalanches interviendront. Sans définir formellement ce terme, nous dirons que l'état ainsi atteint est globalement *métastable*, entre ces deux extrêmes. Expérimentalement, les instabilités semblent alors décrites par des lois de puissance.

**MODÈLE** Le modèle de tas de sable BTW est un automate cellulaire sur une grille de taille  $L$ ,  $\mathcal{S} = \llbracket 0 ; L - 1 \rrbracket^2$ , et une *configuration*, ou *état*, est une assignation d'une quantité de sable sur chaque cellule,  $z : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{N}$ , de sorte que  $z(i, j)$  désigne la *hauteur* de la cellule  $(i, j)$ . La règle d'itération

est alors la suivante : si la hauteur d'une cellule  $(i, j)$  est supérieure ou égale à la *valeur critique*  $z_c$ , alors cette cellule donne un grain à chacun de ses quatre voisins, nord, est, sud, ouest.

$$\text{Si } z(i, j) > z_c \text{ alors } \begin{cases} z(i, j) \rightarrow z(i, j) - 4 \\ z(i + 1, j) \rightarrow z(i + 1, j) + 1 \\ z(i - 1, j) \rightarrow z(i - 1, j) + 1 \\ z(i, j + 1) \rightarrow z(i, j + 1) + 1 \\ z(i, j - 1) \rightarrow z(i, j - 1) + 1 \end{cases}$$

La règle locale est appliquée en *parallèle* à chaque cellule, et nous dirons qu'une cellule *s'éboule* lorsqu'elle donne des grains à ses voisines. Sans perte de généralité, nous considérons  $z_c = 3$ , car prendre une autre valeur équivaut simplement à un changement d'origine pour les valeurs de  $z$ . Les grains sont perdus s'ils tombent sur les bords.

Une *cellule*, ou *site*, est *instable* si sa hauteur est strictement supérieure à  $z_c$ . Une configuration est *stable* si tous ses sites sont stables, et nous utiliserons le terme *stabiliser* pour désigner l'application répétée de la règle jusqu'à l'obtention d'une configuration stable. Tous les sites d'une configuration stable ont des hauteurs entre 0 et 3.

**HAUTEUR OU PENTE ?** Il est important de remarquer que la valeur  $z(i, j)$  est un mélange indissociable de hauteur et de différence de hauteur :

- c'est une hauteur en nombre de grains, mais des grains peuvent « sauter » d'une cellule à une cellule plus haute ;
- c'est une différence de hauteur, ou *pente*, qui indique quand une cellule est instable et s'éboule, mais il n'est pas consistant de considérer qu'une cellule donne des unités de différence de hauteur dans quatre directions.

**PROCESSUS STOCHASTIQUE** Le processus étudié est le suivant : à partir d'une configuration tirée aléatoirement, par exemple selon une distribution uniforme, nous ajoutons des grains un à un à des positions aléatoires, tout en stabilisant la configuration entre deux ajouts.

Remarquons que certains états ne peuvent apparaître qu'au début de ce processus, par exemple la configuration vide  $z : (i, j) \mapsto 0$ . Nous établissons ainsi une distinction entre des états *transients*, qui n'apparaissent plus à partir d'un certain temps, et des états *critiques*, qui forment un attracteur de la dynamique et qui sont ceux qui nous intéresseront dans un premier temps. Nous donnerons une définition précise de ces états dans la partie 1.2. La figure 1.1 présente un état critique typique.



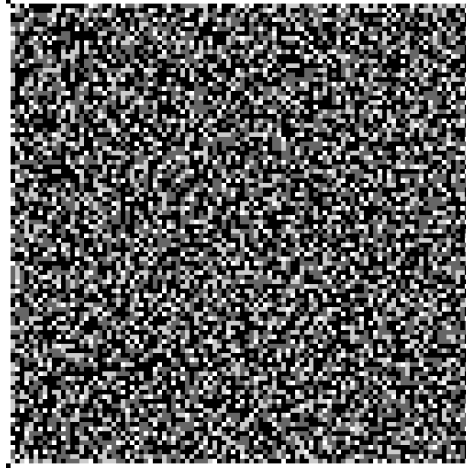


FIGURE 1.1 – Configuration critique du modèle BTW pour une grille de taille 100 par 100. Le code couleur va de **0-blanc** à **3-noir**, et nous remarquerons la couleur *poivre et sel*. Soulignons cependant qu’il existe un certain nombre de motifs interdits sur les configurations critiques, il est par exemple impossible d’avoir deux valeurs 0 sur des cellules voisines, car l’éboulement de l’une entraîne l’ajout d’un grain sur l’autre. Sur les  $4^{L^2}$  configurations stables, environ  $(3.2102\dots)^{L^2}$  sont critiques [Cre96].

### 1.1.3 BTW et criticalité

L’idée que tente de capturer la criticalité du modèle BTW est la suivante : les *avalanches* entraînées par les ajouts de grains peuvent être, et sont nécessairement de toutes tailles (l’amplification de petites fluctuations locales successives —ajout d’un grain— mène inéluctablement à une large avalanche qui couvrira toute la configuration), mais la taille de la prochaine avalanche dépend d’une somme de détails que nous ne pouvons prédire dans leur globalité.

Nous pouvons mesurer l’instabilité entraînée par l’ajout d’un grain au nombre de sites éboulés au cours de l’avalanche provoquée ; alors la distribution de probabilité des tailles des instabilités semble décrite par une loi de puissance. BTW présenterait ainsi des structures auto-similaires, à la fois spatialement (distribution identique si l’ajout est répété sur un seul site, quel qu’il soit) et temporellement (même comportement statistique à partir des temps  $t$  et  $t + \Delta t$ ), qui sont invariantes au passage à l’échelle (même comportement quel que soit la taille  $L$  de la grille considérée). Informellement, des liens entre les instabilités apparaissent sur des distances bien plus grandes que le rayon de la règle locale d’éboulement. En ce sens, ces états sont similaires aux *transitions de phase critiques* étudiées en thermophysique [Jen98].

Soulignons toutefois que les lois de puissance, qui présentent une invariance au passage à l'échelle, sont en elles-mêmes un sujet discuté, et que leur identification à partir des résultats de simulations n'est pas entièrement satisfaisant.

#### 1.1.4 BTW et auto-organisation

Traditionnellement en physique, les phénomènes « critiques » au sens de la partie précédente apparaissent dans des conditions exceptionnelles contrôlées par un paramètre tel que la température. Ce qui fait l'auto-organisation du modèle BTW n'est donc pas simplement la localité de la règle d'éboulement, mais surtout l'absence de paramètre à régler précisément pour obtenir le comportement critique. En ce sens, l'auto-organisation critique tente d'expliquer l'apparition de phénomènes *complexes* naturels, sans dessein.

Comme il a été remarqué par plusieurs auteurs, il est possible d'identifier le réglage d'un paramètre à la valeur 0, mais il est difficile de juger si ce réglage doit être qualifié de « non-naturel ». Avant chaque ajout d'un nouveau grain, nous attendons que la configuration soit stabilisée ; en ce sens, la fréquence d'ajout des grains tend donc vers 0 lorsque la taille de la grille  $L$  croît. Le paramètre de contrôle de la criticalité du système serait selon cet argument le taux d'ajout des grains.

## 1.2 MODÈLE DE TAS DE SABLE ABÉLIEN ASM

Dans une série de papiers, Deepak Dhar et ses co-auteurs ont montré que le modèle de tas de sable BTW possède de remarquables propriétés algébriques [DR89 ; Dh90 ; Dh06]. En particulier, l'ensemble des états critiques, dont nous allons donner une définition précise, est un groupe abélien. Ces propriétés sont valides pour une classe de systèmes dynamiques discrets qui étend le modèle BTW, connue sous le nom de modèle de tas de sable abélien, ASM (*Abelian Sandpile Model*<sup>1</sup>). Nous proposons dans cette partie un bref survole de ces résultats très élégants, qui apportent des éléments de compréhension sur la structure des modèles de tas de sable. Nous donnons une définition précise de ce modèle, pour éviter toute confusion de langage.

### 1.2.1 Définition

Le modèle de tas de sable abélien est défini sur un (multi-)graphe orienté  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  à  $n + 1$  sommets  $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n, s\}$ , comportant un sommet

1. le nom ASM est parfois employé en référence au modèle BTW. Nous l'utiliserons, comme nous pensons qu'il est naturel, pour désigner l'ensemble des modèles de tas de sable présentant une structure de groupe abélien.

puits  $s$  accessible depuis tout autre sommet.  $s$  est *accessible* depuis  $i$  signifie qu'il existe un chemin orienté de  $i$  à  $s$ . Nous utiliserons la notation  $\tilde{\mathcal{V}} = \mathcal{V} \setminus \{s\}$ , et nous appellerons *site* un sommet de  $\tilde{\mathcal{V}}$ . Une *configuration*, ou *état*, est une fonction  $\mathcal{C} : \tilde{\mathcal{V}} \rightarrow \mathbb{N}$ , qui attribue à chaque site  $i$  un entier  $\mathcal{C}(i)$ , également dénoté  $z_i$  par commodité, interprété comme le nombre de grains de sable ou la hauteur.

Pour la règle de transition, qui fait se déplacer des grains de sable le long des arcs, nous allons ignorer le sommet puits  $s$  qui sert uniquement à imager un réceptacle sans fond pour les grains perdus, dissipés au cours de la dynamique.

La matrice de Laplace  $\Delta$  de  $G$  est définie par

$$\Delta = \mathcal{M}_D - \mathcal{M}_A$$

où  $\mathcal{M}_D$  est la matrice diagonale des degrés sortants des sommets, et  $\mathcal{M}_A$  est la matrice d'adjacence de  $\mathcal{G}$  dont l'entrée  $ij$  est le poids de l'arc de  $i$  à  $j$  (égale à 0 s'il n'y a pas d'arc). La matrice de Laplace réduite de  $\mathcal{G}$ , dénotée  $\tilde{\Delta}$ , est la sous-matrice de  $\Delta$  obtenue après suppression de la ligne et de la colonne correspondant à  $s$ .

La dynamique du système est ainsi donnée par la matrice de Laplace réduite  $\tilde{\Delta}$  de taille  $n \times n$  du graphe  $\mathcal{G}$ , et par un ensemble de  $n$  entiers  $z_{i,c}$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Si pour un site  $i$ ,  $z_i \geq z_{i,c}$  alors  $i$  est *instable* et s'éboule. L'*éboulement* d'un site  $i$  entraîne la mise à jour de toutes les hauteurs  $z_j$  selon la règle :

$$\text{Si } z_i \geq z_{i,c} \text{ alors } z_j \rightarrow z_j - \tilde{\Delta}_{ij} \text{ pour tout } j.$$

Cette règle correspond pour un sommet à donner un grain selon chacun de ses arcs sortants. Une configuration  $z$  est *stable* si pour tout site  $i$ ,  $z_i < z_{i,c}$ .  $z_{i,c}$  est la hauteur à partir de laquelle le site  $i$  est instable ou *critique*. Sans perte de généralité, nous considérons pour tout  $i$ ,  $z_{i,c} = \tilde{\Delta}_{ii}$  le degré sortant de  $i$ , ce qui équivaut à un choix particulier d'origine pour la hauteur  $z_i$ . En effet, celle dernière varie toujours entre  $z_{i,c} - \tilde{\Delta}_{ii}$  et  $z_{i,c} - 1$  une fois la hauteur  $z_{i,c} - \tilde{\Delta}_{ii}$  atteinte. Ainsi, les valeurs possibles de  $z_i$  dans une configuration stable seront comprises entre 0 et  $\tilde{\Delta}_{ii} - 1$ . L'*état stable minimal*  $\mathcal{C}^*$ , dans lequel tous les sites  $i$  sont à la hauteur stable maximale  $z_{i,c} - 1$ , s'avèrera utile par la suite. Cet état est *minimal* au sens de la stabilité.

Par construction, la matrice  $\tilde{\Delta}$  satisfait les conditions suivantes, qui assurent que le modèle se comporte bien. Rappelons que  $\tilde{\Delta}_{ii}$  est le degré sortant du site  $i$ , et  $\tilde{\Delta}_{ij}$  le nombre d'arcs de  $i$  à  $j$ .

1.  $\tilde{\Delta}_{ii} > 0$  pour tout  $i$ .  
Dans le cas contraire les éboulements ne terminent jamais.
2. Pour toute paire  $i \neq j$ ,  $\tilde{\Delta}_{ij} \leq 0$ .  
Cette condition est requise pour la propriété de commutativité du groupe.

3.  $\sum_j \tilde{\Delta}_{ij} \geq 0$  pour tout  $i$ .  
Cette condition signifie que des grains de sable ne sont pas créés durant le processus d'éboulement.
4. Il existe au moins un site *dissipatif*  $i$  tel que  $\sum_j \tilde{\Delta}_{ij} > 0$ . Et de tout site  $j$ , il existe un chemin vers un site dissipatif.  
Cette condition assure que tous les éboulements terminent en un temps fini.

En outre, ces conditions sont équivalentes à l'existence d'un puits ignoré.

Nous appellerons *stabilisation* le processus d'éboulement d'une configuration jusqu'à l'obtention d'une configuration stable. D'après les conditions que vérifie  $\tilde{\Delta}$ , le processus de stabilisation termine, ce qui nous assurera que la loi de composition interne décrite par la suite sera bien définie. Montrons qu'il ne peut pas y avoir de suite infinie d'éboulements. Commençons par remarquer qu'une suite infinie d'éboulements comporte une infinité de cycles de taille finie, car le nombre de sites et la quantité de sable sont finies, et donc au moins un cycle est répété une infinité de fois. D'après la condition 3, la quantité de sable présente dans le système ne peut que diminuer, si un site dissipatif est éboulé. Ainsi, seulement un nombre fini de cycles peuvent comporter un site dissipatif, car ceux-ci font perdre au moins 1 grain. Ensuite, seulement un nombre fini de cycles peuvent comporter un site qui a pour voisin un site dissipatif, car le nombre de grains sur les sites dissipatifs augmentera et il n'y aura plus de grains dans les sites non-dissipatifs pour effectuer des éboulements. Par induction sur la distance vers un site dissipatif, aucun cycle ne peut être répété une infinité de fois, ainsi toute avalanche termine.

Nous donnons un exemple de  $\tilde{\Delta}$  pour le modèle de tas de sable BTW en deux dimensions,

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{ij} &= 4 && \text{si } i = j \\ \tilde{\Delta}_{ij} &= -1 && \text{si } i \text{ et } j \text{ sont voisins sur la grille} \\ \tilde{\Delta}_{ij} &= 0 && \text{sinon.} \end{aligned}$$

Ce qui donne pour une grille de taille 3 par 3, dont les sites sont étiquetés selon le schéma

1	2	3
4	5	6
7	8	9

la matrice  $\tilde{\Delta}$  suivante où la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne sont utilisées pour

le site  $i$ ,

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

### 1.2.2 Groupe abélien

L'ensemble des configurations critiques —au sens de l'auto-organisation critique— de chacun de ces systèmes a une structure de groupe abélien. Cet ensemble a plusieurs définitions équivalentes, comme par exemple l'ensemble des configurations atteintes infiniment souvent par l'ajout répété d'un grain à une position aléatoire. La loi de composition interne du groupe prend deux configurations, ajoute leur nombre de grains site à site, et stabilise la configuration obtenue. La structure de groupe implique l'existence d'un élément identité, dont la forme s'avèrera fascinante.

**ÉTATS RÉCURRENTS ET ACTION DU GROUPE** L'ensemble des *états récurrents*, également appelés *états critiques*, que nous dénoterons  $\mathcal{R}$ , contient les états stables qui peuvent être atteints depuis n'importe quel autre état par l'ajout d'un certain nombre de grains de sable suivi du processus de stabilisation. Il n'est pas vide, car il contient l'état stable minimal  $\mathcal{C}^*$ . Cet état peut en effet être atteint depuis n'importe quel état  $\mathcal{C}$  de hauteurs  $z_i$  une fois stabilisé, en ajoutant à chaque site  $i$  exactement  $z_{i,\mathcal{C}} - 1 - z_i$  grains. En dénotant  $g_i \mathcal{C}$  la configuration obtenue à partir de  $\mathcal{C}$  par l'ajout d'un grain au site  $i$  suivi du processus de stabilisation, il est alors possible de définir  $\mathcal{R}$  comme l'ensemble des configurations atteignables depuis  $\mathcal{C}^*$  par de telles opérations.

$$\mathcal{C} \in \mathcal{R} \iff \exists (p_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \text{ tels que } \mathcal{C} = \prod_i g_i^{p_i} \mathcal{C}^*.$$

Il existe des états stables non récurrents, que nous appellerons *transients*, par exemple la configuration où  $z_i = 0$  pour tous les sites  $i$ .

Ces configurations sont appelées *récurrentes* car ce sont celles qui apparaissent une infinité de fois lors de l'ajout répété d'un grain à une position aléatoire (selon une distribution telle que l'ajout d'un grain sur n'importe quel site  $i$  est un événement de probabilité strictement positive, ces configurations sont atteintes infiniment souvent avec probabilité

1). Elles sont ainsi les attracteurs de l'« auto-organisation » qui exhibent un comportement « critique » au sens des sections 1.1.3 et 1.1.4.

Définissons l'action du groupe. Soient deux configurations  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  de hauteurs  $(z_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$  et  $(z'_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ , nous définissons  $\mathcal{C} \oplus \mathcal{C}'$  comme étant la configuration obtenue par stabilisation de la configuration de hauteurs  $(z_i + z'_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ . L'opérateur  $\oplus$  prend ainsi deux configurations, ajoute site à site leurs hauteurs, et applique la règle d'éboulement jusqu'à obtenir une configuration stable.

L'ensemble des états récurrents  $\mathcal{R}$  peut, de façon équivalente, être défini par

$$\mathcal{C} \in \mathcal{R} \iff \begin{cases} \mathcal{C} \text{ est stable} \\ \text{et} \\ \forall \mathcal{C}', \exists \mathcal{C}'' \text{ telle que } \mathcal{C} = \mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'' . \end{cases}$$

Une configuration  $\mathcal{C}$  est donc récurrente si et seulement si elle est stable, et si depuis n'importe quelle configuration  $\mathcal{C}'$ , il est possible d'ajouter un certain nombre de grains de sable à chaque site (les grains de  $\mathcal{C}''$ ), tel que le processus de stabilisation mène à  $\mathcal{C}$ .

L'ensemble  $\mathcal{R}$ , muni de la loi de composition interne  $\oplus$ , forme un groupe abélien. Par définition, si  $\mathcal{C}$  ou  $\mathcal{C}'$  est récurrente, alors  $\mathcal{C} \oplus \mathcal{C}'$  l'est aussi, donc l'opération est bien close pour l'ensemble  $\mathcal{R}$ .

Le nombre d'états récurrents est  $|\mathcal{R}| = |\det \tilde{\Delta}|$ . Pour le modèle de tas de sable BTW en deux dimensions, Michael CREUTZ nous informe ainsi que pour une grille de  $n$  cellules, parmi les  $4^n$  états stables, le nombre d'états récurrents est environ  $(3.2102\dots)^n$  [Cre96]. En partant de n'importe quelle configuration et en ajoutant des grains de sable, le système « s'auto-organise » donc vers un sous-ensemble exponentiellement petit des états stables, formant un attracteur.

Ce groupe abélien fini est isomorphe à  $\mathbb{Z}^{\tilde{V}} / \tilde{\Delta} \mathbb{Z}^{\tilde{V}}$ , avec  $\mathbb{Z}^{\tilde{V}}$  l'ensemble des fonctions de  $\tilde{V}$  dans  $\mathbb{Z}$ , et  $\tilde{\Delta} \mathbb{Z}^{\tilde{V}}$  l'ensemble des  $\tilde{\Delta} v$  pour  $v \in \mathbb{Z}^{\tilde{V}}$ . Pour des preuves formelles des résultats présentés dans cette partie, nous nous référons à [Liu06].

**ÉLÉMENT IDENTITÉ** Nous terminerons par une discussion sur l'*élément identité* du groupe, dont les formes fascinantes et inexplicées sont une motivation pour l'étude des modèles de pile de sable [DM03].

Soit  $I$  cet élément, tel que  $I \oplus \mathcal{C} = \mathcal{C}$  pour tout  $\mathcal{C} \in \mathcal{R}$ . Il permet notamment de tester si un état est récurrent ou non : un état  $\mathcal{C}$  appartient à  $\mathcal{R}$  si et seulement si  $\mathcal{C} \oplus I = \mathcal{C}$ . En effet, par construction un état récurrent a cette propriété, et puisque  $\mathcal{C}$  est atteignable depuis  $I$  et  $I \in \mathcal{R}$  alors  $\mathcal{C}$  est récurrent.

Soulignons que l'élément identité est critique, donc il n'est pas uniforme de valeur 0. Il peut être construit en prenant un état récurrent, par exemple  $\mathcal{C}^*$  qui est clairement parmi les plus simples à calculer, et en

l'élevant à l'ordre du groupe :  $|\tilde{\Delta}| \otimes \mathcal{C}^* = I$ . Cependant, même pour de petites matrices  $|\tilde{\Delta}|$  est un très grand nombre. D'autres procédures plus efficaces pour calculer l'élément identité sont connues [BR02].

Les pages qui suivent présentent quelques figures d'éléments identité pour le modèle de tas de sable BTW (figures 1.2 et 1.3). Ces figures semblent posséder une très forte structure, mais sont très peu comprises ; leur explication est un objectif majeur des recherches sur les modèles de pile de sable. Leur présentation a pour but de souligner graphiquement qu'à partir d'une règle d'évolution locale très simple, il est possible de définir des objets étonnamment *complexes*. Pour terminer, et cela nous conduira à la partie suivante, nous pouvons observer des motifs très similaires à ceux observés sur les éléments identité, en considérant l'ajout répété d'un grain uniquement au centre d'une grille, en analogie avec un sablier. La figure 1.4 en propose une illustration.

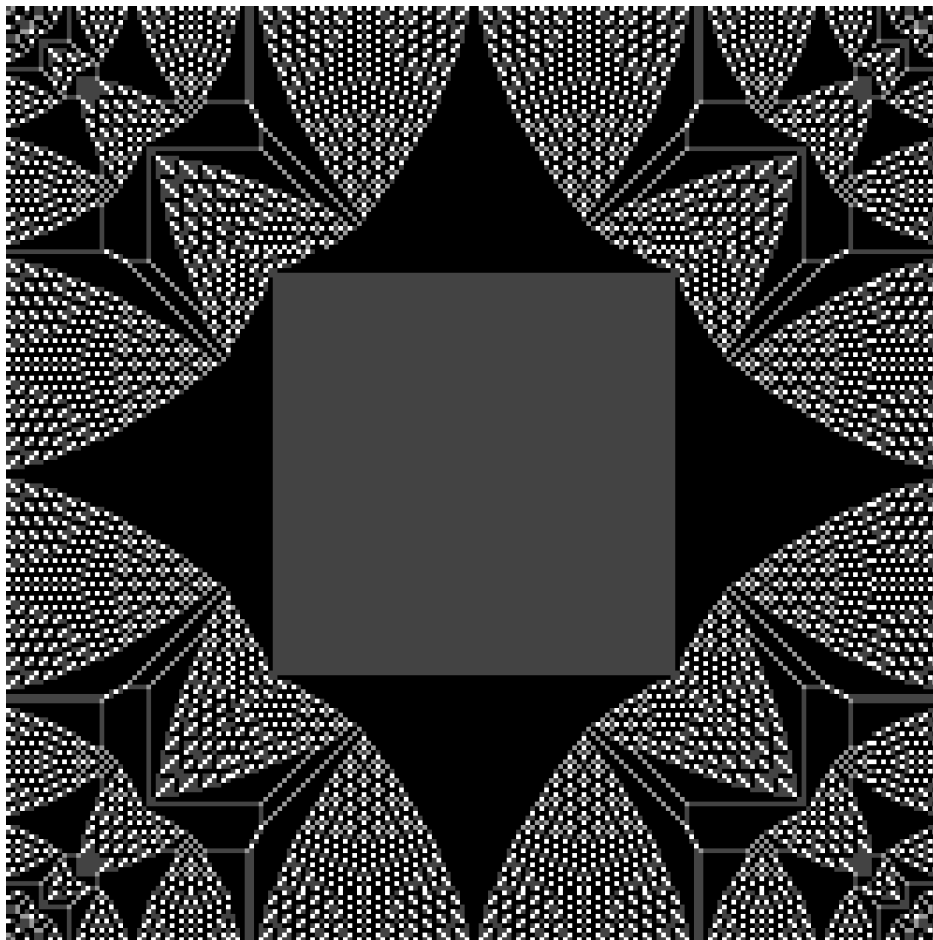


FIGURE 1.2 – Dans le modèle BTW, chaque cellule de la grille possède un nombre de grains. Si ce nombre est supérieure ou égale à 4 alors 1 grain va vers chacun de ses 4 voisins : nord, est, sud, ouest. Les grains qui tombent sur les bords sont perdus. L'élément identité  $I$  du groupe des configurations récurrentes  $(\mathcal{R}, \oplus)$  est tel que  $\forall C \in \mathcal{R}, C \oplus I = C$ . Ci-dessus, l'élément identité pour une grille de taille 200 par 200. Le code couleur va de **0-blanc** à **3-noir**. Deux observations très classiques sont : (1) l'intrigante zone carrée de hauteur 2 au centre de la configuration identité, (2) la multitude de pseudo-triangles de toutes tailles répartis de façon visiblement régulière en direction des angles, et très probablement des structures proches de fractales dont les motifs de remplissage varient, en de nombreux endroits.

Figures générées avec l'application de David PERKINSON.

<http://people.reed.edu/~davidp/sand/>



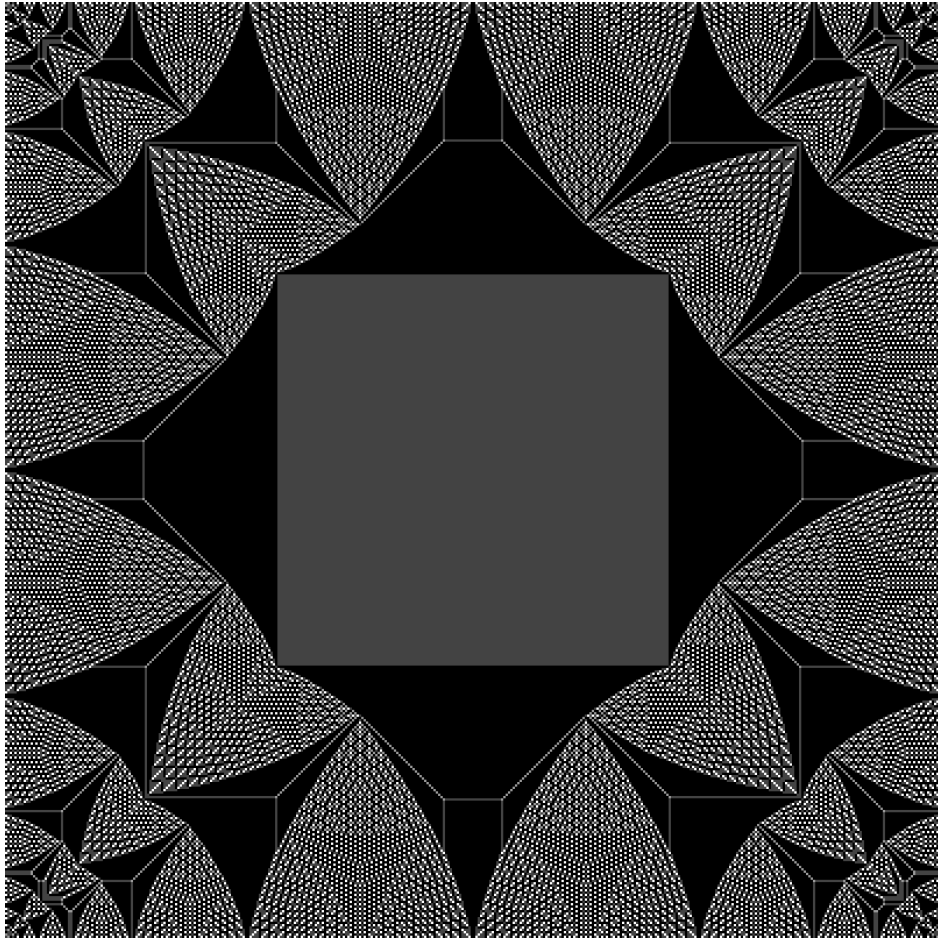


FIGURE 1.3 – L'élément identité pour le modèle BTW sur une grille de taille 400 par 400. Le code couleur va de **0-blanc** à **3-noir**. Une observation séduisante, qui n'a pas encore reçu d'explication formelle, est l'invariance au passage à l'échelle : cet élément identité ressemble fortement à l'élément identité pour la grille 200 par 200, et semble conserver les mêmes motifs et les mêmes proportions.

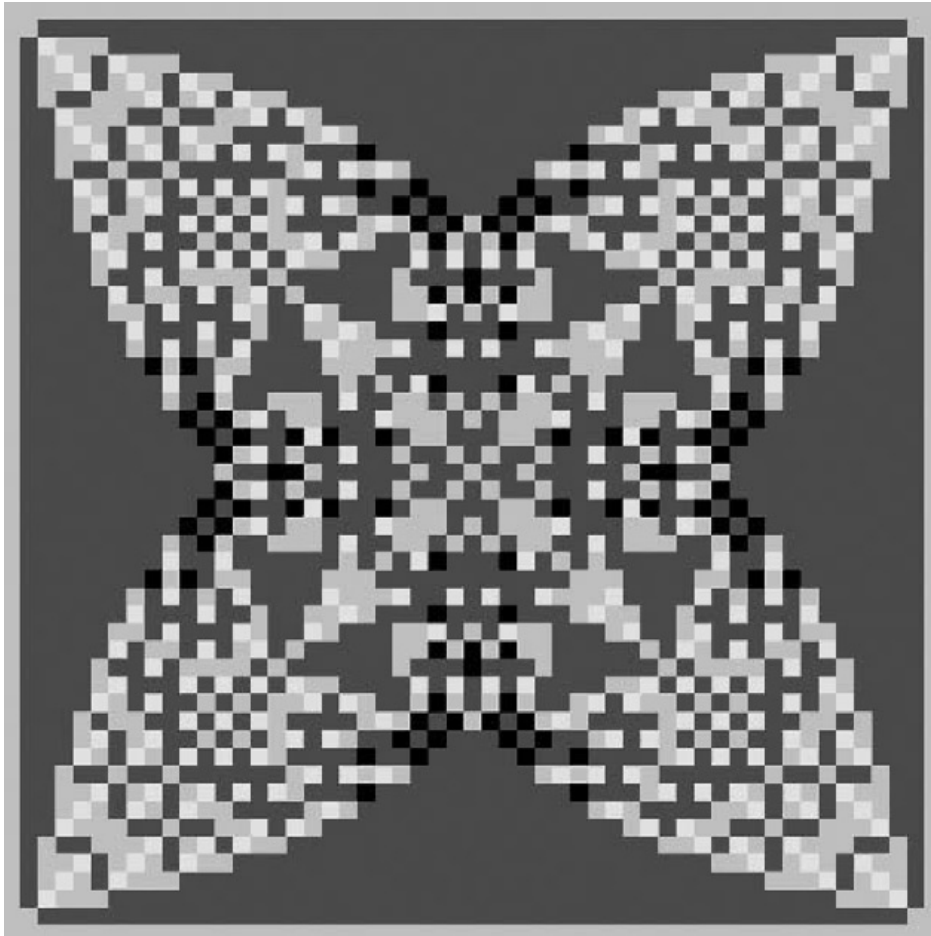


FIGURE 1.4 – PARTIE 1 – Région touchée par l'ajout de 1000 grains au centre d'une grille infinie sur fond de hauteur 2. Le code couleur va de **o-blanc** à **3-noir**. Cette série de figures est issue de [Ost03].

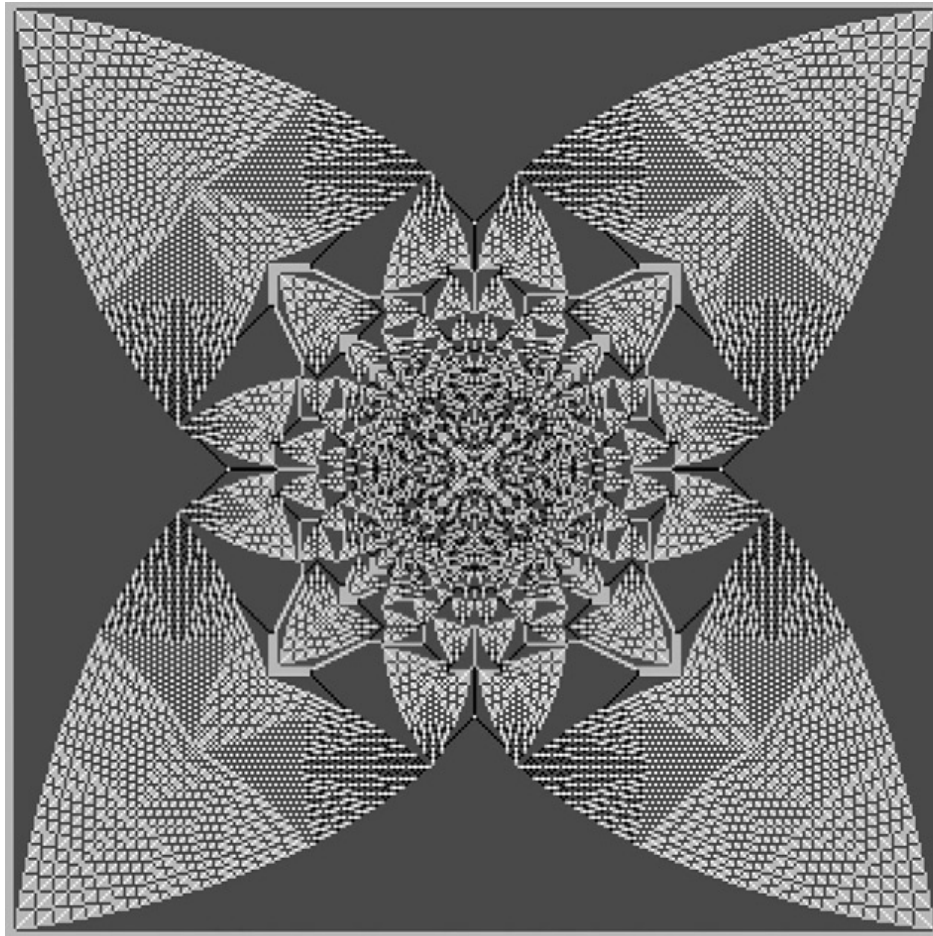


FIGURE 1.4 – PARTIE 2 – Région touchée par l'ajout de 40 000 grains au centre d'une grille infinie sur fond de hauteur 2. Le code couleur va de **0-blanc** à **3-noir**. Nous pouvons remarquer, comme sur la figure 1.3, une invariance à l'échelle.

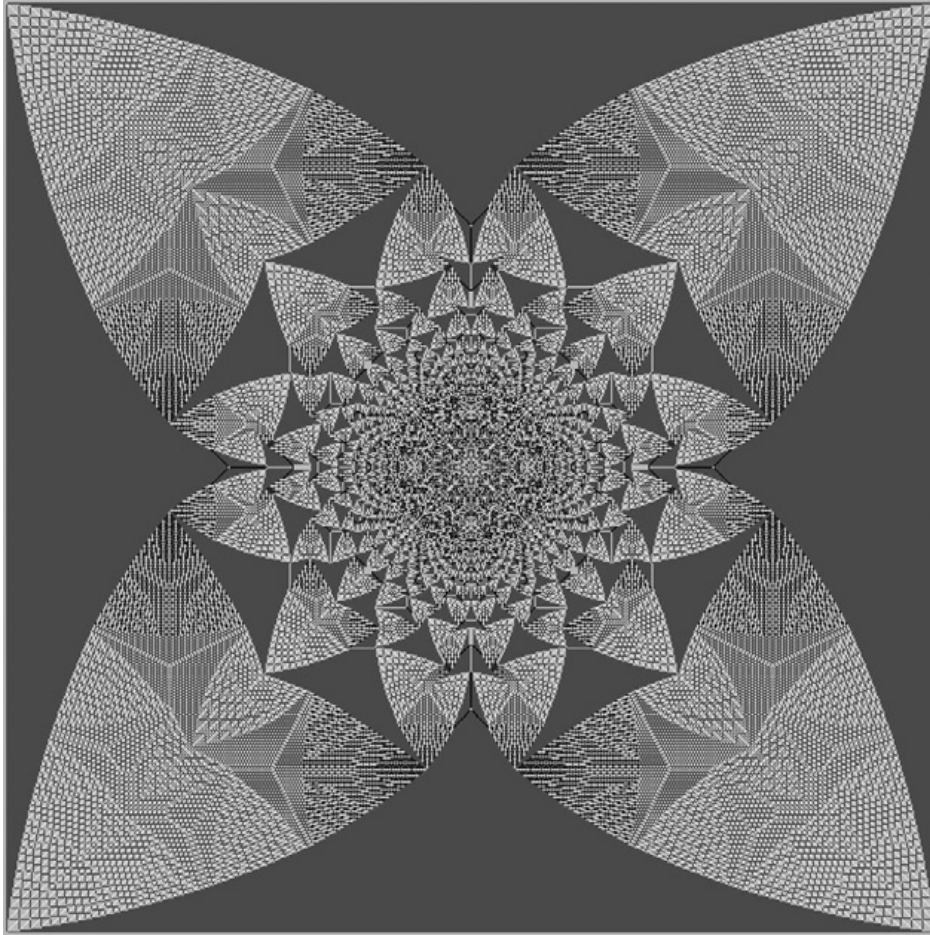


FIGURE 1.4 – PARTIE 3 – Région touchée par l'ajout de 150 000 grains au centre d'une grille infinie sur fond de hauteur 2. Le code couleur va de **o-blanc** à **3-noir**. En renormalisant les dimensions des figures obtenues par la stabilisation suivant l'ajout de  $N$  grains (par un facteur  $1/\sqrt{N}$  correspondant au diamètre de la région touchée), il apparaît une forme limite pour  $N \rightarrow \infty$ . La fonction limite  $f$  sur le cube unité  $[0, 1]^2$  semble localement constante pour un sous-ensemble ouvert et dense, et chaque région où  $f$  est constante correspond à une région sur laquelle la configuration du tas de sable est périodique [Ost03; DSC09; LP10].

## 1.3 MODÈLE DE PILE DE SABLE SPM

Comme nous l'avons vu dans les parties précédentes, le modèle de tas de sable BTW et sa généralisation le tas de sable abélien ASM possèdent une très forte structure, vraisemblablement en un certain sens auto-similaire et liée à des invariances. Cependant, la description combinatoire des motifs observés sur l'identité du groupe et sur les configurations du régime transient est difficile à aborder formellement. Une méthode usuelle permettant d'attaquer ces obstacles de formalisation est d'essayer de comprendre pleinement des versions simplifiées de ces modèles, dans le but de saisir des éléments de base et d'identifier d'où naissent les phénomènes inexplicables.

Il est possible de motiver l'étude du *modèle de pile de sable SPM* (*Sand Pile Model*) en ce sens, car il est identique à la variante unidimensionnelle du modèle de tas de sable BTW. Toutefois, ce n'en est pas l'unique origine. Ce modèle, étudié pour la première fois par Eric GOLES en 1992 [Gol92] puis par Eric GOLES et Marcos KIWI en 1993 [GK93a], s'intègre dans un corpus d'analyse de divers jeux combinatoires [Spe86 ; ALS+89 ; GK91 ; BG92]. Il est également lié aux travaux de Thomas BRYLAWSKI et à la génération des partitions d'un nombre entier [Bry73].

L'engouement pour ces modèles à la fois non-triviaux et à la combinatoire accessible, au sein desquels il est possible d'ajouter peu à peu des difficultés, n'a depuis pas diminué et de nombreuses variantes ont été considérées. La présente thèse en est elle-même une continuation.

## 1.3.1 Le modèle de tas de sable BTW unidimensionnel

Le modèle de tas de sable BTW en une dimension est un automate cellulaire sur un support fini constitué de  $L$  cellules,  $\mathcal{S} = \llbracket 0 ; L - 1 \rrbracket$ . Une configuration est une assignation pour chaque cellule  $i$  d'une quantité de grains  $z_i$ . La règle d'éboulement est la suivante : si une cellule a une hauteur strictement supérieure à 1, elle envoie un grain sur chacune de ses deux voisines  $i - 1$  et  $i + 1$ .

$$\text{Si } z_i > 1 \text{ alors } \begin{cases} z_i \rightarrow z_i - 2 \\ z_{i+1} \rightarrow z_{i+1} + 1 \\ z_{i-1} \rightarrow z_{i-1} + 1. \end{cases}$$

Les grains qui tombent en dehors du support  $\mathcal{S}$  sont perdus.

Nous remarquons alors que, contrairement au modèle bidimensionnel dans lequel la quantité présente dans chaque cellule est un mélange indissociable de hauteur et de pente (comme expliqué en partie 1.1.2), nous pouvons ici interpréter la quantité  $z_i$  comme une pente de façon consistante. Pour uniformiser nos représentations, lorsque les grains tom-

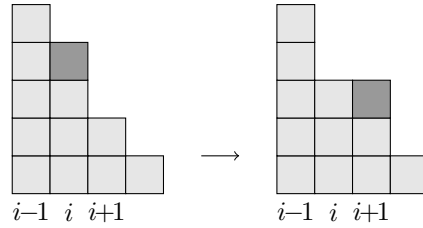
beront dans une seule direction, nous considérerons que cette direction est la droite. Re commençons.

Nous partons d'un support fini constitué de  $L$  cellules,  $\mathcal{S} = \llbracket 0 ; L - 1 \rrbracket$ . Une configuration est une assignation pour chaque cellule  $i$  d'une quantité de grains  $h_i$ , telle que la séquence  $(h_i)_{i \in \mathcal{S}}$  soit décroissante. c'est-à-dire pour tout  $i \in \mathcal{S} \setminus \{L - 1\}$ ,  $h_i - h_{i+1} \geq 0$ . Nous utiliserons également le terme *colonnes* pour désigner les cellules. Imaginons désormais la règle d'éboulement suivante : si la différence de hauteur entre une colonne  $i$  et la colonne qui est à sa droite  $i + 1$  est supérieure à 1, alors un grain tombe de la colonne  $i$  sur la colonne  $i + 1$ .

$$\text{Si } h_i - h_{i+1} > 1 \text{ alors } \begin{cases} h_i \rightarrow h_i - 1 \\ h_{i+1} \rightarrow h_{i+1} + 1. \end{cases}$$

Nous considérons que  $h_L = 0$ , et les grains qui tombent en dehors du support  $\mathcal{S}$  sont perdus.

Alors, en prenant  $z_i = h_i - h_{i+1}$  la différence de hauteur entre deux colonnes, ces deux systèmes sont identiques. Voici une illustration de la règle d'éboulement, dans laquelle un grain tombe de la colonne  $i$  à la colonne  $i + 1$  :



$$\begin{cases} h_i \rightarrow h_i - 1 \\ h_{i+1} \rightarrow h_{i+1} + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} z_i \rightarrow z_i - 2 \\ z_{i+1} \rightarrow z_{i+1} + 1 \\ z_{i-1} \rightarrow z_{i-1} + 1. \end{cases}$$

Une différence reste à noter concernant l'ajout d'un grain à la cellule  $i$  du système, qui, pour rester fidèle au modèle de tas de sable BTW, doit correspondre à l'ajout d'une unité de différence de hauteur à l'indice  $i$ , c'est-à-dire l'ajout d'un grain sur chacune des colonnes précédant  $i$  :

$$z_i \rightarrow z_i + 1 \iff h_j \rightarrow h_j + 1 \text{ pour } j \leq i \quad (1.1)$$

mais qu'il est désormais beaucoup plus naturel de définir par

$$h_i \rightarrow h_i + 1 \iff \begin{cases} z_i \rightarrow z_i + 1 \\ z_{i-1} \rightarrow z_{i-1} - 1. \end{cases} \quad (1.2)$$

Rien ne change fondamentalement entre ces deux choix. À partir d'une configuration *stable*, c'est-à-dire telle que  $h_i - h_{i+1} \leq 1$  pour tout  $i \in \mathcal{S} \setminus \{L-1\}$ , nous ajoutons un grain selon la formule (1.2) à une colonne  $i$ . La réaction en chaîne entraînée, que nous appellerons *avalanche*, va simplement de la gauche vers la droite : l'ajout à la colonne  $i$  peut entraîner l'éboulement de la colonne  $i$  ; si la colonne  $i$  s'éboule alors elle peut entraîner l'éboulement de la colonne  $i+1$  ; si la colonne  $i+1$  s'éboule alors elle peut entraîner l'éboulement de la colonne  $i+2$  ; etc, mais aucun autre éboulement ne peut intervenir car la configuration de départ est stable. Une fois la configuration stabilisée, nous ajoutons à nouveau un grain selon la formule (1.2) sur une nouvelle colonne  $i$ , et ainsi de suite. À chaque ajout, soit le grain reste dans le système s'il rencontre un  $z_j = 0$  dans son trajet de  $i$  à  $i+1$  à  $i+2$  etc, soit il en sort. Ainsi après une certaine période transitoire, le système atteint un attracteur tel que  $z_i = 1$  pour tout  $i \in \mathcal{S}$ , qui est un point fixe pour l'opération d'ajout de grain. Ce raisonnement s'applique aussi bien pour l'ajout selon la formule (1.1), bien que cette dernière semble nécessiter quelques arguments supplémentaires sans intérêt apparent.

Le modèle de pile de sable SPM suit cette idée de représenter de « vrais » grains de sable, tout en se démarquant du modèle de tas de sable BTW unidimensionnel par deux aspects.

1. Un support infini.
2. L'étude plus prononcée de la dynamique entraînée par l'ajout de grains uniquement sur la colonne 0.

Malgré l'absence de bords, les configurations considérées restent finies, c'est-à-dire qu'elles contiennent un nombre fini de grains. La considération d'un support infini ne change pas fondamentalement le modèle, car cette variante peut être pensée comme si la dynamique se déroulait sur un support de taille suffisamment grande pour qu'aucun grain ne tombe jamais du support. En conséquence, nous ne nous intéresseront plus à la notion d'attracteur critique, qui apparaissait après qu'un nombre suffisant de grains ait été ajoutés au système et se soient « auto-organisés » vers celui-ci. Dans le modèle SPM, nous étudions le comportement transien précédent l'arrivée dans l'ensemble des états critiques du modèle BTW. Les bords sont nécessaires pour obtenir la structure de groupe abélien du modèle de tas de sable, et l'existence d'un élément identité, mais ils ne semblent pas nécessaires pour exhiber les structures fascinantes décrites sur les figures 1.2 et 1.3. En effet, comme présenté sur la figure 1.4, un support infini combiné à l'ajout de grains en un unique site exhibe de telles structures. Pour terminer, l'ajout de grains s'effectue en colonne 0 qui n'est pas *centrale*, mais dans ce modèle unidimensionnel sans bords, la notion de *centre* a disparu. Nous verrons dans la partie 1.3.4 des modèles symétriques, tels que les grains peuvent s'ébouler

dans deux directions opposées, qui comportent un *centre* sur lesquels les grains sont ajoutés. Cette physionomie non plus ne change pas fondamentalement le comportement du système.

En somme, bien que les modèles BTW et SPM soient identiques en une dimension, ils présentent des différences conceptuelles. Ces différences sont mises en avant par la tentative de généralisation de SPM à deux dimensions, qui n'est pas identique au modèle BTW en deux-dimensions (partie 1.3.4). La différence se situe essentiellement dans le fait que le modèle SPM est très attaché à la notion de loi d'éboulement suivant la gravité, alors que le modèle BTW en deux dimensions permet à des grains de « sauter » sur une voisine plus haute. Pour cette raison, nous présenterons SPM unidimensionnel comme un nouveau modèle.

### 1.3.2 Définition

Une *configuration* du modèle de pile de sable SPM est une partition ordonnée d'un entier naturel  $N$ , c'est-à-dire un élément de l'ensemble

$$\mathcal{S}_N = \left\{ h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : h_i \geq h_{i+1} \text{ et } \sum_{i \in \mathbb{N}} h_i = N \right\}.$$

Etant donnée une configuration  $h \in \mathcal{S}_N$ , le nombre  $h_i$  représente le nombre de grains empilés sur la *colonne*  $i$ . La dynamique est définie par la règle suivante.

$$\text{Règle verticale : si } h_i - h_{i+1} > 1, \text{ alors } \begin{cases} h_i \rightarrow h_i - 1 \\ h_{i+1} \rightarrow h_{i+1} + 1 \end{cases}$$

Nous noterons  $f_i(h)$  la configuration obtenue à partir de la configuration  $h$  en appliquant la règle à l'indice  $i$ . Cette règle, illustrée sur la figure 1.5, est locale dans le sens où son application à la colonne  $i$  ne dépend, et n'a d'influence, que sur des hauteurs à distance au plus 1 de  $i$  :  $h_i$  et  $h_{i+1}$ .



FIGURE 1.5 – Règle d'itération verticale du modèle de pile de sable SPM. Si la différence de hauteur entre les colonnes  $i$  et  $i + 1$  est strictement supérieure à 1, alors un grain s'éboule de la colonne  $i$  à la colonne  $i + 1$ .

La dynamique globale  $F$  de ce modèle est définie par l'application séquentielle de la règle verticale :

$$\begin{aligned} F : \mathcal{S}_N &\rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{S}_N) \\ h &\mapsto \{f_i(h) : i \in \{j : h_j - h_{j+1} > 1\}\} \end{aligned}$$



où  $\mathcal{P}(\mathcal{S}_N)$  est l'ensemble des parties de  $\mathcal{S}_N$ .

Nous pouvons constater quelques propriétés immédiates sur le système dynamique discret ainsi défini. Tout d'abord, il est *non-déterministe*, car la fonction globale de transition  $F$  applique la règle verticale à une unique colonne. Si pour une configuration  $h$  nous avons plusieurs indices auxquels la règle peut s'appliquer,  $|\{j : h_j - h_{j+1} > 1\}| \geq 2$ , alors pour chaque  $i \in \{j : h_j - h_{j+1} > 1\}$  la configuration  $f_i(h)$  obtenue est différente. Ensuite, il est *autonome du premier ordre* : l'image obtenue par application de la règle d'itération ne dépend que de la configuration à l'étape précédente (premier ordre), et cette règle est toujours la même au cours de la dynamique (autonome).

À partir d'une certaine configuration, toutes les configurations de l'ensemble  $\mathcal{S}_N$  ne sont pas atteignables, mais la règle de transition est close pour cet ensemble. La configuration  $h'$  est un *successeur* de  $h$ , ce que nous noterons  $h \rightarrow h'$ , si et seulement si  $h' \in F(h)$ . Nous préciserons  $h \xrightarrow{i} h'$  lorsque  $h' = f_i(h)$ , et  $\xrightarrow{*}$  est la clôture réflexive et transitive de  $\rightarrow$ . Nous dirons qu'une configuration  $h'$  est *atteignable* depuis  $h$  si et seulement si  $h \xrightarrow{*} h'$ , et nous noterons  $SPM(h)$  l'ensemble des configurations atteignables depuis  $h$ . Nous verrons en particulier un résultat sur la structure de l'ensemble des configurations atteignables depuis la configuration initiale constituée de  $N$  grains empilés en colonne 0 ( $h_0 = N$ ), et aucun grain sur les autres colonnes ( $h_i = 0$  pour  $i > 0$ ). Cette configuration initiale est  $(N, 0^\omega)$ , où  $0^\omega$  dénote une infinité de 0, et lorsque le contexte sera clair nous la dénoterons simplement  $N$  par commodité. Nous nous intéresserons donc à l'ensemble  $SPM(N)$ . L'exemple de  $SPM(8)$  est présenté en figure 1.6.

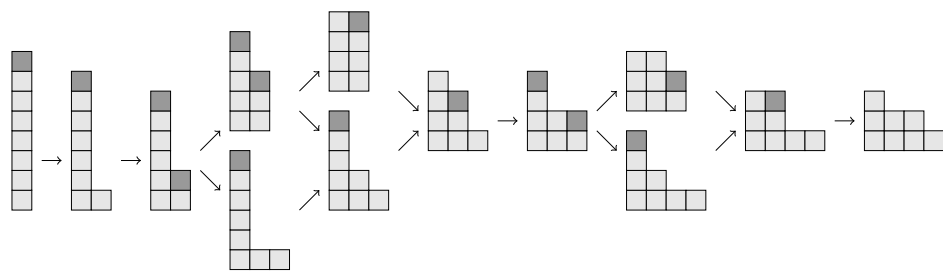


FIGURE 1.6 – Illustration de  $SPM(8)$ , qui représente les transitions possibles du modèle de pile de sable SPM à partir de la configuration initiale composée de 8 grains empilés en colonne 0. Sur chaque configuration, les grains susceptibles de s'effondrer sont grisés, et les flèches représentent les relations de succession.

### 1.3.3 Résultats

Les principaux résultats sur le modèle de pile de sable SPM concernent d'abord la structure de l'ensemble des configurations atteignables à partir d'un nombre fini de grains empilés, qui, muni de la relation successeur, est un treillis ; puis la caractérisation des éléments de cet ensemble et de son unique point fixe ; et enfin le temps de convergence vers cette configuration stable. Nous discuterons brièvement de la façon dont ces résultats sont obtenus.

Le choix de s'intéresser plus particulièrement à la configuration initiale composée d'un nombre fini  $N$  de grains empilés est motivé par deux aspects supplémentaires. Un premier, historique, concerne la génération de partitions de l'entier  $N$  par l'application de la règle. Un second, physique, vient de l'analogie avec un sablier, dans lequel les grains tombent tous sur la même colonne. Nous reviendrons sur cette analogie dans le chapitre 3.

Un *plateau* est un ensemble d'au moins deux colonnes consécutives et de même hauteur. La taille d'un plateau est le nombre de colonnes qui le constituent. Une *falaise* est un ensemble de deux colonnes dont la différence de hauteur est supérieure ou égale à 2, et la position d'un plateau ou d'une falaise est celle de sa colonne la plus à gauche.

**Théorème 1.1.** [Gol92 ; GK93a] Pour tout entier naturel  $N$ , soient  $k$  et  $k'$  les deux uniques entiers tels que  $0 \leq k' \leq k$ , et

$$N = \frac{1}{2} k(k+1) + k'.$$

L'ensemble  $SPM(N)$  muni de la relation successeur est un treillis. Son unique point fixe est la configuration

$$\pi(N) = (k, k-1, \dots, k'+1, k', k', k'-1, \dots, 1, 0^\omega),$$

et le nombre d'étapes nécessaires pour atteindre  $\pi(N)$  depuis  $(N, 0^\omega)$  est exactement

$$\binom{k+1}{3} + k k' - \binom{k'}{2}$$

soit un ordre de grandeur en  $\Theta(N^{\frac{3}{2}})$ .

De plus, pour une configuration  $h \in \mathcal{S}_N$ ,  $h \in SPM(N)$  si et seulement si elle vérifie les deux conditions :

- $h$  ne contient pas de plateau de taille strictement supérieure à 2 ;
- deux plateaux de  $h$  sont séparés par au moins une falaise.

Pour montrer que l'ensemble ordonné  $(SPM(N), \rightarrow)$  est un treillis, nous pouvons considérer le modèle de pile de glaçon IPM (Ice Pile Model),

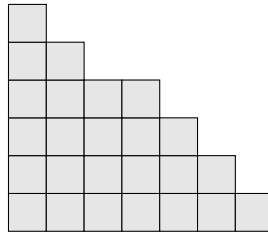


FIGURE 1.7 – Point fixe du modèle SPM pour  $N = 25$  grains.  
 $25 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 + 4$ , et  $\pi(25) = (6, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 0^\omega)$ .

qui est similaire au modèle de pile de sable SPM auquel nous ajoutons la règle suivante :

$$\begin{aligned} \text{R\`egle horizontale : si } h_i - 1 = h_{i+1} = \dots = h_{i+k} = h_{i+k+1} + 1, \\ \text{alors } \begin{cases} h_i \rightarrow h_i - 1 \\ h_{i+k+1} \rightarrow h_{i+k+1} + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Cette règle est illustrée sur la figure 1.8. À partir de toute configuration qui est une suite décroissante de colonnes, nous remarquons immédiatement que le l'unique point fixe vers lequel ce modèle converge est la configuration  $(1, 1, \dots, 1, 0^\omega)$ .

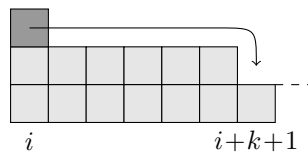


FIGURE 1.8 – Règle d'itération horizontale du modèle de pile de glaçon IPM. Un grain peut glisser de la position  $i$  à la position  $i + k + 1$  si les colonnes  $i + 1$  à  $i + k$  sont à la même hauteur, si la colonne  $i$  est une unité plus haute, et si la colonne  $i + k + 1$  est une unité plus basse. Soulignons que cette règle n'est plus locale.

Thomas BRYLASWIKI a défini en 1973 l'ensemble  $IPM(N)$  (cet ensemble est souvent dénoté  $\mathcal{L}_B$  en référence à son auteur), qui consiste en l'ensemble des partitions de  $N$  obtenues en appliquant les règles verticale et horizontale à partir de la configuration initiale  $N$  [Bry73]. Il se trouve que  $IPM(N)$  est l'ensemble des partitions décroissantes de  $N$ ,

$$IPM(N) = \mathcal{S}_N = \left\{ h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : h_i \geq h_{i+1} \text{ et } \sum_{i \in \mathbb{N}} h_i = N \right\}.$$

Muni de l'ordre de dominance  $\geq_D$  défini par

$$h \geq_D h' \iff \text{pour tout } i \geq 0 : \sum_{j=0}^i h_j \geq \sum_{j=0}^i h'_j,$$

$(IPM(N), \geq_D)$  est un treillis, et pour deux configurations comportant le même nombre de grains,  $h \geq_D h'$  si et seulement si  $h'$  peut être obtenue à partir de  $h$  par une suite d'applications des règles verticale et horizontale. Eric GOLES et Markos KIWÍ ont alors prouvé que  $(SPM(N), \rightarrow)$  est un sous-ordre de  $(IPM(N), \leq_D)$  qui est également un treillis (pour une vue d'ensemble des propriétés de treillis sur les modèles de pile de sable, nous nous référerons à [GLM+04; Pha99]). En conséquence,  $SPM(N)$  possède un unique point fixe.

L'unicité du point fixe peut également être démontrée en utilisant la *propriété du diamant* : si une configuration  $h$  a pour successeurs deux configurations  $h'$  et  $h''$ , alors il existe une configuration  $h'''$  successeur commun de  $h'$  et  $h''$ .

$$\begin{aligned} \text{Propriété du diamant : } & \text{si } h \rightarrow h' \text{ et } h \rightarrow h'' \\ & \text{alors } \exists h''' : h' \rightarrow h''' \text{ et } h'' \rightarrow h''' \end{aligned}$$

Le modèle de pile de sable SPM possède cette propriété, car l'application de la règle à un indice n'empêche pas l'application de la règle à un autre indice, et l'ordre dans lequel la règle est appliquée à deux indices différents ne change pas la configuration atteinte. Nous montrons ensuite que les suites d'itérations terminent pour toute configuration initiale finie, grâce à la fonction d'énergie

$$\begin{aligned} E : \mathcal{S}_N & \rightarrow \mathbb{N} \\ h & \mapsto E(h) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j=0}^{h_i} j \end{aligned}$$

qui est positive, entière, et diminue strictement à chaque application de la règle (chaque grain compte pour sa propre hauteur dans la somme). Il n'y a pas de suite infinie décroissante d'entiers naturels, donc il n'y a pas de suite de configurations —reliées par la relation successeur— infinie dans le modèle de pile de sable SPM. La propriété du diamant et la terminaison impliquent la convergence et donc l'unicité du point fixe, par induction sur la longueur de la dérivation (voir la Proposition 2.3).

Nous mentionnerons également des travaux proposant une définition élégante et une étude de la structure de  $SPM(\infty)$  et  $IPM(\infty)$  [LMM+98; LP09; GMP02a].

La forme du point fixe est déduite de la caractérisation de l'ensemble  $SPM(N)$  : un point fixe ne contient aucune falaise, donc il contient au

plus un plateau. L'unique configuration stable contenant au plus un plateau est bien  $\pi(N)$ .

Pour montrer qu'il est impossible d'obtenir un plateau de taille supérieure à 2, nous pouvons procéder par l'absurde : il existe une première configuration dans laquelle apparaît un plateau de taille supérieure à 2, mais il est impossible de trouver un indice qui soit le dernier sur lequel la règle ait été appliquée.

Le calcul du temps de convergence suit également une technique classique dans l'étude des systèmes dynamiques discrets, qui passe à nouveau par la définition d'une fonction d'énergie.

$$\begin{aligned} E' : \mathcal{S}_N &\rightarrow \mathbb{N} \\ h &\mapsto E'(h) = \sum_{i \in \mathbb{N}} i h_i \end{aligned}$$

Cette énergie augmente d'exactly une unité à chaque application de la règle,

$$h \rightarrow h' \Rightarrow E'(h') = E'(h) + 1.$$

Pour connaître le nombre d'itérations séparant la configuration initiale de la configuration finale, il suffit donc de calculer la différence de leur énergie

$$E'(\pi(N)) - E'(N) \in \Theta(N^{\frac{3}{2}}).$$

#### 1.3.4 Progéniture

Le modèle de pile de sable SPM a engendré une belle descendance, dont nous proposons ici une sélection. Il s'est agit d'introduire petit à petit un certain nombre de variations dans la définition du modèle, parmi lesquelles :

- l'application de la règle de façon *séquentielle* ou *parallèle* ;
- l'ajout d'une règle *symétrique* permettant aux grain de tomber sur la gauche ;
- l'extension du modèle à *deux dimensions*, voir plus.

Notons que ces variations sont indépendantes.

**SPM PARALLÈLE** Dans PSPM (*Parallel Sand Pile Model*), la règle verticale est appliquée à toutes les colonnes possibles en parallèle. Il est plus commode d'utiliser la représentation sous forme de différences de hauteur  $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$  telle que  $z_i = h_i - h_{i+1}$  pour tout  $i$ , qui a l'avantage d'être uniforme dans le sens elle ne dépend pas de la hauteur absolue de la colonne  $i$ , mais uniquement de sa hauteur relative.

Nous nous inspirons des automates cellulaires pour définir la règle de transition globale  $F$  comme l'application simultanée à toutes les co-

lonnes de la règle locale  $f$  suivante,

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^3 & \rightarrow & \mathbb{N} \\ (z_{i-1}, z_i, z_{i+1}) & \mapsto & z_i + \delta(z_{i-1}) - 2\delta(z_i) + \delta(z_{i+1}) \end{array}$$

avec  $\delta(x) = 1$  si  $x > 1$  et 0 sinon, et la convention  $z_{-1} = 0$ . D'où

$$F : \mathcal{S}_N \rightarrow \mathcal{S}_N \\ z \mapsto F(z) \text{ telle que } F(z)_i = f(z_{i-1}, z_i, z_{i+1}) \text{ pour tout } i.$$

Ce modèle est déterministe, et l'ensemble des configurations atteignables depuis la configuration initiale  $(N, 0^\omega)$  est un sous ensemble des configurations atteignables dans le modèle SPM :  $PSPM(N) \subseteq SPM(N)$ . Le modèle séquentiel peut *simuler* le modèle parallèle, donc le modèle parallèle converge lui aussi (car il n'est pas possible de simuler un comportement périodique), et leurs points fixes sont identiques (car c'est l'unique configuration stable). Une très belle analyse combinatoire de la dynamique de ce modèle à été proposée par Jérôme Durand-Lose en 1998. Elle utilise un découpage de la configuration, à chaque étape de temps, en zones de motif uniforme, séparées par des signaux qui se déplacent au cours des itérations et rebondissent les uns contre les autres suivant certaines règles de collision.

**Théorème 1.2.** [DL98] Dans PSPM, le nombre d'étapes nécessaires pour atteindre  $\pi(N)$  depuis  $(N, 0^\omega)$  est en  $\Theta(N)$ .

Cette accélération du processus de stabilisation, comparé au temps  $\Theta(N^{\frac{3}{2}})$  du modèle séquentiel, correspond bien à l'idée de parallélisation, car ce mode fait gagner un temps de l'ordre du support de la configuration,  $\sqrt{N}$ .

**SPM SYMÉTRIQUE** Le modèle de pile de sable SSPM (*Symmetric Sand Pile Model*) considère l'application séquentielle des deux règles d'itération présentées sur la figure 1.9.

Ce modèle est toujours non déterministe, et n'a plus de structure de treillis, car plusieurs points fixes distincts (par la forme ou par la position par rapport à l'origine) peuvent être atteints.

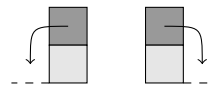


FIGURE 1.9 – Règles d'itération verticales du modèle SSPM.

**Théorème 1.3.** [Phao8; FMP07] Le modèle SSPM permet d'atteindre  $\lfloor \sqrt{N} \rfloor$  formes de point fixe différentes. Une configuration  $h$  est un point fixe de SSPM si et seulement si :

- il est décomposable en deux points fixes du modèle SPM,  $h_{<i}$  (symétrique) et  $h_{\geq i}$ , tels que  $|h_i - h_{i-1}| \leq 1$ ,
- sa colonne de hauteur maximale  $k$  est  $\lfloor \sqrt{N} \rfloor$  ou  $\lfloor \sqrt{N} \rfloor - 1$ , et
- la position  $i$  vérifie  $k + |i| \leq \lfloor \sqrt{2N} \rfloor$ .

SPM PARALLÈLE SYMÉTRIQUE PSSPM (*Parallel Symmetric Sand Pile Model*) considère l'application en parallèle des deux règles d'itération du modèle symétrique SSPM. La principale question est de savoir si tous les points fixes du modèle SSPM sont toujours atteignables. Si nous considérons uniquement la forme des points fixes, alors la réponse est affirmative ; si nous considérons la forme et la position des points fixes par rapport à l'origine, alors la réponse est négative.

**Théorème 1.4.** [FPP+11 ; PPP11] Soient  $h_{\min}$  (resp.  $h_{\max}$ ) le point fixe minimum (resp. maximum) de PSSPM( $N$ ) selon l'ordre lexicographique. Pour tout point fixe  $h$  de SSPM( $N$ ),

$$h \in \text{PSSPM}(N) \iff h_{\min} \leq_{\text{lex}} h \leq_{\text{lex}} h_{\max}.$$

Ce résultat signifie que dans PSSPM, il n'est pas possible d'atteindre tous les points fixes de SSPM, mais un sous-ensemble contiguë selon l'ordre lexicographique : tout point fixe de SSPM entre deux points fixes atteignables dans PSSPM est lui aussi atteignable dans PSSPM. De plus, pour atteindre  $h_{\min}$  (resp.  $h_{\max}$ ) il suffit d'effectuer les transitions droites (resp. gauches) pour tous les choix (il y a au plus un choix par transition) au cours de la dynamique.

SPM BIDIMENSIONNEL BSPM (*Bidimensional Sand Pile Model*), la variante bidimensionnelle du modèle de pile de sable, n'est pas équivalente au modèle de tas de sable BTW en deux dimensions, car elle considère de « vrais » grains de sable, comme il a été expliqué dans la partie 1.3.2. La définition de ce modèle est quelque peu technique, mais suis une idée intuitive. De la même façon que SPM considère une unique direction d'éboulement selon la règle verticale, le modèle BSPM considère deux directions possibles d'éboulement des grains de sable selon cette même règle, disons l'une vers la droite et l'autre vers le bas. Et de la même façon que l'espace des configurations du modèle SPM est l'ensemble des suites décroissantes dans la direction d'éboulement, le modèle BSPM est défini sur l'ensemble des suites décroissantes dans les deux directions d'éboulement. Les règles ne sont ainsi appliquées que si elles ne violent pas cette dernière condition (pour une définition formelle, voir [DMP+06]). Le principal résultat connu concerne trois motifs interdits.

**Théorème 1.5.** [DMP+06] Le modèle BSPM, pour des éboulements dans les directions droite et bas, comporte les trois motifs interdits suivants, et aucun

autre :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} q & q \\ q & q \end{pmatrix} \text{ pour tout } q \text{ et toute position,} \\ & \begin{pmatrix} q & q & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sur la ligne contenant l'origine,} \\ & \begin{pmatrix} q & 0 \\ q & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix} \text{ sur la colonne contenant l'origine.} \end{aligned}$$

Les conditions sur la règle pour que les configurations soient toujours décroissantes dans deux directions, pour chaque ligne et chaque colonne, entraînent une grande difficulté technique à aborder la dynamique de ce modèle.

Soulignons encore une fois que, bien que SPM et BTW coïncident en une dimension, la généralisation de SPM à deux dimensions est différente du modèle BTW en deux dimensions. Outre l'absence de bords, le modèle SPM représente des hauteurs de grains de sable qui s'éboulent les uns sur les autres en suivant des lois physiques (la gravité), alors que dans le modèle BTW, les hauteurs sont un mélange de hauteur et de pente, et les grains peuvent « sauter » sur des piles voisines plus hautes, comme il a été souligné dans la partie 1.1.2.

La figure 1.10 propose un diagramme résumant les différents modèles présentés et de leurs liens.

**SPM KADANOFF** Le modèle de pile de sable que nous étudions dans les chapitres qui suivent est lui aussi une variante du modèle SPM, dans laquelle plusieurs grains peuvent tomber d'une même colonne au cours d'une étape de temps. Il sera défini au chapitre 2.

#### 1.4 CHIP FIRING GAME CFG

Nous terminerons ce chapitre par le système dynamique le plus général. Les modèles de pile de sable BTW, ASM, et toutes les variantes de SPM, excepté IPM qui n'est pas local, sont des sous-classes des *Chip Firing Games* CFG, et les résultats sur le CFG s'appliqueront ainsi à tous ceux-ci. Un CFG est défini sur un graphe orienté  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ . Une *configuration* est une assignation d'un nombre positif de *jetons* à chaque sommet de  $\mathcal{G}$ , c'est-à-dire une fonction  $c : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{N}$ . Un sommet  $v$  est *instable* si son nombre de jetons  $c(v)$  est supérieur ou égal à son degré sortant  $\deg^+(v)$ . La règle de transition est la suivante : si  $v$  est instable dans la configuration  $c$ , alors  $c$  peut être transformée en une autre configuration  $c'$  en déplaçant un jeton de  $v$  le long de chaque arc sortant de  $v$ . Ce processus s'appelle le *tirage* de  $v$ , et nous dirons que  $c'$  est un *successeur* de  $c$ . L'ensemble des configurations atteignables depuis  $c$  est noté  $\text{CFG}(\mathcal{G}, c)$ ,



et nous appellerons *jeu* du CFG l'application séquentielle de la règle à partir d'une configuration initiale.

Le modèle de tas de sable abélien ASM, tel qu'il a été présenté dans la section 1.2 (sur un (multi-)graphe orienté comportant un puits globale), peut être vu comme un Chip Firing Game, dans lequel le graphe support de la dynamique possède un puits atteignable depuis tout sommet. Ce puits assure la convergence du système.

Le Chip Firing Game a d'abord été introduit sur les graphes non-orientés, et cette définition a été rapidement étendue aux graphes orientés [ALS+89; BLS91; BL92]. Ce modèle très général intéresse différents domaines [Big99; Lóp97], et une attention particulière a été portée à la compréhension des conditions sous lesquelles un Chip Firing Game est convergent et a une structure de treillis. Nous retiendrons de ces études les résultats suivants :

**Théorème 1.6.** [Tar88; Eri93; Eri91; LP00]

*Etant donné un graphe  $\mathcal{G}$  et une configuration initiale  $O$ , exactement une des deux affirmations suivantes est vraie :*

1. *le jeu du CFG ne termine pas ;*
2. *le jeu du CFG atteint un unique point fixe.*

*Dans le second cas, le jeu termine en un temps polynomial en le nombre de sommets dans le cas non-orienté, mais peut nécessiter un temps exponentiel dans le cas orienté. De plus, si  $\mathcal{G}$  n'a pas de composante close (voir la définition ci-dessous), l'ensemble des configurations atteignables  $\text{CFG}(\mathcal{G}, O)$  muni de l'ordre induit par la relation de succession est un treillis.*

Une *composante close* est un sous ensemble  $\mathcal{S}$  des sommets non trivial (non vide et différent de  $\mathcal{V}$ ), fortement connexe (pour tout  $i$  et  $j$  de  $\mathcal{S}$ , il existe un chemin de  $i$  à  $j$ ), et clos (sans arc vers  $\mathcal{V} \setminus \mathcal{S}$ ).

Des travaux récents proposent une caractérisation précise du sous-ensemble propre des treillis qui peuvent être générés par des CFG [VPP13]. Concernant la difficulté de prédire le comportement d'un Chip Firing Game, Eric GOLES et Maurice MARGENSTERN n'ont pas tardé à montrer le résultat qui suit.

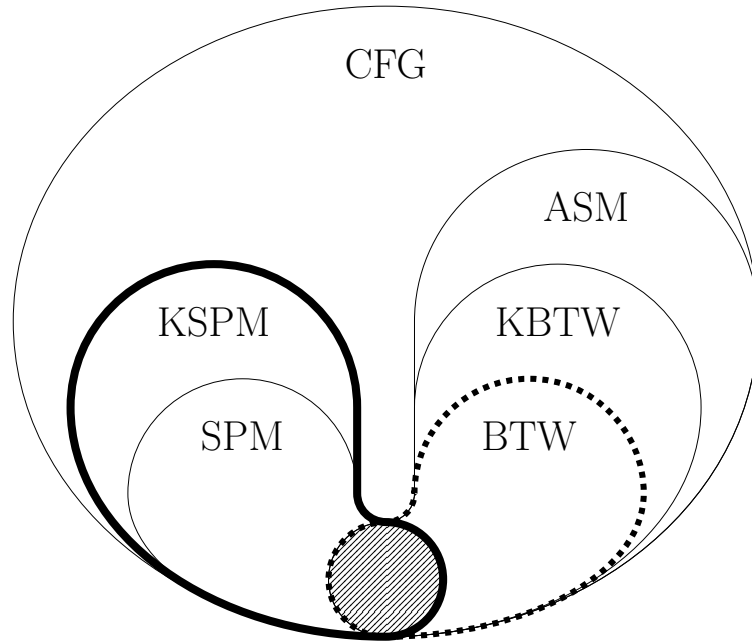
**Théorème 1.7.** [GM97]

*Il existe un Chip Firing Game (parallèle) Turing-universel sur un graphe non-orienté infini comportant un nombre infini de grains.*

Encore une fois, dans le Chip Firing Game, nous pouvons considérer l'application parallèle de la règle, c'est-à-dire à tous les sommets possibles en une itération. Ce mode d'itération déterministe atteint le même point fixe (si un point fixe est atteint) que le mode séquentiel (d'après les mêmes arguments que pour le modèle PSPM comparé au modèle SPM : le mode séquentiel peut *simuler* le mode parallèle). Enfin, il est

possible d'introduire des modes d'itération intermédiaires dans lequel au plus  $k$  sommets sont tirés par itération. Dans ces variantes, le point fixe atteint est toujours unique (si un point fixe est atteint) et identique à celui du mode séquentiel, mais il est possible de remarquer sur des exemples simples que l'ensemble des configurations atteignables n'a plus une structure de treillis [LP00]. Pour les modèles de pile de sable, ces différences de mode d'itération ne changent donc pas le point fixe atteint, qui sera l'objet du principal problème que nous adressons dans ce manuscrit, mais modifient la structure de l'espace des configurations qu'il est possible de visiter. Notons que la considération de différents modes d'itération dans les systèmes dynamiques discrets fait l'objet d'un intense débat, dont la pertinence est mise en évidence sur le modèle des *réseaux booléens* [Nou12 ; NRS12].

Pour clarifier les liens entre les modèles définis, nous proposons au lecteur de se référer à la figure 1.10 qui résume leurs inclusions respectives.



CFG : Chip Firing Game (partie 1.4 page 34)  
 ASM : Abelian Sandpile Model (partie 1.2 page 12)  
 KBTW : Kadanoff Bak-Tang-Wiesenfeld (partie 2.1 page 40)  
 BTW : Bak-Tang-Wiesenfeld (partie 1.1.2 page 9)  
 SPM : Sand Pile Model (partie 1.3.2 page 26)  
 KSPM : Kadanoff Sand Pile Model (partie 2.2 page 41)

FIGURE 1.10 – Diagramme de classe des modèles de pile de sable présentés. Pour chaque modèle, nous donnons la référence vers sa définition. Tous contiennent la zone hachurée, qui correspond aux versions unidimensionnelles et pour le paramètre des modèles Kadanoff  $p = 1$  (la dynamique est alors identique, mais ASM, KBTW et BTW considèrent un support fini, alors que KSPM et SPM considèrent un support infini).



## INTRODUCTION AUX PILES DE SABLE KADANOFF

2.1	Définition originale . . . . .	40
2.2	Définition et état de l'art . . . . .	41
2.2.1	Configurations et règle d'itération . . . . .	42
2.2.2	Notations . . . . .	44
2.2.3	Structure de treillis . . . . .	45
2.2.4	Aperçu . . . . .	51
2.2.5	KSPM( $p$ ) et Chip Firing Game . . . . .	51
2.2.6	Plateau et Support . . . . .	53
2.2.7	Problème de l'avalanche . . . . .	57
2.3	Problématique . . . . .	58

**L**E MODÈLE DE PILE DE SABLE KADANOFF, d'après le nom du physicien Leo P. KADANOFF, est un système dynamique discret généralisant le modèle de pile de sable SPM. Ce modèle, que nous imageons par des grains cubiques se déplaçant de colonne parfaitement empilée en colonne parfaitement empilée, a davantage pour objet la compréhension des mécanismes d'*émergence*, et de la notion de *complexité*, que de simuler l'éboulement de sable d'un point de vue physique. Il est défini à partir d'une règle locale très simple décrivant les mouvements des grains, et présente des comportements difficiles à prédire et à expliquer.

Dans ce chapitre, nous commencerons par une brève présentation du modèle tel que Leo P. KADANOFF *et al.* l'ont introduit, c'est-à-dire comme un extension du modèle BTW. Nous définirons ensuite formellement le modèle de pile de sable Kadanoff tel que nous le considérerons dans la suite du manuscrit, donnerons des éléments de vocabulaire, et établirons la conservation du nombre de grains au cours de la dyna-

mique. Nous montrerons l'unicité du point fixe atteint, et présenterons la structure de treillis de l'ensemble des configurations qu'il est possible de visiter à partir d'une configuration origine. Le *Chip Firing Game*, dont notre modèle est une sous-classe, fera une succincte apparition, et laissera la place à quelques résultats préliminaires pour nous familiariser avec le formalisme. Nous aborderons enfin la *complexité algorithmique* de prédire la taille des avalanches, et la dernière partie de ce chapitre sera consacrée à la formulation d'une conjecture sur la forme des points fixes du modèle, dont la recherche d'une preuve formelle est l'objet des chapitres qui suivent.

Pour simplifier les discussions, nous considérerons que la direction dans laquelle les grains s'éboulent est la droite.

## 2.1 DÉFINITION ORIGINALE

Le modèle de pile de sable que nous allons étudier par la suite a été introduit comme un automate cellulaire sous le nom de « modèle de pile de sable unidimensionnel limité non-local » en 1989, par les physiciens Leo P. KADANOFF, Sidney R. NAGEL, Lei WU, et Su-min ZHOU [KNW+89]. Leur objectif était de définir des variantes du modèle de tas de sable BTW présentant également un phénomène d'auto-organisation critique, ce qu'il *jugent* concluant dans leur étude, pour les mêmes raisons qu'exposées dans la partie 1.1 du chapitre 1. Informellement, « modèle de pile de sable unidimensionnel » doit être compris comme faisant référence au modèle de tas de sable BTW en une dimension, défini quelques années plus tôt par Per BAK, Chao TANG, et Kurt WIESENFELD [BTW87; BT88]; l'adjectif « limité » signifie que le nombre de grains se déplaçant par l'application de la règle est fixé par une constante; et « non-local » que les grains ne se déplacent pas uniquement d'une colonne à sa voisine de droite, mais s'éboulent sur plusieurs colonnes adjacentes.

Quatre modèles ont ainsi été étudiés d'un point de vue physique. Sur un support de  $L$  colonnes,  $S = \llbracket 0 ; L - 1 \rrbracket$ , une configuration est une assignation pour chaque colonne  $i$  d'une quantité de grains  $h_i$ , et la *pente* à l'indice  $i$  est ainsi définie par  $z_i = h_i - h_{i+1}$ . Nous conservons la condition d'un bord fermé sur la gauche, et ouvert sur la droite :  $z_{-1} = 0$  et  $h_i = 0$  pour  $i > L$ . La règle d'itération peut être appliquée à l'indice  $i$  si sa pente est strictement plus grande que la valeur critique globale  $z_c$ . Dans tous ces modèles, une quantité de grains dénotée  $n_i$  tombe de la colonne  $i$ .

$$\text{Si } h_i > z_c \text{ alors } h_i \rightarrow h_i - n_i \quad (\text{tous les modèles})$$

Ensuite, plusieurs variations sont proposées, tout d'abord concernant la

quantité de grains qui tombent de la colonne  $i$ .

$$n_i = p \quad (\text{modèle limité})$$

$$n_i = z_i - p \quad (\text{modèle illimité})$$

avec  $p$  une constante. La seconde variation concerne les colonnes sur lesquelles ces grains sont répartis.

$$h_{i+1} \rightarrow h_{i+1} + n_i \quad (\text{modèle local})$$

$$h_{i+j} = h_{i+j} + 1 \text{ pour } j = 1, 2, \dots, n_i \quad (\text{modèle non-local})$$

Ceci définit quatre modèles, chacun comportant deux paramètres :  $z_c$ , qui détermine quand la règle peut être appliquée, et  $p$ , qui détermine le nombre de grains qui se déplacent. Nous avons déjà discuté du fait que la valeur de  $z_c$  n'a pas d'importance pour la compréhension du modèle, puisqu'il équivaut simplement à un choix d'origine (partie 1.2.1 sur la définition du modèle ASM).

Remarquons que les modèles limités généralisent tous deux le modèle BTW, que nous retrouvons pour  $p = 1$  et  $z_c = 1$ .

De même que le modèle SPM est une variante du modèle BTW, le modèle de pile de sable Kadanoff est une variante du modèle « unidimensionnel limité local » présenté ici, et nous dénoterons ce dernier KBTW (*Kadanoff Bak-Tang-Wiesenfeld*). KBTW est défini sur un support fini  $\mathcal{S}$ , qui comporte des bords lui permettant de tendre vers un ensemble de configurations récurrentes (la dynamique de ces configurations a été étudiée pour  $p = 2$  [GK93b]). Le modèle que nous allons étudier peut être vu comme le modèle « unidimensionnel limité local » sur un support  $\mathcal{S}$  infini, de telle sorte que nous étudierons le comportement transient de la pile de sable, avant qu'elle n'atteigne l'ensemble des configurations récurrentes. Nous avons déjà discuté lors du passage du modèle BTW au modèle SPM (section 1.3.1), du fait que les attributs qui rendent le système intéressant du point de vue de la *complexité* semblent conservés.

## 2.2 DÉFINITION ET ÉTAT DE L'ART

Nous commençons par donner une définition informelle. Le modèle de pile de sable Kadanoff KSPM (*Kadanoff Sand Pile Model*), est un système dynamique discret —en espace et en temps— décrivant l'éboulement d'un nombre fini  $N$  de grains empilés. À chaque application de la règle d'itération, un nombre de grains fixé par un paramètre  $p$  se déplacent, jusqu'à l'obtention d'une configuration stable. La règle est la suivante : si la différence de hauteur entre une colonne et celle qui est à sa droite est strictement supérieure à  $p$ , alors  $p$  grains peuvent s'ébouler de cette

colonne, un grain se posant sur chacune des  $p$  colonnes adjacentes sur la droite, comme présenté sur la figure 2.1. Le paramètre  $p$  est fixé, et ne change pas au cours de la dynamique. Un exemple d'application de la règle jusqu'à l'obtention d'une configuration stable est proposé en figure 2.2. Dans la suite, le symbole  $p$  désignera toujours le paramètre du modèle.

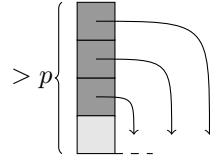


FIGURE 2.1 – Règle d'itération du modèle de pile de sable Kadanoff pour un paramètre  $p$ . Sur cet exemple,  $p = 3$ .

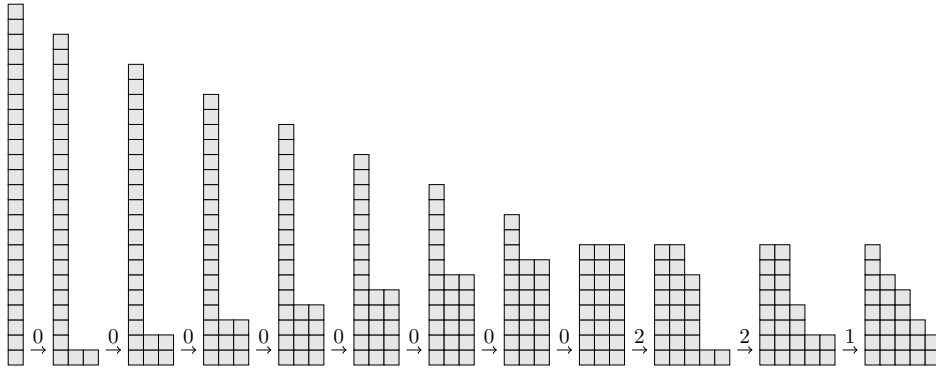


FIGURE 2.2 – Une possible suite d'itérations pour  $p = 2$  à partir d'une configuration constituée de  $N = 24$  grains empilés en colonne 0, jusqu'à une configuration stable. La règle est appliquée selon le mode séquentiel (à une unique colonne à chaque itération), et les flèches sont étiquetées par la colonne à laquelle la règle est appliquée.

Dans la partie suivante, nous proposons deux définitions équivalentes du modèle. Pour varier le vocabulaire, nous utiliserons les termes suivants comme synonymes :

*colonne et indice*  
*ébouler, tomber et tirer*  
*itération, étape et transition*

### 2.2.1 Configurations et règle d'itération

Les configurations du modèle de pile de sable KSPM admettent différentes représentations. Les trois représentations les plus naturelles uti-



lisent les notions de : *hauteur*, *pente* et *action*. Nous commencerons par définir les configurations sous forme de suite de hauteurs, et ensuite sous forme de suite de pentes, qui est la principale représentation que nous manipulerons. Nous présenterons deux définitions équivalentes du modèle, la première étant plus naturelle, et la seconde plus appropriée pour les développements formels. Nous reviendrons par la suite sur la notion d'action d'une colonne.

**HAUTEUR** L'espace des configurations dans la représentation en *hauteurs* est défini comme l'ensemble des suites infinies décroissantes et ultimement nulles d'entiers naturels, dans lesquelles chaque entier représente un nombre de grains empilés. Soit  $h = (h_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une *configuration*,  $h_i$  est le nombre de grains sur la *colonne*  $i$ . Nous obtenons ainsi la définition suivante.

**Définition 2.1.** (HAUTEURS) Le modèle de pile de sable Kadanoff pour un paramètre fixé  $p$ ,  $KSPM(p)$ , est défini par deux ensembles.

- *Configurations.* L'ensemble des suites infinies décroissantes et ultimement nulles d'entiers naturels.

$$\mathcal{C}_h = \left\{ \begin{array}{l} h_i \in \mathbb{N} \text{ pour tout } i \\ (h_i)_{i \in \mathbb{N}} : h_i - h_{i+1} \geq 0 \text{ pour tout } i \\ \exists i_0 \text{ tel que } \forall i \geq i_0 : h_i = 0 \end{array} \right\}$$

- *Règle d'itération.* Nous avons une transition de la configuration  $h$  à la configuration  $h'$  sur la colonne  $i$ , dénotée  $h \xrightarrow{i} h'$ , si

$$\begin{cases} h'_i = h_i - p \\ h'_j = h_j + 1 \text{ pour } j \in \llbracket i + 1 ; i + p \rrbracket \\ h'_j = h_j \text{ pour } j \notin \llbracket i ; i + p \rrbracket. \end{cases}$$

Nous dirons également que la colonne  $i$  est *tirée* lorsque nous appliquons la règle d'itération à la colonne  $i$ . D'après la définition de l'ensemble des configurations  $\mathcal{C}_h$ , une condition pour qu'un indice  $i$  soit tiré est bien que  $h_i - h_{i+1} > p$ , car dans le cas contraire  $h'_i - h'_{i+1} < 0$  et donc  $h' \notin \mathcal{C}_h$ . Le symbole  $h$  désignera toujours une configuration représentée par une suite de hauteurs  $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ .

La règle est appliquée à une seule position à chaque itération, selon le mode séquentiel.

**PENTE** Dans le but de ne considérer que les hauteurs relatives entre les colonnes, ce qui permet d'avoir une représentation uniformisée (qui ne dépend pas de la position et de sa hauteur), nous utiliserons principalement la représentation sous forme de suite de *différences de hauteur*, ou

pentés, dans l'espace des suites infinies et ultimement nulles d'entiers naturels. Soit  $b = (b_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une configuration, nous avons ainsi  $b_i = h_i - h_{i+1}$  pour tout  $i$ . La définition 2.2 suivante est une reformulation de la 2.1, et définit le même système dynamique discret.

**Définition 2.2.** (PENTES) Le modèle de pile de sable Kadanoff pour un paramètre fixé  $p$ ,  $\text{KSPM}(p)$ , est défini par deux ensembles.

- *Configurations.* L'ensemble des suites infinies et ultimement nulles d'entiers naturels.

$$\mathcal{C}_b = \left\{ (b_i)_{i \in \mathbb{N}} : \begin{array}{l} b_i \in \mathbb{N} \text{ pour tout } i \\ \exists i_0 \text{ tel que } \forall i \geq i_0 : b_i = 0 \end{array} \right\}$$

- *Règle d'itération.* Nous avons une transition de la configuration  $b$  à la configuration  $b'$  sur la colonne  $i$ , dénotée  $b \xrightarrow{i} b'$ , si

$$\begin{cases} b'_{i-1} = b_{i-1} + p \text{ si } i \neq 0 \\ b'_i = b_i - (p + 1) \\ b'_{i+p} = b_{i+p} + 1 \\ b'_j = b_j \text{ pour } j \notin \{i-1, i, i+p\}. \end{cases}$$

Nous pouvons de nouveau remarquer qu'une condition pour que l'indice  $i$  soit tiré est que  $b_i > p$ , car dans le cas contraire  $b'_i < 0$  et donc  $b' \notin \mathcal{C}_b$ . Le symbole  $b$  désignera toujours une configuration représentée par une suite de pentés  $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ .

La règle est encore une fois appliquée à une seule position à chaque itération, selon le mode séquentiel.

**EQUIVALENCE DES DEUX DÉFINITIONS** La bijection entre  $\mathcal{C}_h$  et  $\mathcal{C}_b$  pour observer que les définitions 2.1 et 2.2 décrivent bien le même modèle est évidemment celle qui a une suite  $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$  associe la suite  $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$  telle que  $b_i = h_i - h_{i+1}$  pour tout  $i$ . Cette bijection  $f : \mathcal{C}_h \rightarrow \mathcal{C}_b$  commute avec l'application de la règle d'itération.

$$\begin{cases} \forall h, h' \in \mathcal{C}_h \text{ telles que } h \xrightarrow{i} h' : f(h) \xrightarrow{i} f(h') \\ \forall b, b' \in \mathcal{C}_b \text{ telles que } b \xrightarrow{i} b' : f^{-1}(b) \xrightarrow{i} f^{-1}(b') \end{cases}$$

Dans la suite, nous ne ferons pas de distinction entre une configuration et ses représentations.

### 2.2.2 Notations

Nous présentons quelques notations et éléments de vocabulaire, pour certains hérités du modèle de pile de sable SPM présenté en section

1.3, ainsi qu'une première remarque sur la conservation du nombre de grains. Tout d'abord, soulignons que le modèle est *non déterministe* car la règle est appliquée de façon séquentielle.

Pour une configuration  $b$ , nous dirons que la colonne  $i$  est *instable* dans  $b$  si  $b_i > p$ . Une configuration  $b$  est *stable*, ou un *point fixe*, si aucune transition n'est possible depuis  $b$ , c'est-à-dire si toutes ses colonnes sont stables,  $b_i \leq p$  pour tout  $i$ . Nous noterons  $b \rightarrow b'$  lorsqu'il existe un indice  $i$  tel que  $b \xrightarrow{i} b'$ , et nous appellerons  $b'$  un *successeur* de  $b$ . La clôture réflexive et transitive de  $\rightarrow$  est dénotée  $\xrightarrow{*}$ , et nous dirons que la configuration  $b'$  est *accessible*, ou *atteignable* depuis la configuration  $b$  si  $b \xrightarrow{*} b'$ .

Pour tout ensemble  $A \subseteq \mathbb{N}$  et toute suite  $c = (c_i)_{i \in A}$ , nous désignerons la sous-suite de  $c$  induite par l'ensemble d'indices  $B \subseteq A$  par  $c_B$ . Par exemple,  $b_{\llbracket n; \infty \rrbracket}$  désignera la configuration  $b$  à partir de l'indice  $n$ .

**LOI DE CONSERVATION DU NOMBRE DE GRAINS** Nous vérifions aisément que le nombre  $N$  de grains est conservé par l'application de la règle d'itération. Pour une configuration  $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$  ou  $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$  nous pouvons définir  $N$  par

$$N = \sum_{i \in \mathbb{N}} h_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} (i+1) b_i$$

et pour  $h \xrightarrow{j} h'$  nous avons d'après la règle de transition

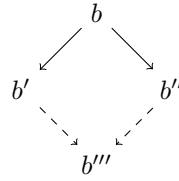
$$\sum_{i \in \mathbb{N}} h'_i = \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus \llbracket j; j+p \rrbracket} h_i + (h_j - p) + \sum_{i \in \llbracket j+1; j+p \rrbracket} (h_i + 1) = \sum_{i \in \mathbb{N}} h_i.$$

L'équivalence des deux définitions nous assure qu'il en est de même pour la représentation  $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ .

### 2.2.3 Structure de treillis

Avant de présenter un résultat sur la structure de treillis de l'ensemble des configurations atteignables depuis une configuration du modèle KSPM, nous commencerons par montrer que le modèle est convergent, en suivant une méthode très classique dans l'étude des systèmes dynamiques discrets.

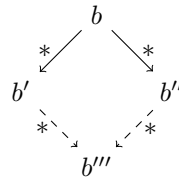
**PROPRIÉTÉ DU DIAMANT** Le modèle KSPM possède la *propriété du diamant* : si  $b \rightarrow b'$  et  $b \rightarrow b''$ , alors il existe une configuration  $b'''$  telle que  $b' \rightarrow b'''$  et  $b'' \rightarrow b'''$ .



Cette propriété est vérifiée pour les mêmes raisons que dans le modèle SPM :

- si deux indices différents  $i$  et  $j$  peuvent être tirés, alors l'éboulement de l'indice  $i$  n'empêchera pas l'éboulement de l'indice  $j$  à l'étape de temps suivante car la pente à l'indice  $j$  n'aura pas diminué, et inversement ;
- quel que soit l'ordre dans lequel nous effectuons les transitions, nous atteignons la même configuration, par commutativité de l'addition qui est le seul opérateur arithmétique utilisé dans l'application de la règle d'itération.

**CONVERGENCE ET POINT FIXE** La *convergence* est la propriété suivante : si  $b \xrightarrow{*} b'$  et  $b \xrightarrow{*} b''$ , alors il existe une configuration  $b'''$  telle que  $b' \xrightarrow{*} b'''$  et  $b'' \xrightarrow{*} b'''$ .



**Proposition 2.3.** *Le modèle KSPM est convergent.*

*Démonstration.* De la même façon que pour le modèle SPM, nous pouvons montrer que toute suite d'itérations termine en définissant la fonction d'énergie<sup>1</sup> suivante, qui associe à une configuration un entier (chaque grain compte pour sa propre hauteur dans la somme).

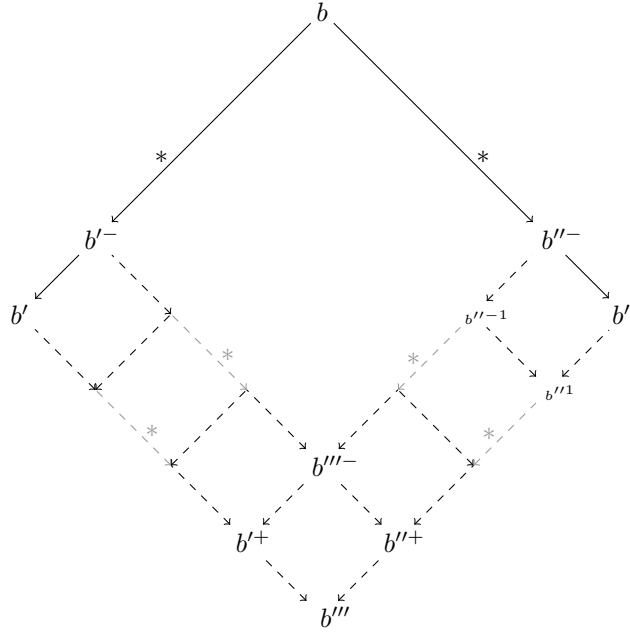
$$E : \mathcal{C}_h \rightarrow \mathbb{N}$$

$$h \mapsto E(h) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j=0}^{h_i} j$$

Nous remarquons alors que l'application de la règle fait strictement décroître cette énergie :  $h \rightarrow h' \Rightarrow E(h) > E(h')$ . De plus,  $E(h) \geq 0$  pour toute configuration  $h \in \mathcal{C}_h$ . Comme il n'y a pas de suite infinie décroissante d'entiers naturels, toute suite de transitions termine.

1. Nous utilisons le terme *fonction d'énergie* pour désigner une valuation des configurations.

La terminaison et la propriété du diamant impliquent la convergence du système (résultat classique sur les systèmes dynamiques discrets [BN98]). Soient trois configurations  $b$ ,  $b'$  et  $b''$  telles que  $b \xrightarrow{*} b'$  et  $b \xrightarrow{*} b''$ . Sans perte de généralité, considérons que la plus longue de ces deux dérivations est celle de  $b$  à  $b'$ , qui comporte un nombre fini  $n$  d'étapes (propriété de terminaison). Nous montrons le résultat par induction sur  $n$  en utilisant la propriété du diamant selon le schéma suivant, qui nous assurera qu'il existe une configuration  $b'''$  telle que  $b' \xrightarrow{*} b'''$  et  $b'' \xrightarrow{*} b'''$ .



Pour  $n = 0$ , le résultat est évident avec  $b''' = b$ . Supposons que le système est convergent pour les configurations atteintes en  $k < n$  étapes depuis  $b$ , et montrons qu'il l'est pour  $n$  étapes. Soit  $b'^{-}$  (resp.  $b''^{-}$ ) la configuration précédent  $b'$  (resp.  $b''$ ) dans la dérivation de  $b$  à  $b'$  (resp.  $b''$ ) :

$$b \xrightarrow{*} b'^{-} \rightarrow b'$$

(resp.  $b \xrightarrow{*} b''^{-} \rightarrow b''$ ).

Alors par hypothèse d'induction, il existe une configuration  $b'''^{-}$  telle que  $b'^{-} \xrightarrow{*} b'''^{-}$  et  $b''^{-} \xrightarrow{*} b'''^{-}$ .

Pour chacune de ces deux configurations, nous effectuons une nouvelle induction sur la longueur de la dérivation de  $b'^{-}$  (resp.  $b''^{-}$ ) à  $b'''^{-}$ , et nous obtenons avec la propriété du diamant une configuration  $b''^{+}$  (resp.  $b'''^{+}$ ) successeur de  $b'''^{-}$  qui est atteignable depuis  $b'$  (resp.  $b''$ ). Par exemple pour la première étape du côté  $b''^{-}$  et  $b''$ , soit  $b''^{-1}$  la première configuration obtenue dans la dérivation de  $b''^{-}$  à  $b'''^{-}$  :  $b''^{-} \rightarrow b''^{-1} \xrightarrow{*}$

$b'''^-$ , alors nous avons  $b'''^- \rightarrow b'''^{-1}$  et  $b'''^- \rightarrow b'''$  donc d'après la propriété du diamant il existe une configuration  $b''^1$  telle que  $b'''^{-1} \rightarrow b''^1$  et  $b''' \rightarrow b''^1$ .

En appliquant une dernière fois la propriété du diamant, il existe une configuration  $b'''$  telle que  $b''^+ \rightarrow b'''$  (resp.  $b''^+ \rightarrow b'''$ ).  $b'''$  est ainsi atteignable depuis  $b'$  et  $b''$ , donc le système est convergent pour  $n$ .  $\square$

Pour toute configuration  $b \in \mathcal{C}_b$ , nous dénoterons l'unique point fixe atteint  $\pi(b)$ , qui est donc tel que  $b \xrightarrow{*} \pi(b)$ . Remarquons de plus que pour toutes configurations  $b$  et  $b'$  telles que  $b \xrightarrow{*} b'$ , ces deux configurations atteignent le même point fixe,  $\pi(b') = \pi(b)$ .

La Proposition suivante est corollaire.

**Proposition 2.4.** *Pour tout paramètre  $p$  et toute configuration  $b \in \mathcal{C}_b$ ,  $\pi(b)$  est unique.*

Les travaux présentés dans les chapitres suivants vont s'intéresser en particulier au point fixe obtenu à partir de la configuration initiale composée d'un nombre fini  $N$  de grains empilés en colonne 0. Nous utiliserons la notation  $0^\omega$  pour la suite infinie de zéros, de telle sorte que la configuration initiale s'écrive  $(N, 0^\omega)$ , que nous abrègerons par  $N$ . Ainsi, nous nous intéresserons à  $\pi(N)$ , que nous prendrons comme la représentation sous forme de différence de hauteur du point fixe atteint à partir de la configuration initiale  $(N, 0^\omega)$ . Pour alléger la notation, la dépendance au paramètre  $p$  de la configuration  $\pi(N)$  n'est pas indiquée. Nous utiliserons cette notation dans des contextes où le paramètre  $p$  sera fixé, ou mentionné.

L'ensemble des configurations accessibles depuis la configuration initiale  $(N, 0^\omega)$  pour un paramètre  $p$  sera noté  $KSPM(p, N)$ . La figure 2.3 montre un exemple de  $KSPM(2, 24)$ .

**ACTION** Une troisième représentation jouera un rôle important dans la suite de notre exposé, il s'agit de la *suite d'actions* (le terme anglais est *shot vector*) d'une configuration, définie à partir de l'action de chaque colonne. Cette représentation est liée à la configuration initiale  $(N, 0^\omega)$  du modèle. Pour une configuration atteignable depuis  $(N, 0^\omega)$ , c'est-à-dire un élément de  $KSPM(p, N)$ , l'action d'une colonne  $i$ , dénotée  $a_i$ , est le nombre de fois que la règle a été appliquée à l'indice  $i$  depuis la configuration  $(N, 0^\omega)$ . La *suite d'actions* d'une configuration, dénotée  $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , est ainsi définie comme la suite des actions de chaque indice. C'est une suite infinie et ultimement nulle d'entiers, c'est-à-dire un élément de  $\mathcal{C}_a = \mathcal{C}_b$ .

Comme nous l'avons déjà remarqué pour la propriété du diamant, l'ordre dans lequel la règle est appliquée n'a pas d'importance, donc pour un paramètre  $p$  et un nombre de grains  $N$ , une suite d'actions

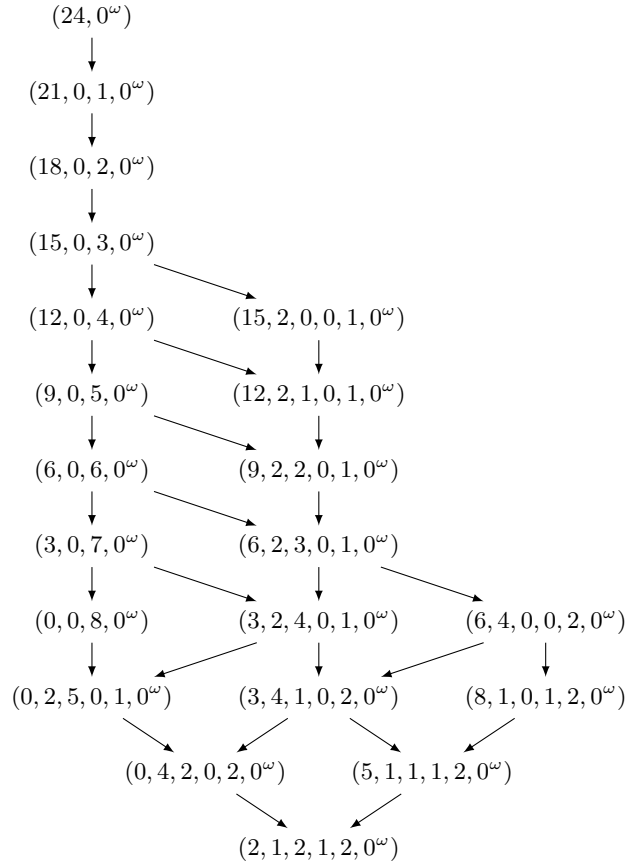
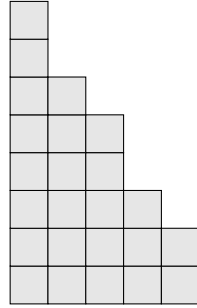


FIGURE 2.3 –  $KSPM(2,24)$ , l'ensemble des configurations atteignables pour  $N = 24$  et  $p = 2$ , représentées sous forme de différences de hauteur. La configuration initiale  $(24, 0^\omega)$  est en haut de la figure, et l'unique point fixe atteint,  $\pi(24) = (2, 1, 2, 1, 2, 0^\omega)$  est en bas.

défini bien une unique configuration. Un exemple est présenté en figure 2.4.

*Remarque 2.5.* Il est tout de même à noter que toutes les configurations des ensembles  $\mathcal{C}_h$  et  $\mathcal{C}_b$  n'ont pas de suite d'actions (les suites s'action sont définies pour les configurations de l'ensemble  $KSPM(p, N)$ ). Et réciproquement, toutes les suites d'actions de l'ensemble  $\mathcal{C}_a$  ne définissent pas une configuration valide (par exemple la suite d'actions  $(0, 1, 0^\omega)$  ne représente aucune configuration). Par définition, la règle d'itération sur les suites d'actions consiste à ajouter une unité d'action à un indice, mais la condition de rester dans l'ensemble  $\mathcal{C}_a$  est trop faible.

Les trois représentations d'une configuration de  $KSPM(p, N)$  : en hauteurs  $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , en pentes  $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , et en actions  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , sont évidemment très liées. Concernant la suite d'action, notons qu'il est nécessaire de



$$(h_n)_{n \in \mathbb{N}} = (8, 6, 5, 3, 2, 0^\omega)$$

$$(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 1, 2, 1, 2, 0^\omega)$$

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (8, 1, 2, 0, 0, 0^\omega)$$

FIGURE 2.4 – Exemple de configuration obtenue depuis la configuration initiale pour  $N = 24$  et  $p = 2$ , et ses trois représentations :  $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$  en hauteurs,  $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$  en pentes, et  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  en actions. Pour vérifier la suite d’actions, nous pourrions nous référer à l’exemple présenté en figure 2.2.

connaître le nombre de grains  $N$  pour reconstituer une configuration sous forme de hauteurs et pentes à partir de celle-ci, dans le but de connaître le nombre de grains restant sur la colonne initiale. Explicitons la relation entre  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  et  $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , qui sera la base de certains développements présentés dans les chapitres qui suivent. Pour tout indice  $i > 0$ , la pente  $b_i$  est 0 dans la configuration initiale où  $N$  grains sont empilés en colonne 0. Ensuite, l’écroulement d’un indice  $j > 0$  a pour conséquences :

$$\begin{array}{llll} \text{l'augmentation de} & p & \text{unités de la pente} & b_{j-1} \\ \text{la diminution de} & p+1 & \text{unités de la pente} & b_j \\ \text{l'augmentation de} & 1 & \text{unité de la pente} & b_{j+p} \end{array} \quad (2.1)$$

Les conséquences de l’écroulement pour  $j = 0$  sont les mêmes, en ignorant le changement sur  $b_{j-1}$ . Nous obtenons ainsi la relation suivante.

$$\text{Pour tout } i \geq p, b_i = a_{i-p} - (p+1)a_i + p a_{i+1}. \quad (2.2)$$

TREILLIS Le modèle de pile de sable Kadanoff a été étudié par Eric GOLES, Michel MORVAN et Ha Duong PHAN en 2002, sous le nom de *Chip Firing Game Linéaire* LCFG (*Linear Chip Firing Game*) [GMPo2b]. Ces auteurs n’ont pas seulement montré la structure de treillis de l’ensemble  $KSPM(p, N)$  muni de l’ordre induit par la relation successeur  $\rightarrow$ , mais également que cette structure de treillis est vérifiée pour toute configuration initiale finie de l’ensemble des configurations  $\mathcal{C}_h$ . Nous formulerons néanmoins ce résultat sous sa forme plus faible, pour ne pas alourdir les notations.



**Théorème 2.6.** [GMP02b]

Pour tous  $p$  et  $N$ ,  $KSPM(p, N)$  est un treillis.

De plus, le système est fortement convergent, c'est-à-dire que toute séquence de transitions atteint l'unique point fixe en un même nombre d'itérations.

Remarquons que la structure de treillis du modèle de pile de sable Kadanoff est déduite du Théorème 1.7, car le graphe supportant la dynamique (présenté sur la figure 2.6) ne comporte pas de composante close. Dans [GMP02b], ce résultat est démontré en utilisant une autre technique, qui utilise la représentation sous forme de suite d'actions d'une configuration. Soient  $a$  et  $a'$  les suites d'actions de deux configurations atteintes depuis une même configuration origine  $O$ , alors la suite d'actions  $a''$  telle que  $a''_i = \max\{a_i, a'_i\}$  pour tout  $i$  représente une configuration atteignable depuis  $O$ , et telle que  $a''$  est la suite d'actions du plus grand commun successeur de  $a$  et  $a'$  :  $a'' = a \vee a'$ . Ainsi, l'ensemble considéré contient un élément maximal qui est son origine  $O$  (dans le cas qui nous intéresse la configuration  $(N, 0^\omega)$ ), et est clos par plus grand commun successeur, c'est donc un treillis (voir par exemple l'excellent [DP02]). La seconde partie du résultat suit l'observation que le nombre d'itérations de  $O$  à une configuration de suite d'actions  $a$  est  $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i$ .

## 2.2.4 Aperçu

Une figure est parfois plus parlante qu'un long discours. Nous laisserons le lecteur apprécier la *complexité* du modèle sur la figure 2.5.

2.2.5  $KSPM(p)$  et Chip Firing Game

La représentation sous forme de Chip Firing Game des modèles de pile de sable  $KSPM$  pour  $p = 1$ ,  $p = 2$  et  $p = 3$  sont présentés en figure 2.6. Pour tout paramètre  $p$  fini et à un nombre de grains  $N$  fixé, la considération d'un graphe fini est suffisante pour capturer sans altération la dynamique du modèle  $KSPM(p)$ . Intuitivement, il n'est pas nécessaire de considérer les colonnes d'indice strictement supérieur à  $N$ . Cependant, il est plus commode de décrire les morphismes de  $KSPM(p)$  vers le Chip Firing Game sans tenir compte du nombre de grains  $N$ , c'est-à-dire pour des graphes définis sur des ensembles de sommets infinis.

L'ensemble des sommets est toujours  $\mathbb{N} \cup \{s\}$ , avec  $s$  un sommet puits. Chaque sommet non puits  $i \in \mathbb{N}$  est assimilé à une colonne, et le nombre de jetons qu'il possède correspond à la pente  $b_i = h_i - h_{i+1}$ . Ainsi, les sommets tirés envoient des unités de pente à leurs voisins, comme il est illustré sur la figure 2.7. Cette représentation sous forme de Chip Firing Game, dans laquelle les colonnes s'échangent des unités de pente, s'avère très pratique pour raisonner sur le modèle de pile de sable  $KSPM$ . Notons enfin que nous emprunterons des éléments de la terminologie du

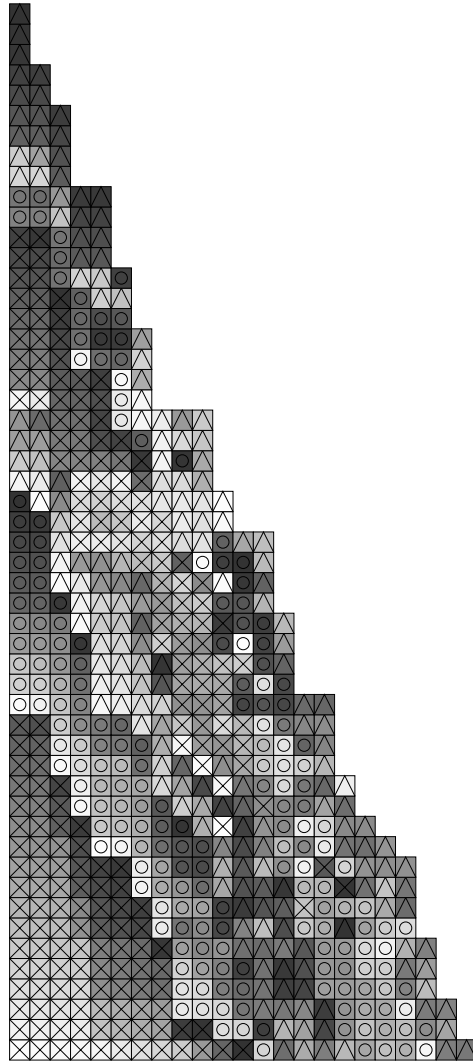


FIGURE 2.5 – Configuration stable obtenue pour  $p = 4$  après l’ajout, un à un, de 600 grains. Chaque ajout est suivi du processus de stabilisation, ou les grains tombent comme il est illustré sur la figure 2.1 (parmi les 4 grains qui s’écroulent, le grain le plus haut tombe le plus sur la droite). Le code couleur est le suivant : les 100 premiers grains ajoutés ont une couleur dégradée de blanc à noir avec une croix, les 100 grains suivants ont une couleur dégradée de blanc à noir avec un rond, les 100 grains suivants ont une couleur dégradée de blanc à noir avec un triangle, puis cette séquence est réutilisée de façon cyclique. Nous observons ainsi que les 100 premiers grains ajoutés sont « en dessous » des grains 101 à 200 suivants, qui sont « en dessous » des grains 201 à 300, mais ensuite un comportement de plus en plus intriqué semble prendre place. Ce processus d’ajout répété de grains sera étudié dans le chapitre 3.

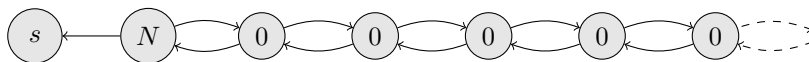


FIGURE 2.6 – PARTIE 1 – KSPM(1) dans la configuration initiale à  $N$  grains, représenté sous forme de Chip Firing Game. Le graphe support de la dynamique est défini par  $\mathcal{G} = (\mathbb{N} \cup \{s\}, \mathcal{E})$  tel que  $\mathcal{E} = \{(i, j) : |i - j| = 1\} \cup \{(0, s)\}$ .

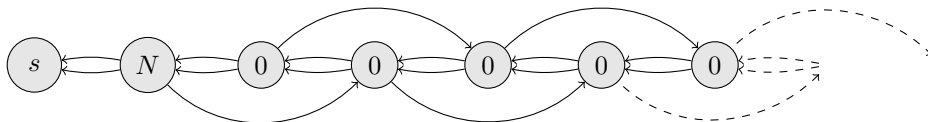


FIGURE 2.6 – PARTIE 2 – KSPM(2) dans la configuration initiale à  $N$  grains, représenté sous forme de Chip Firing Game. Le graphe support de la dynamique comporte plusieurs arcs entre certains sommets. C'est le graphe pondéré  $((i, j, k)$  représente  $k$  arcs de  $i$  à  $j$ ) défini par  $\mathcal{G} = (\mathbb{N} \cup \{s\}, \mathcal{E})$  tel que  $\mathcal{E} = \{(i, j, 2) : i - j = 1\} \cup \{(i, j, 1) : j - i = 2\} \cup \{(0, s, 2)\}$ .

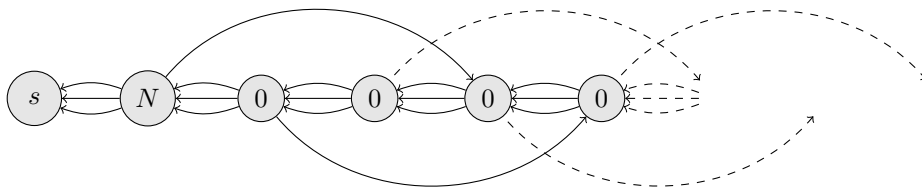


FIGURE 2.6 – PARTIE 3 – KSPM(3) dans la configuration initiale à  $N$  grains, représenté sous forme de Chip Firing Game. Dans le cas général d'un paramètre  $p$ , le graphe support de la dynamique est défini par le graphe pondéré  $\mathcal{G} = (\mathbb{N} \cup \{s\}, \mathcal{E})$  tel que  $\mathcal{E} = \{(i, j, p) : i - j = 1\} \cup \{(i, j, 1) : j - i = p\} \cup \{(0, s, p)\}$ .

Chip Firing Game, en particulier le verbe *tirer* pour parler de l'application de la règle d'itération à une colonne.

### 2.2.6 Plateau et Support

PLATEAU Un *plateau* est un ensemble d'au moins deux colonnes non-vides consécutives de même hauteur, la condition de non-nullité de la hauteur ayant pour objet de ne pas considérer comme un plateau la suite infinie de 0 terminant les configurations. La *longueur* d'un plateau est le nombre des colonnes qui le composent, et son *indice* est sa colonne la

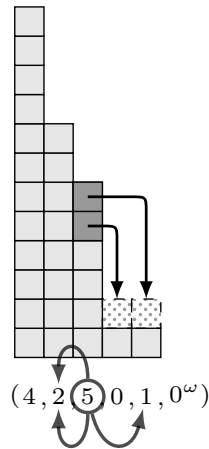


FIGURE 2.7 – Application de la règle d’itération vue comme un Chip Firing Game pour KSPM(2). La suite des pentes est inscrite en dessous de la configuration. Lorsque deux grains s’écroulent d’une colonne  $i$  vers les colonnes  $i + 1$  et  $i + 2$ , la colonne  $i$  donne 2 unités de pente à la colonne  $i - 1$ , et donne 1 unité de pente à la colonne  $i + 2$ .

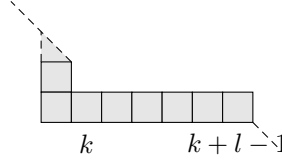
plus à gauche.

$$\begin{aligned} \llbracket k ; k + l - 1 \rrbracket \text{ est un plateau de longueur } l \text{ à l'indice } i \text{ dans } b \\ \iff \\ l \geq 2 \text{ et pour tout } i \in \llbracket k ; k + l - 2 \rrbracket : b_i = 0. \end{aligned}$$

Par exemple, les pénultième et antépénultième configurations de la figure 2.2 comportent chacune deux plateaux de longueur 2, aux indices 0 et 3.

**Proposition 2.7.** *Pour tout paramètre  $p$  et tout nombre de grains  $N$ , les configurations atteignables depuis  $(N, 0^\omega)$  ne comportent aucun plateau de longueur strictement supérieure à  $p + 1$ .*

*Démonstration.* Nous prouvons le résultat par l’absurde, en montrant qu’une telle configuration ne peut pas avoir d’antécédent sans que cela ne viole l’hypothèse selon laquelle les configurations sont des suites de pentes positives (hypothèse  $\mathcal{H}_{positive}$ ). Soient  $p$  un paramètre fixé et  $N$  un entier. Supposons donc qu’il existe une configuration  $b$  atteignable depuis  $(N, 0^\omega)$  qui comporte un plateau de longueur  $l > p + 1$  à l’indice  $k$ . Puisque  $(N, 0^\omega)$  ne comporte pas de tel plateau, il existe deux configurations  $b'$  et  $b''$  telles que  $b' \rightarrow b''$ , et  $b''$  comporte un plateau de longueur  $l$  à l’indice  $k$  alors que  $b'$  ne comporte pas de plateau de longueur supérieure ou égale à  $l$  (hypothèse  $\mathcal{H}_{plateaux}$ ).



Voyons maintenant qu'il n'existe aucun  $i$  tel que  $b' \xrightarrow{i} b''$ , ce qui terminera la preuve.

- Si  $i < k - p$  ou  $i > k + l - 1$ , alors l'application de la règle à l'indice  $i$  ne change pas les hauteurs des colonnes comprises entre  $k$  et  $k + l - 1$ , ce qui contredit  $\mathcal{H}_{plateaux}$ .
- Si  $k - p \leq i \leq k$ , alors d'après la règle de transition nous avons  $b'_{i+p} = b''_{i+p} - 1$ . Or l'hypothèse  $\mathcal{H}_{plateaux}$  nous dit que  $b''_{i+p} = 0$  (car  $l > p + 1$ ), donc  $b'_{i+p} < 0$ , ce qui est impossible (hypothèse  $\mathcal{H}_{positive}$ ).
- Si  $k < i \leq k + l - 1$ , alors d'après la règle de transition nous avons  $b'_{i-1} = b''_{i-1} - p$ . Or l'hypothèse  $\mathcal{H}_{plateaux}$  nous dit que  $b''_{i-1} = 0$ , donc  $b'_{i-1} < 0$ , ce qui est impossible (hypothèse  $\mathcal{H}_{positive}$ ).

□

**SUPPORT** Nous utiliserons le terme *support* d'une configuration  $h$  pour désigner l'ensemble des indices sur lesquelles elle comporte des grains. La *taille* du support peut ainsi être définie par

$$\max \{i : h_i > 0\} + 1.$$

**Proposition 2.8.** Soit  $p$  fixé. La taille du support de  $\pi(N)$  est en  $\Theta(\sqrt{N})$ .

*Démonstration.* Soit  $w$  la taille du support de  $\pi(N)$ . Nous allons borner inférieurement  $w$  en utilisant le fait qu'un point fixe est une configuration stable, c'est-à-dire  $\pi(N)_i \leq p$  pour tout  $i$ , et supérieurement à l'aide de la Proposition 2.7 qui borne la taille des plateaux. Intuitivement,  $\pi(N)$  a grossièrement une forme de triangle rectangle de proportions « raisonnables », dont l'aire est égale au nombre de grains qu'il contient,  $N$ . Chacun de ses côtés est donc de l'ordre de  $\sqrt{N}$  (figure 2.8).

Borne inférieure :  $\pi(N)$  est une configuration stable, donc pour toute colonne  $i$ ,  $\pi(N)_i \leq p$ . Nous obtenons,

$$N \leq \sum_{i=0}^w p i = p \frac{w(w+1)}{2} < p^2(w+1)^2$$

d'où  $\frac{1}{p}\sqrt{N} - 1 < w$ .

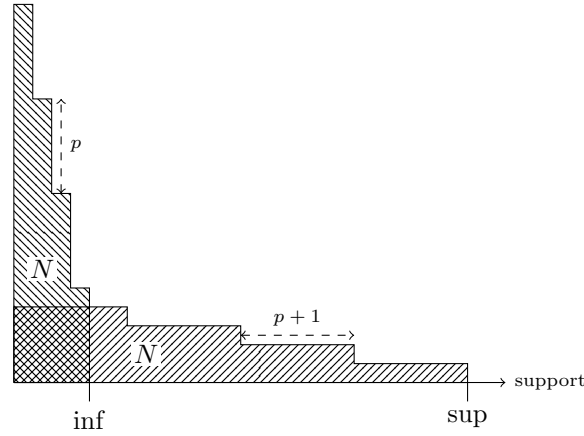


FIGURE 2.8 – Encadrement de la taille du support de  $\pi(N)$ , en  $\Theta(\sqrt{N})$ . Les différences de hauteur d’au plus  $p$  permettent de le borner inférieurement, et l’absence de plateau de taille strictement supérieure à  $p + 1$  de donner une borne supérieure.

Borne supérieure : d’après la Proposition 2.7,  $\pi(N)$  ne comporte aucun plateau de taille strictement supérieure à  $p + 1$ . Ainsi, pour  $w \geq p$ ,

$$N \geq \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{w}{p+1} \rfloor} (p+1)i \geq (p+1) \left( \frac{\left(\frac{w}{p+1} - 1\right) \frac{w}{p+1}}{2} \right) > \left( \frac{w}{p+1} - 1 \right)^2$$

Et donc  $(p+1)\sqrt{N} + p+1 > w$ .  $\square$

**GÉNÉRALISATION À DEUX DIMENSIONS** Il est possible de généraliser le modèle KSPM à deux dimensions, nous en proposons une définition intuitive. Cette généralisation suit les contraintes du modèle unidimensionnel, à savoir :

- il y a autant de directions d’éboulement que de dimensions,
- les configurations sont décroissantes dans chaque direction d’éboulement.

Cette dernière condition impose une contrainte pour l’application de la règle d’itération, qui ne doit pas transgresser la décroissance dans toutes les directions d’éboulement de la configuration obtenue.

Il est possible, en suivant ce schéma, de généraliser le modèle KSPM à un nombre arbitraire  $d$  de dimensions, bien que pour  $d > 3$  la signification physique du modèle de pile de sable sur une grille  $d$ -dimensionnelle ne soit pas claire.

Encore une fois, bien que dans le cas unidimensionnel, les modèles KSPM(1) (SPM) et BTW soient identiques, leur généralisation en plusieurs dimensions ne le sont pas (figure 1.10).

## 2.2.7 Problème de l'avalanche

Nous considérons le problème de décision suivant : à partir d'une configuration  $h$ , et de deux positions  $l$  et  $m$ , est-ce que l'ajout d'un grain à la position  $l$  entraîne une réaction en chaîne —une avalanche— qui atteint la position  $m$  ?

**Définition 2.9.** Problème de l'avalanche (AP)

**Instance :** Une configuration stable, et deux positions  $l$  et  $m$ .

**Question :** L'ajout d'un grain à l'indice  $l$ , suivi de la stabilisation, modifie-t-il la hauteur de la position  $m$  ?

**Théorème 2.10.** [FGM12]

Pour KSPM en dimensions trois ou plus, AP est **P**-complet pour tout  $p$ .

Pour KSPM en deux dimensions, AP est **P**-complet pour  $p > 1$ .

Pour KSPM en une dimension, AP\* est dans la classe **NC** pour tout  $p$ .

AP\* est une restriction de AP, dans laquelle la configuration stable  $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de l'instance vérifie  $b_i > 0$  pour tout  $i$ . La complexité de AP en une dimension n'est connue pour être dans **NC** que pour  $p = 1$  [MN99].

La classe de complexité **NC** signifie qu'il est possible de répondre à la question en temps poly-logarithmique sur une machine parallèle ayant un nombre polynomial de processeurs (relativement à la taille de l'entrée) [Sip97]. La **P**-complétude, quant à elle, indique que le modèle est intrinsèquement séquentiel —il n'est pas aisément parallélisable, sauf si  $\mathbf{P}=\mathbf{NC}$ —, et qu'il n'y a pas de moyen significativement plus rapide pour répondre à la question que de simuler l'éboulement des grains de sable, jusqu'à obtenir une configuration stable. Cette propriété d'imprédictabilité faible (une avalanche particulière n'est pas prévisible, mais le comportement asymptotique l'est éventuellement) est souvent employée comme argument de motivation dans les articles sur l'auto-organisation critique ; ce résultat montre qu'elle est formellement vérifiée à partir de la dimension 2 et  $p > 1$ .

Pour prouver la **P**-complétude de AP, les auteurs de [FGM12] le réduisent au problème de *valeur de circuit monotone* MCVP (*Monotone Circuit Value Problem*), c'est-à-dire qu'ils montrent comment simuler l'évaluation de circuits logiques dans les avalanches, à travers l'implémentation des mécanismes suivants :

- propagation d'un signal ;
- virage à 90° d'un signal ;
- croisement de deux signaux ;
- dédoublement d'un signal ;
- porte logique ET ;
- porte logique OU.

Des résultats de complexité algorithmique sur un problème proche ont été démontrés concernant le modèle BTW. Le problème du calcul de la configuration stable obtenue à partir d'une configuration quelconque est **P**-complet à partir de la dimension 3, et dans **NC** pour la dimension 1 [MN99]. Le cas de la dimension 2 est toujours ouvert, bien qu'il ait été démontré qu'il est impossible de faire se croiser des signaux [GG06].

### 2.3 PROBLÉMATIQUE

Le problème que nous adressons dans les chapitres qui suivent concerne la caractérisation de la forme du point fixe obtenu dans le modèle de pile de sable Kadanoff, en fonction des deux entiers qui le définissent : le paramètre  $p$ , et le nombre de grains  $N$ .

Cette question est motivée par la recherche d'explications combinatoires à la *complexité* du modèle BTW. Malgré les élégants développements de Deepak DHAR sur la structure abélienne des configurations récurrentes, qui sont les premiers travaux de formalisation apportés au modèle BTW, la compréhension de la dynamique de ces modèles comporte toujours de nombreux questionnements [Dha06]. L'explication de la loi de puissance expérimentalement obtenue, les nombreuses structures auto-similaires, et plus généralement : « qu'est ce qu'un phénomène d'auto-organisation critique ? » restent largement ouvertes. Nous avons déjà souligné l'idée selon laquelle nous étudions, à travers les modèles de pile de sable SPM et sa généralisation KSPM, le comportement transien des modèles BTW et KBTW, c'est-à-dire celui qui correspond au phénomène dit « d'auto-organisation », vers un état dit « critique ».

Le meilleur moyen d'engager des pistes de réflexion est de conjecturer des formes de point fixe. Pour élaborer de telles hypothèses, nous commencerons donc naturellement par présenter quelques exemples de points fixes, à partir desquels nous énoncerons une formule générale décrivant leur forme en fonction de  $p$  et de  $N$ . La figure 2.9 présente les configurations stables obtenues pour  $N = 2000$  grains, et le paramètre  $p$  allant de 1 à 4. Nous sommes en quête de motifs réguliers et généraux sur ces figures.

La première observation frappante est la régularité qui semble émerger sur la partie droite des points fixes, à partir d'un certain indice et jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de grains. Par exemple pour  $p = 3$ , le point fixe  $\pi(2000)$  se termine par la suite de pentes

$$\dots, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 0, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 0^\omega \\ \dots (3 \cdot 2 \cdot 1)^4 0 (3 \cdot 2 \cdot 1)^5 0^\omega.$$

Pour  $p = 4$ , le point fixe  $\pi(2000)$  se termine par la suite de pentes

$$\dots (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)^1 0 (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)^4 0^\omega.$$



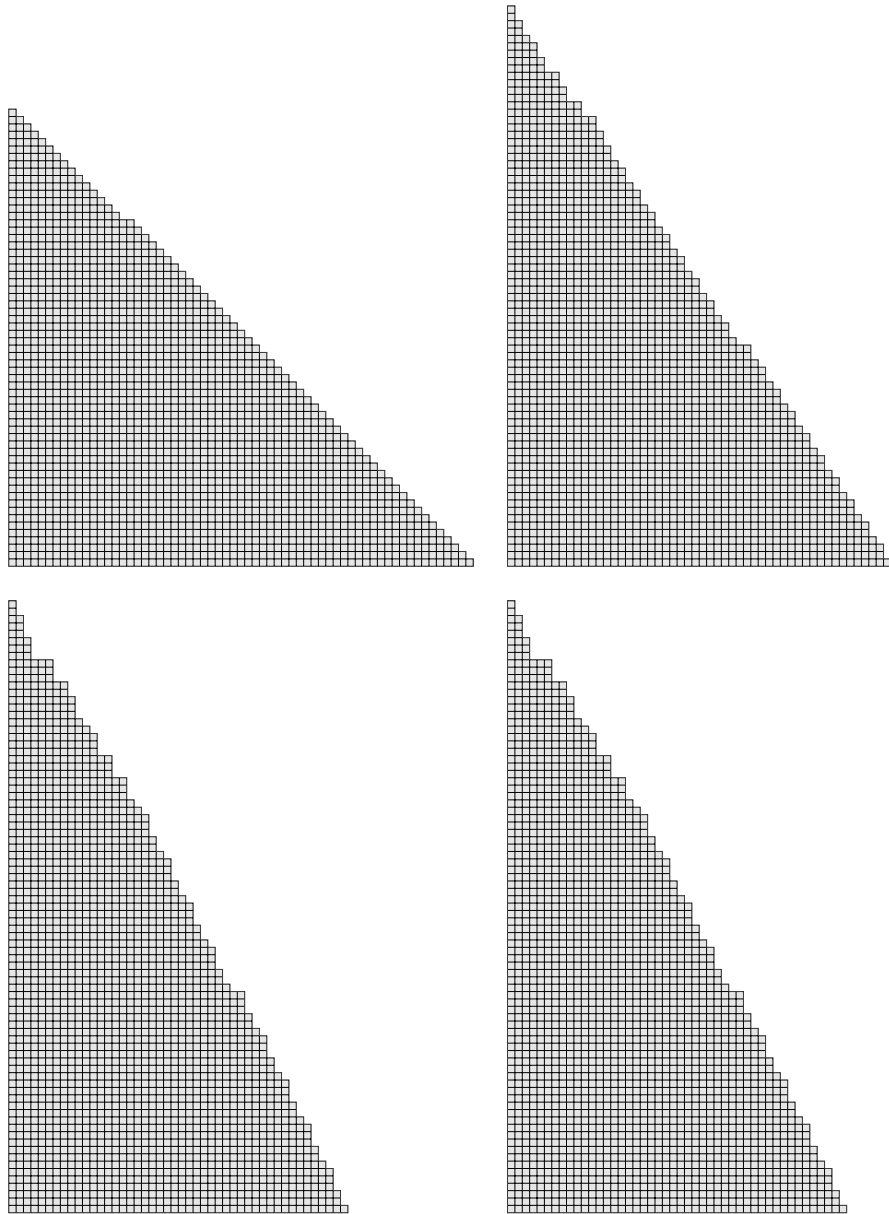
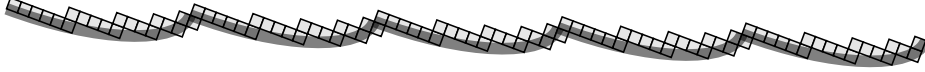


FIGURE 2.9 –  $\pi(2000)$  pour  $p = 1, 2, 3, 4$ .

La formule générale semble être  $(p \cdot p - 1 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1)^x 0 (p \cdot p - 1 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1)^y 0^\omega$ , et ce motif s'applique également aux résultats de simulation pour  $p = 1, 2$ . Nous appellerons *vague* la séquence  $(p \cdot p - 1 \cdot \dots \cdot 1)$ , pour une raison visuellement claire.



Dans la portion gauche de la configuration, en revanche, aucun motif régulier ne semble identifiable sur ces quelques exemples.

La question qui arrive naturellement est alors : à quel indice se situe la séparation ? Il est difficile d'en juger expérimentalement, la figure 2.10 présente quelques considérations basiques.

Ces observations, qui ne sont pas trivialement déductibles à partir de la définition du modèle et de petits exemples, nous ont conduits à formuler l'énoncé suivant, dont la preuve est l'objet principal de ce manuscrit.

**Théorème 2.11.** *Soit  $p$  fixé. Pour tout nombre de grains  $N$ , il existe une colonne  $n$  en  $\mathcal{O}(\log N)$  telle que*

$$\pi(N)_{\llbracket n; \infty \rrbracket} \in (p \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1)^* 0 (p \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1)^* 0^\omega$$

où  $*$  dénote les répétitions finies.

Une représentation graphique de ce résultat est proposée sur les figures 2.11 et 2.12.

Remarquons qu'asymptotiquement, lorsque le nombre de grains  $N$  tend vers l'infini, la taille relative (au support) de la portion de gauche non capturée par l'énoncé tend vers 0, de sorte que le point fixe est entièrement constitué de vagues.

Rechercher une démonstration de ce phénomène d'émergence d'une forte structure après une phase visiblement beaucoup moins ordonnée a constitué l'objectif de nos recherches. Les chapitres qui suivent décriront les moyens employés pour y parvenir.

Le chapitre 3 présentera une étude des avalanches, qui consiste en l'ajout répété d'un grain sur la colonne 0 —en analogie avec un sablier— suivi du processus de stabilisation [PR11a; PR13]. Nous verrons que sous une certaine condition, la dynamique des avalanches est « quasi-linéaire », ce qui en autorisera une description très simple, et l'intuition que nous pouvons en déduire des régularités sur les points fixes. Nous chercherons alors à montrer que la condition mentionnée est vérifiée pour toutes les avalanches, ce qui s'avérera concluant pour  $p = 2$ . Nous discuteront des difficultés rencontrées pour généraliser les techniques employées.

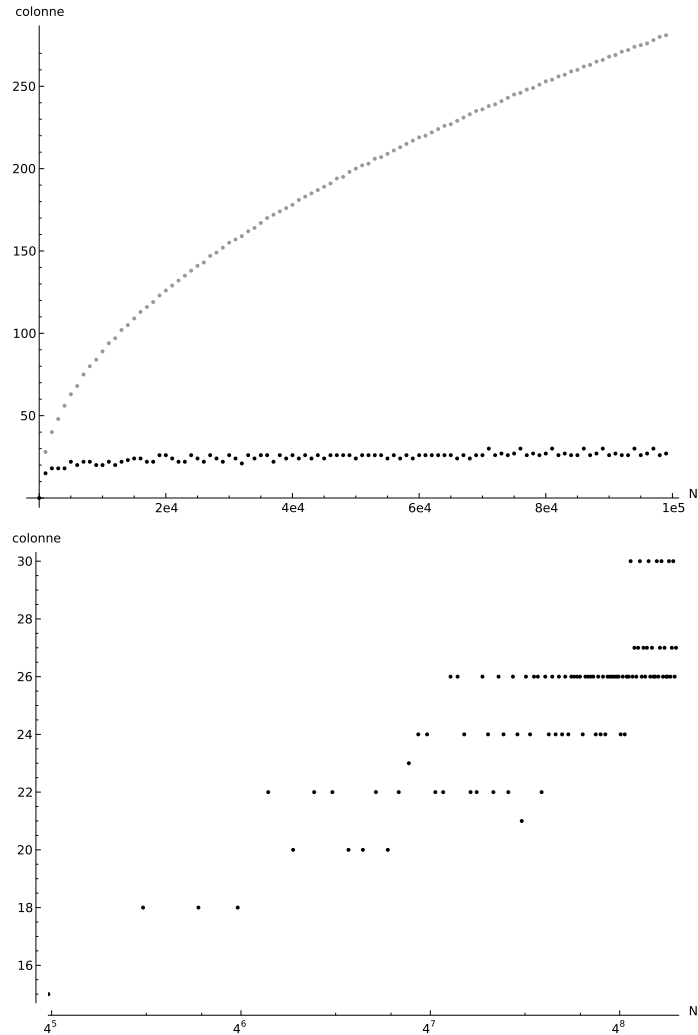


FIGURE 2.10 – Pour  $p = 4$ , apparition du motif de vague sur les 100 000 premiers points fixes, les points fixes pour  $N$  multiple de 1 000 sont représentés. Diagramme du haut : les points noirs illustrent pour chaque nombre de grains la colonne à partir de laquelle l'expression régulière  $(p \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1)^* 0 (p \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1)^* 0^\omega$  décrit le point fixe, et les points gris représentent la taille du support de la configuration. Ce motif semble compter pour une très large part des points fixes. Diagramme du bas : les points noirs illustrent à nouveau pour chaque nombre de grains la colonne à partir de laquelle les vagues apparaissent, avec une abscisse logarithmique. Sur un tel graphique, une droite indiquerait une fonction logarithmique. Graphiques générées par *sagemath* ([www.sagemath.org](http://www.sagemath.org)).

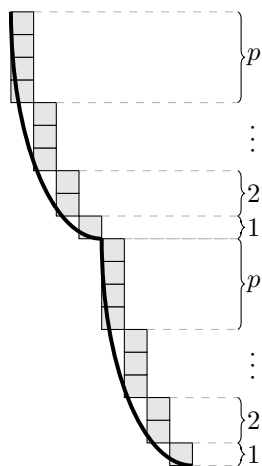


FIGURE 2.11 – Forme de vague régulière apparaissant sur la queue des points fixes. En tant que suite de différences de hauteur, une *vague* est un motif  $(p \cdot p - 1 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1)$ .

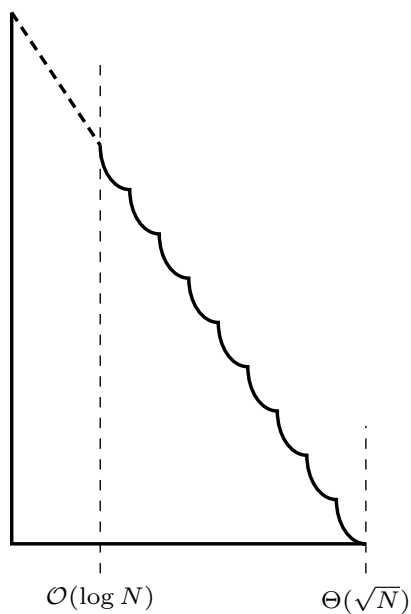


FIGURE 2.12 – Illustration du Théorème 2.11 décrivant le point fixe du modèle de pile de sable Kadanoff en fonction du nombre  $N$  de grains, pour un paramètre  $p$  fixé. À partir d'une colonne  $n$  en  $\mathcal{O}(\log N)$ , le point fixe est constitué d'une répétition de vagues.

Nous tenterons dans le chapitre 4 d'exploiter cette régularité des avalanches, prouvée pour  $p = 2$ . Nous construirons, pour une colonne  $n$ , un mot décrivant le passage de tous les grains (au cours des  $N$  premières avalanches) au dessus de cette colonne  $n$ . Ce mot contiendra ainsi l'information nécessaire à la reconstitution du point fixe pour les colonnes à la droite de  $n$ . L'idée sera ensuite d'étudier la dynamique de ces mots pour les valeurs  $n, n + 1, n + 2, \dots$  et de montrer une convergence exponentiellement rapide en  $N$  vers des mots réguliers, qui à leur tour impliquent la forme de vague. Nous verrons que cette technique est encore une fois concluante pour  $p = 2$ , ce qui prouvera le Théorème 2.11 pour le plus petit paramètre qui différencie les modèles SPM et KSPM, et nous discuterons des difficultés à généraliser ces raisonnements à tout paramètre  $p$  du modèle. [PR11b; PR13].

Une seconde approche, concluante pour tout  $p$ , sera exposée dans le chapitre 5. Cette méthode étudiera une « dynamique interne » des points fixes, dans le sens où, pour un  $p$  fixé, nous construirons un système dynamique discret tel que l'orbite d'un point choisi en fonction de  $N$  décrive le point fixe  $\pi(N)$  de la gauche vers la droite. Nous montrerons que cette orbite converge exponentiellement vite vers un ensemble de points réguliers, desquels nous déduirons l'émergence de vagues sur les points fixes, c'est-à-dire le Théorème 2.11 [PR12].



## PLÉNITUDE DES AVALANCHES

3.1	Construction inductive des points fixes . . . . .	66
3.1.1	Relation de récurrence . . . . .	66
3.1.2	Stratégies et avalanches . . . . .	68
3.2	Quasi-linearité des avalanches . . . . .	71
3.2.1	Pics et cols . . . . .	71
3.2.2	Localité des avalanches . . . . .	73
3.2.3	Description <i>à priori</i> des avalanches . . . . .	74
3.3	Plénitude des avalanches et invariabilité des points fixes .	77
3.3.1	Plénitude des avalanches . . . . .	78
3.3.2	Invariabilité des points fixes . . . . .	80
3.3.3	Colonne de plénitude globale pour KSPM(2) . . . .	81

IL EXISTE AU MOINS DEUX PROCÉDURES pour calculer un point fixe du modèle de pile de sable Kadanoff pour un paramètre  $p$  et  $N$  grains. Le premier moyen, *direct*, consiste à partir de  $N$  grains empilés en colonne initiale, puis à appliquer la règle d'itération jusqu'à obtenir une configuration stable. La variété des possibilités est à la fois un atout, car elle laisse le choix de la suite de transitions que nous étudions pour atteindre le point fixe, et une difficulté, car il est nécessaire d'avoir une idée du chemin à emprunter et des régularités qui y émergent. Le second moyen, auquel ce chapitre est dédié, procède par *induction* et consiste, à partir d'une configuration vide, à ajouter un à un les  $N$  grains sur la colonne initiale. Dans cette seconde méthode, la pile de sable grossit petit à petit, et après chaque ajout de grain nous appliquons la règle jusqu'à obtenir de nouveau une configuration stable. Nous appellerons le processus d'éboulement qui suit l'ajout d'un grain une *avalanche*. L'ajout de certains grains ne provoque aucune avalanche, alors que l'ajout d'autres grains provoque une avalanche qui s'étend sur l'ensemble de la configu-

ration. L'idée est d'étudier l'émergence de régularités sur la structure des avalanches, vérifiées à partir d'une colonne logarithmique en le nombre de grains, telles que ces régularités puissent servir de base à l'explication de la création et du maintien des vagues sur les points fixes.

Nous débuterons ce chapitre en expliquant dans la partie 3.1 pourquoi l'ajout d'un grain au point fixe  $\pi(k-1)$  suivi du processus de stabilisation mène bien au point fixe  $\pi(k)$ , ce qui nous autorisera à calculer les points fixes de façon inductive. Nous définirons ainsi formellement les *avalanches*. Dans la partie 3.2, nous verrons que les avalanches suivent une séquence d'éboulements quasi-linéaire de la gauche vers la droite, et si une propriété que nous appellerons *plénitude* est vérifiée alors nous en proposerons une description simple, par l'identification de colonnes structurant ce processus, que nous appellerons des *pics*. Cette description *à priori*, c'est-à-dire dont nous pourrions obtenir le résultat sans effectuer tous les éboulements de l'avalanche, sera le principal résultat que nous exploiterons dans le chapitre suivant. Les premières conséquences de la plénitude des avalanches seront présentées dans la partie 3.3. Nous observerons ainsi que cette propriété implique une forte invariabilité des points fixes. Une étude précise de l'émergence de la propriété de plénitude pour  $p = 2$  conclura ce chapitre.

Nous considérons un paramètre  $p$  fixé.

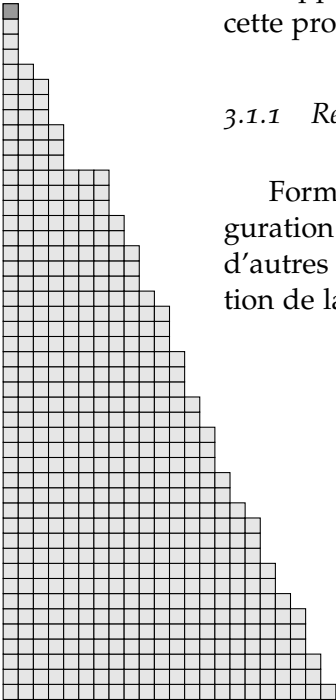
### 3.1 CONSTRUCTION INDUCTIVE DES POINTS FIXES

Dans le but de calculer  $\pi(N)$ , la procédure basique consiste à partir de la configuration initiale  $(N, 0^\omega)$  et appliquer la règle d'itération jusqu'à obtenir une configuration stable. Néanmoins, il est également possible de construire  $\pi(N)$  de façon inductive. En partant de la configuration vide  $(0^\omega)$ , ajouter un grain sur la colonne 0 et appliquer la règle tant que possible mène à  $\pi(1)$ ; ajouter un nouveau grain sur la colonne 0 et appliquer la règle tant que possible mène à  $\pi(2)$ , *etc.*... et répéter cette procédure  $N$  fois mène à  $\pi(N)$ .

#### 3.1.1 Relation de récurrence

Formellement, soit  $b$  une configuration, nous dénoterons  $b^{\downarrow 0}$  la configuration obtenue à partir de  $b$  en ajoutant un grain sur la colonne 0. En d'autres termes, si  $b = (b_0, b_1, \dots)$  alors  $b^{\downarrow 0} = (b_0 + 1, b_1, \dots)$ . La correction de la procédure décrite ci-dessus repose sur l'observation suivante,

$$\begin{aligned} \text{si } b &\rightarrow b' \\ \text{alors } b^{\downarrow 0} &\rightarrow b'^{\downarrow 0} \end{aligned}$$





car l'ajout d'un grain supplémentaire en colonne 0 n'empêche aucun éboulement de se produire, et donc par induction,

$$\begin{aligned} \text{si } b &\xrightarrow{*} b' \\ \text{alors } b^{\downarrow 0} &\xrightarrow{*} b'^{\downarrow 0}. \end{aligned}$$

En appliquant cette formule pour  $b = (k-1, 0^\omega)$  et  $b' = \pi(k-1)$ , nous obtenons

$$(k, 0^\omega) \xrightarrow{*} \pi(k-1)^{\downarrow 0}.$$

La Proposition 2.4 établit l'unicité du point fixe atteignable depuis  $(k, 0^\omega)$ , par conséquent  $\pi(k-1)^{\downarrow 0}$  atteindra également ce point fixe et nous obtenons la relation de récurrence suivante (figure 3.1),

$$\pi(k) = \pi(\pi(k-1)^{\downarrow 0}).$$

Avec la condition initiale  $\pi(0) = (0^\omega)$ , cette formule nous autorise à calculer le point fixe  $\pi(N)$  inductivement.

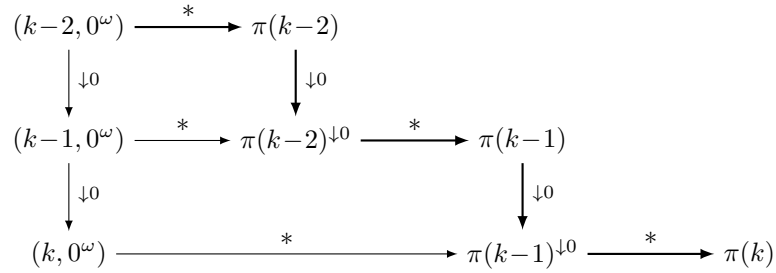


FIGURE 3.1 – Procédure inductive pour calculer les points fixes. À partir de  $\pi(k-2)$ , ajouter un grain donne  $\pi(k-2)^{\downarrow 0}$  qui est atteignable depuis  $(k-1, 0^\omega)$ , donc le processus de stabilisation mène à  $\pi(k-1)$ . Ensuite, ajouter un grain donne  $\pi(k-1)^{\downarrow 0}$  qui est atteignable depuis  $(k, 0^\omega)$ , et le processus de stabilisation mène à  $\pi(k)$ .

REMARQUE SUR LA RÉCURSIVITÉ DES TREILLIS La relation établie par l'ajout d'un grain,  $(k, 0^\omega) \xrightarrow{*} \pi(k-1)^{\downarrow 0}$ , s'étend pour les mêmes raisons à toute configuration atteignable depuis  $(k-1, 0^\omega)$ ,

pour tout  $b$  tel que  $(k-1, 0^\omega) \xrightarrow{*} b$  nous avons  $(k, 0^\omega) \xrightarrow{*} b^{\downarrow 0}$ .

Ainsi, si nous étendons également la définition de l'opérateur  $\downarrow 0$  aux ensembles de configurations  $\mathcal{B}$ ,

$$\mathcal{B}^{\downarrow 0} = \{b^{\downarrow 0} : b \in \mathcal{B}\}$$

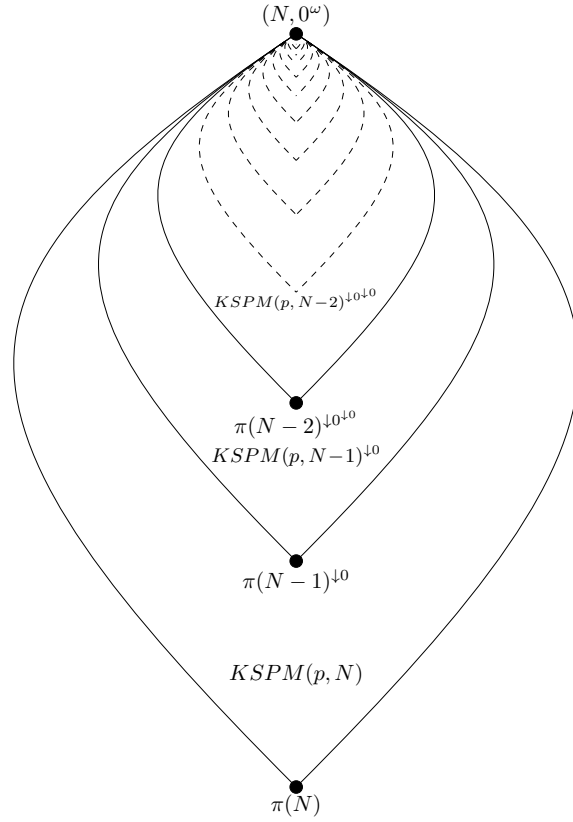


FIGURE 3.2 – Illustration de la relation  $KSPM(p, k-1)^{\downarrow 0} \subseteq KSPM(p, k)$ .

alors les ensembles de configurations atteignables depuis  $(N-1, 0^\omega)$  et  $(N, 0^\omega)$  sont reliés par

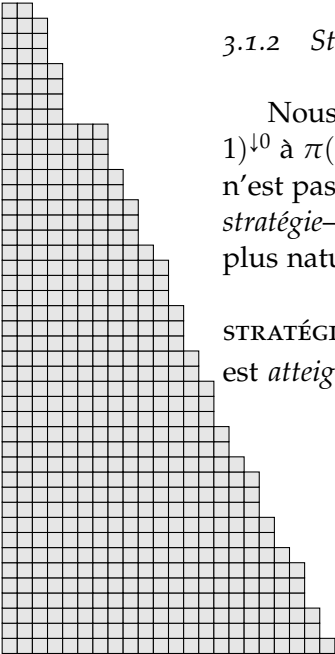
$$KSPM(p, N-1)^{\downarrow 0} \subseteq KSPM(p, N).$$

Le treillis  $KSPM(p, N)$  contient ainsi récursivement tous les treillis  $KSPM(p, k)$  pour  $k \leq N$ , comme présenté sur la figure 3.2.

### 3.1.2 Stratégies et avalanches

Nous appellerons *avalanche* la suite de transitions menant de  $\pi(k-1)^{\downarrow 0}$  à  $\pi(k)$ . Cependant, le modèle étant non-déterministe, une telle suite n'est pas unique. Nous désignerons donc une suite de transitions — une *stratégie* — particulière menant de  $\pi(k-1)^{\downarrow 0}$  à  $\pi(k)$ , qui nous semble la plus naturelle et la plus simple, par le terme  $k^{\text{ième}}$  *avalanche*.

**STRATÉGIES** Une *stratégie* est une séquence d'indices  $s = (s_1, \dots, s_T)$ .  $b'$  est *atteignable* depuis  $b$  par la stratégie  $s$  si  $b \xrightarrow{s_1} b'' \xrightarrow{s_2} \dots \xrightarrow{s_T} b'$ , et nous



noterons  $b \xrightarrow{s} b'$ . L'indice de la séquence  $s$  est ainsi interprété comme le temps, et nous dirons pour tout entier  $t \in \llbracket 1; T \rrbracket$ , que la colonne  $s_t$  est tirée au temps  $t$  dans  $s$ .

Pour toute stratégie  $s$  et toute colonne  $i$ , nous dénoterons le nombre d'éboulements de la colonne  $i$  dans la stratégie  $s$  par  $|s|_i = |\{t : s_t = i\}|$ . Soient  $s'$  et  $s''$  deux stratégies telles que  $b \xrightarrow{s'} b'$  et  $b \xrightarrow{s''} b''$ , alors si  $s'$  et  $s''$  éboulent autant de fois chaque colonne, nous avons  $b' = b''$ . En effet, nous pouvons remarquer qu'inverser l'ordre dans lequel sont effectués deux éboulements consécutifs —appelons cette opération un *flip*— ne change pas la configuration obtenue (propriété du diamant, partie 2.2.3 du chapitre 2). Ensuite, si  $s$  et  $s'$  tirent autant de fois chaque colonne, alors il est possible de joindre  $s'$  et  $s$  par des opérations de flip (par exemple, en effectuant des *tris bulles* sur  $s$  et sur  $s'$ ). Nous avons donc l'équivalence :

$$(\forall i : |s'|_i = |s''|_i) \iff b' = b''.$$

Pour deux configurations  $b$  et  $b'$ , il est ainsi possible que plusieurs stratégies permettent d'atteindre  $b'$  depuis  $b$ . Une stratégie  $s$  telle que  $b \xrightarrow{s} b'$  sera appelée d'*extrême gauche* si c'est la stratégie minimale de  $b$  à  $b'$  selon l'ordre lexicographique. Une stratégie d'*extrême gauche* est donc telle qu'à chaque itération, la transition est effectuée sur la colonne la plus à gauche possible.

**AVALANCHES** Nous définissons la  $k^{\text{ième}}$  *avalanche*  $s^k$  comme la stratégie d'*extrême gauche* de  $\pi(k-1)^{\downarrow 0}$  à  $\pi(k)$ . Dans le but d'étudier la forme des points fixes, nous commencerons donc par étudier les avalanches. Informellement, nous souhaitons décrire la séquence d'éboulements déclenchée par l'ajout d'un grain sur une configuration stabilisée. Pour  $p = 1$ , c'est-à-dire pour le modèle de pile de sable SPM, cette description est directe : le grain ajouté descend sur la droite de la configuration jusqu'à atteindre une position stable, sur deux colonnes consécutives de même hauteur. En revanche, pour  $p > 1$ , la situation n'est plus aussi simple à décrire. Un exemple d'avalanche est proposé en figure 3.3

La Proposition suivante, qui indique que chaque colonne est tirée au plus une fois au cours d'une avalanche, nous permettra de simplifier les notations utilisées dans le reste de l'exposé.

**Proposition 3.1.** *Pour toute stratégie  $s$  telle que  $\pi(N)^{\downarrow 0} \xrightarrow{s} \pi(N+1)$ , toute colonne  $i \in \mathbb{N}$  vérifie  $|s|_i \in \{0, 1\}$ .*

*Démonstration.* Soit  $s = (s_1, \dots, s_T)$  une stratégie telle que  $\pi(N)^{\downarrow 0} \xrightarrow{s} \pi(N+1)$ . Nous allons prouver que pour tous indices  $l$  et  $m$  tels que  $1 \leq l < m \leq T$ , nous avons bien  $s_l \neq s_m$ , ce qui implique le résultat (par définition  $|s|_i \geq 0$  pour tout  $i$ ). Pour cela nous montrons par induction

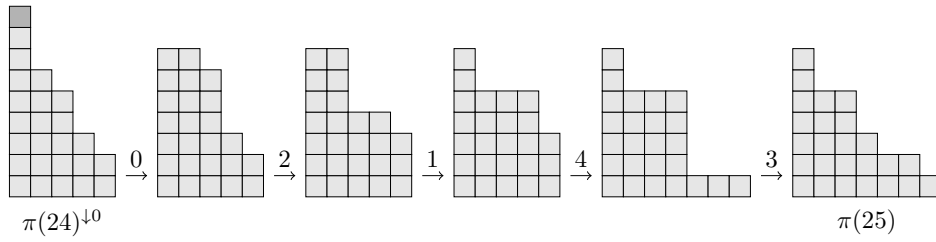


FIGURE 3.3 – Exemple d’avalanche pour  $p = 2$  : à partir du point fixe  $\pi(24)$ , nous ajoutons un grain sur la colonne 0 (grisé sur la configuration de gauche), puis appliquons la règle d’évolution jusqu’à atteindre  $\pi(25)$ . Les flèches sont étiquetées par la colonne tirée, qui est à chaque étape la colonne instable la plus à gauche.

sur  $t \leq T$  que pour  $1 \leq l < m \leq t$ , nous avons bien  $s_l \neq s_m$ . Le cas de base  $t = 1$  est vrai.

Supposons que l’hypothèse d’induction est satisfaite pour un entier  $t$  tel que  $t < T$ , et soit  $i$  une colonne précédemment tirée, c’est-à-dire telle qu’il existe un entier  $l$  tel que  $i = s_l$ . Nous notons  $b$  la configuration obtenue au temps  $t$ ,  $\pi(N) \downarrow_0 \xrightarrow{s_1} \dots \xrightarrow{s_t} b$ . Nous montrons maintenant que  $s_{t+1} \neq i$  car la colonne  $i$  est stable dans  $b$ .

Les éboulements susceptibles de modifier la pente de la configuration  $b$  à l’indice  $i$  sont aux indices (équations 2.1 du chapitre 2) :

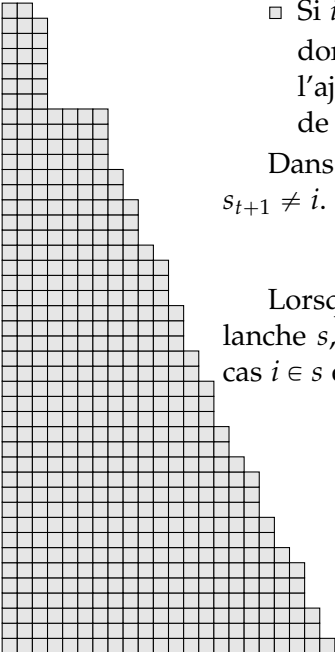
- $i - p$ , qui augmente cette valeur de 1 unité ;
- $i$ , qui diminue cette valeur de  $p + 1$  unités ;
- $i + 1$ , qui augmente cette valeur de  $p$  unités.

Par hypothèse d’induction,  $i$  a été tiré et tout autre colonne a été tirée au plus une fois, donc  $b_i \leq \pi(N)_i \downarrow_0 - (p + 1) + 1 + p$ . Ensuite,  $\pi(N)$  est une configuration stable, donc  $\pi(N)_i \leq p$ .

- Si  $i > 0$ , nous avons bien  $b_i \leq \pi(N)_i \downarrow_0 - (p + 1) + 1 + p = \pi(N)_i \downarrow_0 = \pi(N)_i \leq p$ .
- Si  $i = 0$ , alors la colonne  $i - p$  ne peut pas être tirée, et nous avons donc  $b_0 \leq \pi(N)_0 \downarrow_0 - (p + 1) + p = \pi(N)_0 \downarrow_0 - 1 = \pi(N)_0 \leq p$ , car l’ajout d’un grain sur la colonne 0 est compensé par l’impossibilité de recevoir une unité de pente.

Dans tous les cas, l’indice  $i$  est stable dans la configuration  $b$ , donc  $s_{t+1} \neq i$ . □

Lorsque nous parlons de l’éboulement d’un indice  $i$  dans une avalanche  $s$ , la Proposition 3.1 nous autorise à ne considérer que les deux cas  $i \in s$  et  $i \notin s$ , puisque chaque colonne est tirée au plus une fois.



## 3.2 QUASI-LINEARITÉ DES AVALANCHES

Dans cette partie, nous commencerons par remarquer que les avalanches suivent un processus quasi-linéaire et local, et nous décrirons en termes simples leur déroulement. Nous verrons alors qu'à partir du moment où une certaine condition est vérifiée, il est possible de prévoir ce processus très simplement, ce qui nous permettra de connaître en grande partie le résultat de l'avalanche sans avoir à effectuer tous les éboulements un à un. La partie qui suit s'intéressera alors à savoir à partir de quand cette condition est vérifiée.

## 3.2.1 Pics et cols

Le déroulement des avalanches est formé par la répétition (non-nécessairement alternée) de deux mécanismes de base :

1. ébouler un indice plus grand que tous ceux tirés jusque là ;
2. ébouler la colonne voisine gauche de la dernière colonne éboulée.

Définissons deux termes pour décrire ces comportements, puis démontrons cette observation. Soit  $s = (s_1, \dots, s_T)$  une avalanche.

Nous appellerons *pic* de l'avalanche  $s$  une colonne qui a fait progresser l'avalanche au temps où elle a été tirée,

$$s_t \text{ est un pic} \iff s_t > \max_{1 \leq i < t} s_i.$$

Nous considérerons la colonne 0 comme le premier pic de toute avalanche non vide ( $s_1 = 0$ ), et alors la colonne  $p$  sera nécessairement le second pic de toute avalanche telle que  $T \geq 2$ , car aucune autre colonne ne peut devenir instable par l'éboulement de 0 ( $s_2 = p$ ).

Remarquons que deux pics  $q$  et  $q'$  peuvent être comparés selon l'ordre chronologique ( $<_T$ ) ou spatial ( $<_S$ ). Néanmoins, par définition des pics, nous avons évidemment  $q <_T q' \iff p <_S q'$ , donc nous utiliserons les termes *plus grand que* ( $>$ ) et *plus petit que* ( $<$ ) sans ambiguïté.

Par opposition, nous appellerons *col* de l'avalanche  $s$  une colonne qui est éboulée immédiatement après sa voisine de droite,

$$s_{t+1} \text{ est un col} \iff s_{t+1} = s_t - 1.$$

Alors, intuitivement, le troisième indice éboulé par une avalanche peut être  $2p$  (un pic), ou  $p - 1$  (un col), mais toutes les autres colonnes sont toujours stables car elles n'ont reçu aucune unité de pente.

**Lemme 3.2.** *Toute avalanche  $s^k$  est constituée d'une concaténation de pics et de cols.*

*Démonstration.* Soit une avalanche  $s = (s_1, \dots, s_T)$ , montrons par induction sur  $t$  que  $s_t$  est soit un pic, soit un col. Pour  $t = 1$ , la première colonne tirée est nécessairement 0 car c'est la seule colonne qui puisse devenir instable par l'ajout d'un grain sur la colonne 0; et nous prendrons la convention  $0 > \max \emptyset$ .

Supposons le résultat vrai au temps  $t$ . Pour le temps  $t + 1$ , notons que l'égalité de  $s_{t+1}$  et  $s_t$  est impossible d'après le Lemme 3.1, et posons  $s_{t-j}$  avec  $j \geq 0$  le plus grand pic avant le temps  $t + 1$ . Par hypothèse d'induction, les colonnes  $s_t$  à  $s_{t-j} - 1$  sont donc des cols.

- Si  $s_{t+1} > s_t$ , montrons que  $s_{t+1}$  est un pic. Par induction sur  $i$  allant de 0 à  $j - 1$ , nous avons  $s_{t+1} > s_t + i$  car  $s_t + i$  a déjà été tirée par hypothèse et il n'est pas possible de tirer deux fois une colonne (Lemme 3.1). Nous déduisons de cette induction que  $s_{t+1} \geq s_{t-j}$ , et par le même argument (Lemme 3.1) que  $s_{t+1}$  est plus grande que le dernier pic précédent ( $s_{t-j}$ ), et est donc elle-même un pic.
- Si  $s_{t+1} < s_t$ , montrons que  $s_{t+1}$  est un col. Par l'absurde, si ce n'est pas le cas, c'est-à-dire si  $s_{t+1} < s_t - 1$ , alors, puisque l'éboulement de  $s_t - 1$  ne change pas la pente à l'indice  $s_{t+1}$ , celui-ci était déjà instable au temps  $t$ , ce qui contredit que l'avalanche soit d'extrême gauche : au temps  $t$  l'avalanche a tiré  $s_t$  alors que  $s_{t+1}$  était instable et  $s_{t+1} < s_t$ .

□

**TRAINÉE** D'après le Lemme 3.2, une avalanche est une concaténation de pics et de cols. Dans la plupart des cas, nous observons un pic suivi d'une séquence de cols (contigus par définition), puis un nouveau pic suivi d'une séquence de cols, et ainsi de suite. Pour un pic  $q$ , nous appellerons la *trainée* de  $q$  la séquence de colonnes formée de lui-même et la séquence des cols qui s'éboulement à sa suite. Formellement, soit  $s = (s_1, \dots, s_T)$  une avalanche et  $q$  un pic tel que  $q = s_t$ , alors la *trainée* de  $q$ , dénotée  $\widehat{q}$  est définie inductivement par,

$$\left\{ \begin{array}{l} q \in \widehat{q} \\ \text{si } s_{t+1} \text{ est un col et } s_t \in \widehat{q} \text{ alors } s_{t+1} \text{ est rajoutée à la suite de } \widehat{q}. \end{array} \right.$$

Nous pouvons tirer le Corollaire suivant du Lemme 3.2.

**Corollaire 3.3.** Une avalanche est une stratégie formée par une concaténation de trainées, qui sont ordonnées, et ne s'intersectent pas.

*Démonstration.* Les trainées ne s'intersectent pas par le Lemme 3.1, et sont ordonnées, c'est-à-dire que les colonnes de chaque trainée sont toutes plus grandes que celles des trainées précédentes dans la stratégie, par définition des pics. □

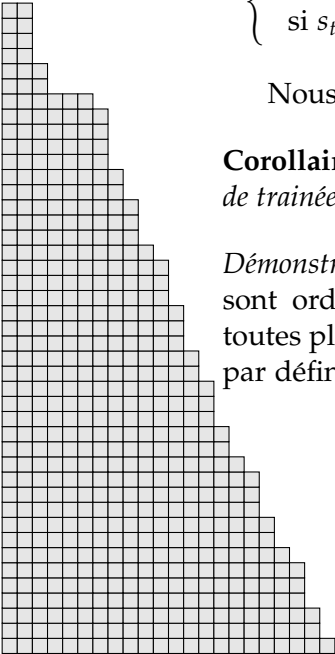




FIGURE 3.4 – Sur ce diagramme, la ligne noire indique l'ordre dans lequel les colonnes sont écroulées (une colonne est représentée par une case). Les pics font bondir la ligne pour écrouler une colonne sur la droite, et les traînées (un pic et sa séquence de cols) forment des lignes horizontales allant de la droite vers la gauche.

Ce Corollaire est schématisé sur la figure 3.4.

Nous remarquons ainsi la *quasi-linéarité* des avalanches, qui procèdent de la gauche vers la droite par bonds successifs. La partie qui suit s'intéresse à la longueur maximale des sauts vers la droite, mesurée par la distance entre deux pics successifs.

*Remarque 3.4.* Nous pouvons associer à un pic  $q$  un temps  $t$  qui correspond au temps auquel est tiré la dernière colonne de sa traînée, et que nous appellerons *terminus*. Pour une avalanche  $s$ , un pic  $q$  et sa traînée  $\widehat{q}$ , le *terminus* de  $q$  est le temps  $t_q$  tel que

$$t_q = \max\{t : s_t \in \widehat{q}\} = \arg \min_t \{s_t : s_t \in \widehat{q}\}$$

par définition des cols. Ainsi, toutes les colonnes qui sont tirées avant le temps terminus  $t_q$  sont à la gauche de  $q$ , et toutes les colonnes qui sont tirées après le temps  $t_q$  sont à la droite de  $q$ .

### 3.2.2 Localité des avalanches

Nous pouvons raffiner la description des avalanches, en considérant un aspect *local* de ces stratégies.

**Lemme 3.5.** Soit  $s^k$  la  $k^{\text{ième}}$  avalanche.

$$q > 0 \text{ est un pic de } s^k \Rightarrow \begin{cases} \pi(k-1)_q = p \\ \text{il existe un pic précédent } q' \text{ vérifiant } q - q' \leq p \end{cases}$$

Informellement, ce résultat indique que les avalanches sont des processus *locaux* : à un temps  $t$ , la prochaine colonne tirée ne peut pas être à distance —ni sur la droite, ni sur la gauche par le Corollaire 3.3— supérieure à  $p$  de la colonne précédemment tirée la plus à droite,  $\max s_{\llbracket 1;t \rrbracket}$ . Imaginons, durant une avalanche, suivre le processus avec une fenêtre de taille  $2p + 1$  centrée sur la colonne tirée la plus à droite, le Lemme 3.5 affirme que nous verrons tous les écroulements effectués par cette avalanche.

*Démonstration.* Soit  $t$  tel que  $q = s_t^k$ . Par définition  $q' = \max s_{\llbracket 1; t \rrbracket}$  est un col. Montrons que les deux conclusions sont bien vérifiées.

- Par définition des pics, au temps  $t$  la colonne  $q$  ne peut avoir reçu des unités de pente que de colonnes à sa gauche. C'est-à-dire, au plus une unité de pente (Lemme 3.1) de la part de la colonne  $q - p$  (d'après la règle d'itération), donc  $\pi(k-1)_q + 1 > p$  (est instable). Or initialement  $\pi(k-1)$  est un point fixe, donc  $\pi(k-1)_q \leq p$  (est stable), et nous concluons que  $\pi(k-1)_q = p$ .
- Par ce qui précède, puisque  $\pi(k-1)_q$  est stable, nous avons nécessairement que la colonne  $q - p$  a été tirée pour déstabiliser la colonne  $q$ , c'est-à-dire  $q - p \in s_{\llbracket 1; t \rrbracket}$ . Nous avons alors  $q - p \leq \max s_{\llbracket 1; t \rrbracket} = q'$ , ce qui permet de conclure. □

Notons que la réciproque du Lemme 3.5 est fautive. Par exemple le point fixe pour  $p = 2$  et  $N = 34$  grains est  $\pi(34) = (2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 0^\omega)$ , et la 35<sup>ème</sup> avalanche éboule la colonne 2 avant la colonne 1, donc 1 n'est pas un pic.

### 3.2.3 Description à priori des avalanches

Nous allons maintenant nous intéresser à une condition qui, à partir du moment où elle est vérifiée, permet une description à priori des avalanches, dans le sens où nous identifions les *pics* et les *cols* de l'avalanche  $s^k$  simplement à partir de conditions sur les valeurs de  $\pi(k-1)$ .

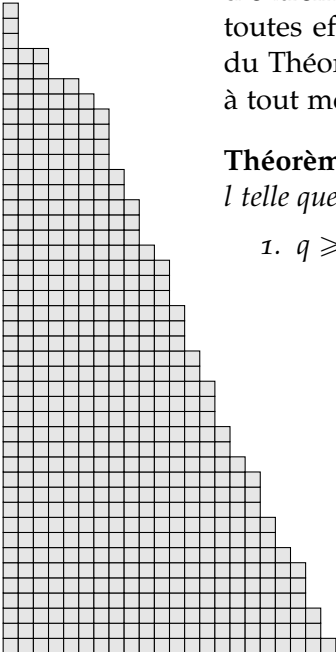
D'après le Lemme 3.5, un pic  $q$  est une colonne qui a initialement une pente de valeur  $p$ . Intuitivement, ce qui rend l'identification des pics difficile est de savoir si une colonne qui possède une pente  $p$  va ou non recevoir une unité de pente depuis la colonne à distance  $p$  sur sa gauche, d'indice  $q - p$ .

Cependant, lorsque  $p$  colonnes consécutives sont tirées, alors toutes les  $p$  colonnes suivantes reçoivent une unité de pente, donc toutes celles qui avaient une valeur  $p$  seront instables, et puisque l'avalanche est d'extrême gauche elle les éboulera de la gauche vers la droite, et ce seront toutes effectivement des pics. C'est l'idée qui est suivie dans la preuve du Théorème suivant, avec pour hypothèse d'induction que nous avons à tout moment ces  $p$  colonnes consécutives tirées.

**Théorème 3.6.** Soit  $s^k$  la  $k^{\text{ème}}$  avalanche, et supposons qu'il existe une colonne  $l$  telle que  $\llbracket l; l + p - 1 \rrbracket \subseteq s^k$ . Alors il existe un pic  $q_0$  parmi  $\llbracket l; l + p - 1 \rrbracket$ , et

1.  $q \geq l + p$  est un pic de  $s^k$  si et seulement si

$$\begin{cases} \pi(k-1)_q = p \\ \text{il existe un pic plus petit } q' \text{ vérifiant } q - q' \leq p \end{cases}$$





2. Pour toute colonne  $i \geq l + p$  entre deux pics,  $i$  est un col.

Une représentation graphique du Théorème 3.6 est donnée en figure 3.5.

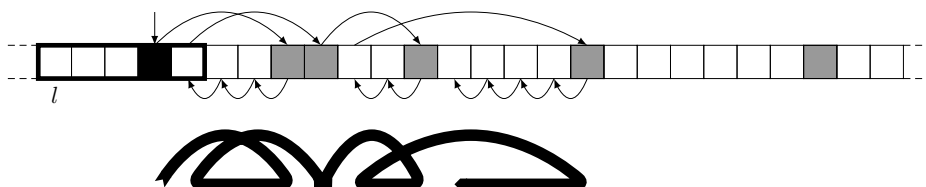


FIGURE 3.5 – Illustration du Théorème, pour  $p = 5$ . En haut : Les colonnes encadrées,  $l$  à  $l + p - 1$ , sont supposées tirées ; la colonne noire est le plus grand pic strictement inférieur à  $l + p$  ; une colonne  $q$  est grise si et seulement si  $\pi(k - 1)_q = p$  ; les flèches décrivent l'ordre dans lequel l'avalanche effectue les éboulements. En bas : représentation schématisée de l'avalanche.

*Démonstration.* Par localité des avalanches (Lemme 3.5), il existe au moins un pic  $q_0$  parmi  $\llbracket l ; l + p - 1 \rrbracket$ , car dans le cas contraire il n'est pas possible d'ébouler la colonne  $l + p - 1$ .

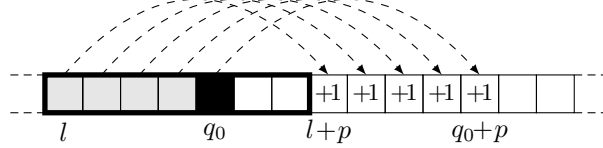
Le Lemme 3.5 nous donne que les conditions énoncées sur les pics sont nécessaires, il reste à montrer qu'elles sont suffisantes et que toutes les colonnes entre deux pics sont ébouleées, ce qui conclura la preuve. Si  $\max s^k = l + p - 1$ , alors le Théorème est vrai. Dans le cas contraire, il y a au moins un pic d'indice supérieur ou égal à  $l + p$ .

Nous allons donc montrer que toutes les colonnes sont tirées entre deux pics, et que chaque nouveau pic tiré est le plus petit qui vérifie les conditions énoncées, ce qui permet de conclure car toutes les colonnes qui vérifient ces conditions seront des pics. Nous allons procéder par induction sur le temps, avec une hypothèse qui sera vérifiée pour tous les temps de terminus d'un pic. Nous commençons par présenter le cas de base qui utilise l'hypothèse de l'énoncé selon laquelle nous avons  $p$  colonnes consécutives tirées, et cela nous mènera à la formulation de l'hypothèse d'induction.

Soit  $q_0$  le plus grand pic parmi  $\llbracket l ; l + p - 1 \rrbracket$  (le carré noir sur la figure 3.5), avec  $t_0$  tel que  $s_{t_0}^k = q_0$ . Nous considérons deux cas, dont l'un est traité par l'hypothèse d'induction à venir.

- Le cas  $q_0 = l + p - 1$  est traité par le cas général qui suit.
- Si  $q_0 < l + p - 1$ , alors il existe un pic  $q_1 \geq l + p$ , sinon la colonne  $l + p - 1$  n'est pas tirée. Soit  $t_1$  tel que  $s_{t_1}^k = q_1$ . Par la remarque

3.4, au temps  $t_1 - 1$  (temps terminus de  $q_0$ ) les colonnes  $l$  à  $q_0$  sont tirées, ce qui augmente de une unité la pente de chacune des colonnes  $l + p$  à  $q_0 + p$ .



Montrons que le pic suivant est bien le plus petit vérifiant les conditions de l'énoncé, c'est-à-dire  $q = \min\{i : l + p \leq i \leq q_0 + p \text{ et } \pi(k-1)_i = p\}$ . En effet, par maximalité de  $q_0$  et puisque l'avalanche est d'extrême gauche, au temps  $t_1 - 1$  la plus petite colonne instable est  $q$ , donc  $q_1 = q$  est un pic. Ensuite,  $l + p - 1$  est tirée mais n'est pas un pic, donc par le Lemme 3.2 c'est un col. Il est ainsi nécessaire que  $l + p + 1$  soit tirée, qui n'est pas un pic, donc un col, et a elle-même besoin que  $l + p + 2$  soit tirée, etc... jusque  $q_1 - 1$  qui est tirée à la suite de  $q_1$ , et par conséquent toutes les colonnes de  $l + p$  à  $q_1 - 1$  sont des cols. Nous arrivons au temps terminus de  $q_1$ , avec toutes les colonnes de  $q_1 - p + 1$  à  $q_1$  qui sont tirées.

Dans le cas général, nous partons de l'hypothèse suivante, vérifiée au temps terminus de  $q_1$  (ou au temps terminus de  $q_0$  si  $q_0 = l + p - 1$ ).

**Hypothèse d'induction :**

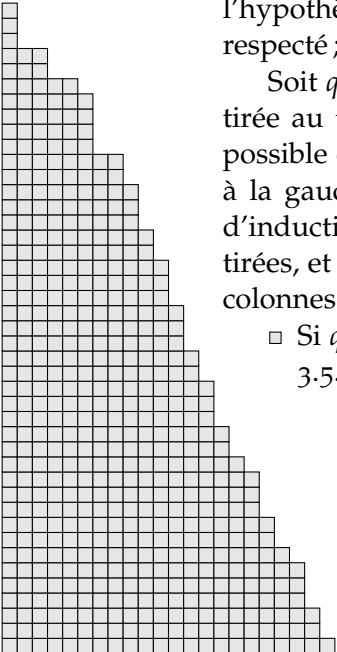
Soit  $t$  le temps terminus du dernier pic tiré  $q$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } i \in \llbracket q - p + 1 ; q \rrbracket : i \in s_{\llbracket 1 ; t \rrbracket}^k \\ \text{et pour tout } i > q : i \notin s_{\llbracket 1 ; t \rrbracket}^k \end{array} \right.$$

Ce qui signifie qu'au temps terminus de  $q$ , les  $p$  colonnes précédant  $q$  ont été tirées, et aucune à la droite de  $q$ . Partons de cette hypothèse, et considérons : soit un nouveau pic jusqu'à son temps terminus, auquel cas l'hypothèse d'induction sera à nouveau vérifiée et l'énoncé du Théorème respecté ; soit la fin de l'avalanche qui conclut la démonstration.

Soit  $q' = \min\{i > q : \pi(k-1)_i = p\}$  notre pic candidat, car la colonne tirée au temps  $t + 1$  est un pic (par les Lemmes 3.1 et 3.5, il n'est pas possible de tirer une colonne à la gauche de  $q$  car cette colonne doit être à la gauche de  $q - p$ , qui est trop éloignée de  $q$ ). D'après l'hypothèse d'induction, toutes les colonnes entre  $q + 1$  et  $q + p$  ne sont pas encore tirées, et ont chacune reçu exactement une unité de pente (de la part des colonnes  $\llbracket q - p + 1 ; q \rrbracket$ ).

- Si  $q' - q > p$ , alors l'avalanche termine par contraposée du Lemme 3.5.



- Si  $q' - q \leq p$ , alors au temps  $t + 1$ ,
  - $q'$  est instable ;
  - toutes les colonnes entre  $q$  et  $q'$  sont stables par minimalité de  $q'$ .

Donc  $q' = s_{t+1}^k$  est un pic, car les avalanches sont d'extrême gauche (partie 1 de l'énoncé). L'éboulement de  $q'$  donne  $p$  unités de pente à  $q' - 1$  qui devient instable ( $q' - 1$  avait déjà reçu une unité de pente lors de l'éboulement de  $q' - p - 1 \in \llbracket q - p + 1 ; q \rrbracket$ ) et s'éboule, ce qui donne  $p$  unités de pente à  $q' - 2$  qui devient instable et s'éboule, etc... jusqu'à l'éboulement de  $q + 1$  qui intervient au temps terminus de  $q'$  (partie 2 de l'énoncé). L'hypothèse d'induction est alors vérifiée pour  $q'$  et son temps terminus  $t'$ .

□

D'après le Théorème 3.6, l'avalanche au delà de l'indice  $l + p$  est entièrement déterminée par l'ensemble des pics qu'elle contient : le plus petit prochain pic est éboulé, suivi de toutes les colonnes qui le séparent du pic précédent (des cols), puis le plus petit prochain pic est éboulé, suivi de toutes les colonnes qui le séparent du pic précédent, et ainsi de suite<sup>1</sup>. De plus, à partir du pic  $q_0$  dans  $\llbracket l ; l + p - 1 \rrbracket$ , l'identification des pics est très simple : pour un dernier pic  $q'$ , le pic suivant est la colonne  $q$  de plus petit indice vérifiant  $\pi(k - 1)_q = p$  et  $q - q' \leq p$ . Si il n'existe pas de tel  $q$ , l'avalanche s'arrête.

### 3.3 PLÉNITUDE DES AVALANCHES ET INVARIABILITÉ DES POINTS FIXES

Éclairés par le Théorème 3.6, nous pouvons distinguer deux mouvements au cours d'une avalanche, séparés par l'éboulement de  $p$  colonnes consécutives :  $l, l + 1, \dots, l + p - 1$ . Avant cet indice  $l$  le comportement semble difficilement prévisible sans effectuer tous les éboulements. À partir de l'indice  $l$ , en revanche, l'avalanche avance de pic en pic, et à chaque pic tiré, le « trou » le séparant du pic précédent est « bouché » avant que l'avalanche ne continue sa progression.

La colonne  $l$  dépend du paramètre  $p$  et du nombre de grains  $N$ , et nous nous intéressons maintenant à évaluer cette dépendance. Pour montrer l'émergence de motifs réguliers sur les points fixes, notre but sera ainsi de prouver l'émergence exponentiellement rapide de régularités sur les avalanches, puis d'exploiter ces régularités pour en déduire l'émergence des formes de vague observées. Ce dernier point sera développé dans le chapitre 4, concentrons pour l'instant sur la dépendance au nombre de grains  $N$  de l'indice  $l$ , toujours pour un paramètre  $p$  fixé.

1. Nous utilisons le terme *boule de neige* pour désigner une avalanche qui suit ce processus.

## 3.3.1 Plénitude des avalanches

Une avalanche qui ne tire pas  $p$  colonnes consécutives comporte ce que nous appellerons des *trous*. Un *trou* dans la  $k^{\text{ième}}$  avalanche  $s^k$  est une colonne non tirée dans  $s^k$  telle qu'au moins une des colonnes qui sont à sa droite est tirée. Nous dirons que la  $k^{\text{ième}}$  avalanche  $s^k$  est *pleine à partir de  $l$*  si elle ne comporte aucun trou d'indice supérieur ou égal à  $l$  :

$$s^k \text{ est pleine à partir de } l \iff \exists m \text{ tel que } \begin{cases} \text{pour tout } i, l \leq i \leq m : i \in s^k \\ \text{pour tout } i, m < i : i \notin s^k \end{cases}$$

où  $m$  est compris comme la colonne la plus à droite de l'avalanche. Nous déduisons le Corollaire suivant de la seconde partie du Théorème 3.6.

**Corollaire 3.7.** *Dans une avalanche  $s$ , si une colonne  $l$  vérifie  $\llbracket l ; l + p - 1 \rrbracket \subseteq s$ , alors  $s$  est pleine à partir de  $l$ .*

Pour exploiter la propriété de plénitude des avalanches et en déduire des régularités sur les points fixes, l'idée que nous suivrons est de procéder par induction sur les avalanches. Nous requérons donc naturellement la plénitude de toutes les avalanches à partir d'une certaine colonne. La *colonne de plénitude globale*,  $\mathcal{L}(p, N)$ , sera ainsi définie comme l'indice minimal tel que les  $N$  premières avalanches soient pleines à partir de  $\mathcal{L}(p, N)$ . Lorsque  $p$  et  $N$  seront fixés, nous dénoterons parfois simplement cet indice par  $\mathcal{L}$ . La colonne de plénitude globale est formellement définie comme suit.

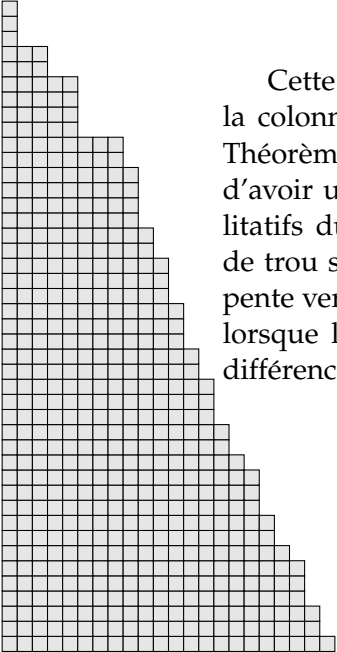
**Définition 3.8.**  $\mathcal{L}'(p, k)$  est la colonne minimale telle que la  $k^{\text{ième}}$  avalanche soit pleine à partir de  $\mathcal{L}'(p, k)$ ,

$$\mathcal{L}'(p, k) = \min \left\{ l \mid \exists m : \begin{cases} \forall i \in \llbracket l ; m \rrbracket, i \in s^k \\ \forall i \in \llbracket m ; \infty \rrbracket, i \notin s^k \end{cases} \right\}.$$

La colonne de plénitude globale,  $\mathcal{L}(p, N)$ , est ainsi définie par,

$$\mathcal{L}(p, N) = \max \{ \mathcal{L}'(p, k) \mid k \leq N \}.$$

Cette définition est illustrée sur la figure 3.6. Expérimentalement, la colonne de plénitude globale semble être « petite », de sorte que le Théorème 3.6 décrive une large partie de l'avalanche. Il est difficile d'avoir une intuition claire sur cette observation, et les arguments qualitatifs du type « moins il y a de trou à une position, moins il y aura de trou sur la droite, parce que plus de colonnes donnent une unité de pente vers la droite, et les colonnes qui reçoivent cette unité s'écrouleront lorsque leur voisin de droite s'écroulera en leur donnant  $p$  unités de différence de hauteur » semblent peu concluants. Certes, d'un côté une



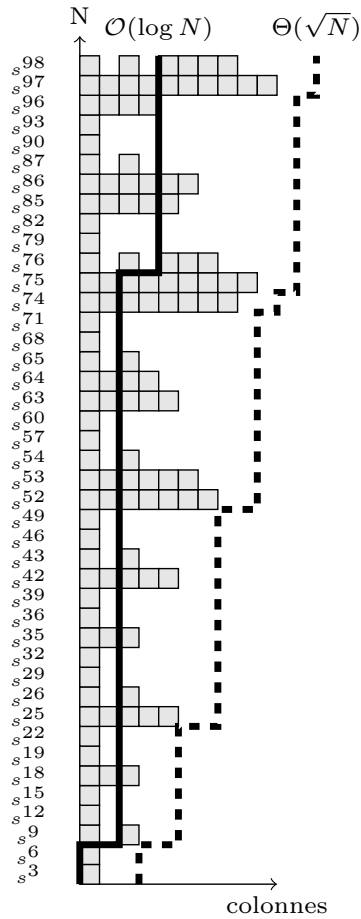


FIGURE 3.6 – Colonne de plénitude globale pour  $p = 2$ . Une avalanche est représentée par ligne, les avalanches vides (qui n'éboulent aucune colonne) sont ignorées. Un carré gris indique une colonne tirée, par exemple la 54<sup>ième</sup> avalanche a tiré les colonnes 0 et 2. La ligne noire illustre la colonne de plénitude globale  $\mathcal{L}(2, N)$ , et la ligne pointillée représente la colonne non-vide maximale (la taille du support). Cette ligne pointillée est deux colonnes au devant de la colonne tirée la plus à droite car l'application de la règle déplace deux grains vers la droite. Le Lemme 3.11 montre que la fonction  $\mathcal{L}(2, N)$  est en  $\mathcal{O}(\log N)$ .

colonne  $i$  qui s'éboule a de grandes chances d'entraîner l'éboulement de la colonne  $i - 1$ , mais d'un autre côté, tant que nous n'avons pas  $p$  colonnes consécutives tirées, quoi qu'il se soit passé jusque là dans le déroulement de l'avalanche il est possible d'observer jusqu'à  $p - 1$  trous consécutifs. Une étude concluante pour  $p = 2$  sera présentée dans la partie 3.3.3.

*Remarque 3.9.* Pour tout paramètre  $p > 1$ , l'avalanche  $s^{(p+1)^2}$  comporte un trou sur la colonne 1. Ainsi,  $\mathcal{L}(p, N) > 0$  pour  $N \geq (p + 1)^2$ . En nous intéressant à la quasi-linéarité des avalanches décrite par le Théorème 3.6 et à ses implications, nous nous permettrons ainsi bien souvent d'ignorer le cas particulier de la colonne 0, qui reçoit un grain supplémentaire pour déclencher l'avalanche.

### 3.3.2 Invariabilité des points fixes

Cette partie présente une remarque directe liée aux conséquences de la plénitude d'une avalanche sur la forme des points fixes : sur les colonnes d'un point fixe où l'avalanche est pleine, les valeurs de pente ne sont pas modifiées par le passage de l'avalanche, excepté sur quelques colonnes à chaque extrémité.

**Proposition 3.10.** Soit  $s^k$  la  $k^{\text{ième}}$  avalanche.

1. Pour toute colonne  $i \in \llbracket \mathcal{L}(p, k) + p ; \max s^k \rrbracket \cup \llbracket \max s^k + p ; \infty \rrbracket$  :

$$\pi(k)_i = \pi(k - 1)_i.$$

2.  $\pi(k)_{\max s^k} = 0$ .

3. De plus, si  $\mathcal{L}(p, N) + p \leq \max s^k$ , alors

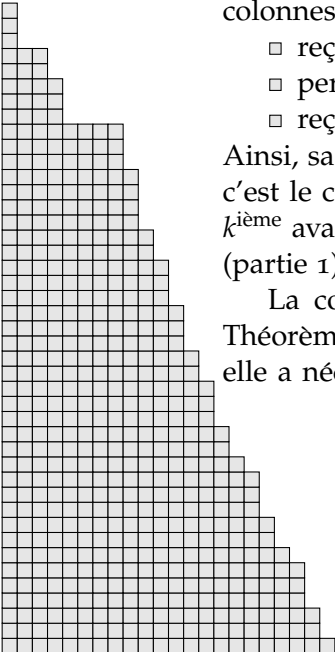
$$\text{pour toute colonne } j \in \llbracket \max s^k ; \max s^k + p \rrbracket : \pi(k)_j = \pi(k - 1)_j + 1.$$

*Démonstration.* D'après la règle d'itération du modèle (équations 2.1 du chapitre 2), la différence de hauteur d'une colonne  $i$  est modifiée seulement si l'une des colonnes  $i - p$ ,  $i$ , ou  $i + 1$  est tirée. Toutefois, si ces trois colonnes sont tirées, alors la colonne  $i$

- reçoit 1 unité par l'éboulement de  $i - p$ ;
- perd  $p + 1$  unités par l'éboulement de  $i$ ;
- reçoit  $p$  unités par l'éboulement de  $i + 1$ .

Ainsi, sa différence de hauteur est inchangée. Par définition de  $\mathcal{L}(p, N)$ , c'est le cas pour toutes les colonnes entre  $\mathcal{L}(p, k) + p$  et  $\max s^k$ , donc la  $k^{\text{ième}}$  avalanche, qui va de  $\pi(k - 1)$  à  $\pi(k)$ , laisse ces colonnes inchangée (partie 1).

La colonne d'indice  $\max s^k$  est par définition un pic, donc par le Théorème 3.6 nous avons  $\pi(k - 1)_{\max s^k} = p$ . Au cours de l'avalanche, elle a nécessairement reçu exactement une unité de pente de la gauche



pour devenir instable (+1), et s'est éboulé ( $-p - 1$ ), donc  $\pi(k)_{\max s^k} = 0$  (partie 2).

Enfin, l'éboulement des  $p$  plus grandes colonnes de l'avalanche donne 1 unité de pente à chacune des  $p$  colonnes suivantes (partie 3).  $\square$

Un exemple illustrant cette proposition est proposé sur la figure 3.7.

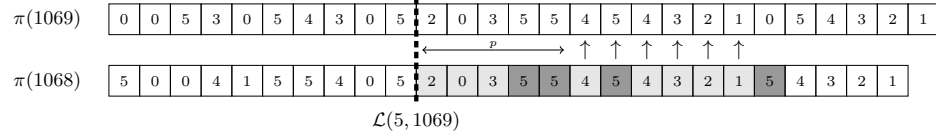


FIGURE 3.7 —  $p = 5$ ,  $\pi(1068)$  et  $\pi(1069)$  sont représentés par leur séquence de pentes. Une partie de la 1069<sup>ième</sup> avalanche,  $s^{1069}$ , est illustré : un carré gris clair est une colonne tirée, un carré gris foncé est un pic. Par définition,  $s^{1069}$  est pleine à partir de  $\mathcal{L}(5, 1069)$ . La Proposition 3.10 est vérifiée : pour toute colonne  $i \in \llbracket \mathcal{L}(5, 1069) + p ; \max s^{1069} \rrbracket$ , nous avons bien  $\pi(1069)_i = \pi(1068)_i$

Nous rappelons que pour tout  $p$ , la colonne de plénitude globale semble être « petite », et donc l'invariabilité des points fixes semble présente sur une partie importante des points fixes. Cette portion garde ainsi la même forme d'une avalanche à la suivante, ce qui entraîne intuitivement que la prochaine avalanche aura un comportement similaire sur cette partie de la configuration. Nous tenterons d'établir formellement et d'exploiter cette similarité des avalanches successives dans le chapitre suivant, en tenant compte des changements entraînés sur les bords d'une avalanche  $s^k$  : de  $\mathcal{L}(p, k)$  à  $\mathcal{L}(p, k) + p - 1$ , et de  $\max s^k$  à  $\max s^k + p$ . Pour y parvenir, nous utiliserons la description des avalanches du Théorème 3.6.

Avant cela, pour justifier la pertinence de l'étude qui suivra, nous proposons dans la partie 3.3.3 une preuve pour  $p = 2$  que la colonne de plénitude globale est « petite » : en  $\mathcal{O}(\log N)$ , comparé au support de taille  $\Theta(\sqrt{N})$ . De ce fait, l'invariabilité des avalanches sera observée asymptotiquement —lorsque  $N \rightarrow \infty$ — sur tout le support de tous les points fixes, au moins pour  $p = 2$ .

### 3.3.3 Colonne de plénitude globale pour $KSPM(2)$

Dans cette partie, nous montrons que la colonne de plénitude globale  $\mathcal{L}(2, N)$  est en  $\mathcal{O}(\log N)$ . Nous pourrions donc appliquer le Théorème 3.6 et la Proposition 3.10 à chacune des  $N$  premières avalanches à partir d'un indice logarithmique en  $N$ .

**Lemme 3.11.**  $\mathcal{L}(2, N)$  est en  $\mathcal{O}(\log N)$ .

Dans la démonstration qui suit, nous passerons —explicitement— certaines explications, car cette preuve partage une partie des développements aboutissant au Corollaire 5.14 présenté dans le chapitre 5, qui en sont une clarification et une extension menant à la démonstration d'un résultat plus fort (pour tout paramètre  $p$ ). Nous présentons tout de même ce résultat car, comme il est dit plus haut, celui-ci motive l'étude présentée au chapitre suivant.

*Démonstration.* Nous prouvons que  $N$  est en  $\Omega(\exp \mathcal{L}(2, N))$ . Pour  $p = 2$ , nous verrons que pour avoir un trou à l'indice  $n$ , il existe une unique séquence de pentes sur les  $n + 1$  premières colonnes. Pour toute autre séquence, l'avalanche est pleine avant l'indice  $n$ . C'est cette particularité du cas  $p = 2$  qui nous permettra de conclure, et nous discuterons des difficultés rencontrées dans la généralisation de cette technique. Nous supposons  $\mathcal{L}(2, N) > 0$ , qui est vrai à partir de  $N = 9$ , et nous dénoterons  $b = (b_i)_{i \in \mathbb{N}}$  le point fixe  $\pi(N - 1)$ .

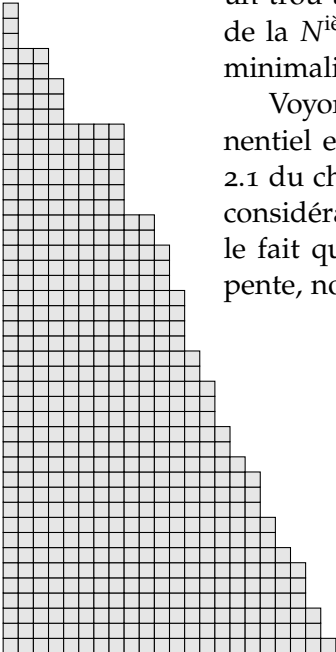
Par définition de  $\mathcal{L}(2, N)$ , il existe un  $N' \leq N$  tel que la  $N'$ ième avalanche n'est pas pleine à partir de l'indice  $\mathcal{L}(2, N) : \mathcal{L}(2, N) = \mathcal{L}'(2, N')$ . Sans perte de généralité, et simplement pour éviter l'usage du symbole prime, considérons  $N = N'$ . Par commodité, nous dénoterons également  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(2, N)$ . Commençons par décrire l'unique suite de pentes des  $\mathcal{L}$  premières colonnes de  $b$ , telle que la  $N$ ième avalanche comporte un trou à l'indice  $\mathcal{L} - 1$ . Cette suite est  $2, 0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots$  jusqu'à la colonne  $\mathcal{L}$ , avec  $\mathcal{L}$  pair. En effet, par induction à partir de la colonne 0 (paire) qui est la première éboulée, et la colonne  $-1$  (impaire) qui n'est pas éboulée,

1. l'avalanche doit nécessairement se propager sur la droite, donc la pente à l'indice pair suivant est 2 ;
2. la colonne qui sépare deux 2 ne doit pas être tirée lorsque le 2 qui est à sa droite s'éboule, car nous pourrions appliquer le Corollaire 3.7 et l'avalanche serait pleine à partir de cet indice. L'unique valeur de pente possible des colonnes impaires est donc 0.

Nous avons donc  $b_{\llbracket 0; \mathcal{L} \rrbracket} = (2, 0, 2, 0, \dots, 2, 0, 2)$  avec  $\mathcal{L}$  pair, pour avoir un trou à l'indice  $\mathcal{L} - 1$ . Toute autre séquence entraînerait la plénitude de la  $N$ ième avalanche avant la colonne  $\mathcal{L}$ , ce qui n'est pas possible par minimalité de  $\mathcal{L} = \mathcal{L}'(2, N)$ .

Voyons maintenant pourquoi cette forme implique que  $N$  soit exponentiel en  $\mathcal{L}$ . Soit  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  la suite d'actions de  $\pi(N)$ , d'après l'équation 2.1 du chapitre 2 nous avons pour tout  $i \geq 2$ ,  $b_i = a_{i-2} - 3a_i + 2a_{i+1}$ . En considérant pour l'initialisation que  $a_{-2} = N - 1$  et  $a_{-1} = 0$ , représentant le fait que la colonne 0 est la seule à recevoir  $N - 1$  fois une unité de pente, nous obtenons pour tout  $i \geq 0$  l'équation,

$$a_{i+1} = \frac{1}{2} (b_i - a_{i-2} + 3a_i)$$





Voici l'étape de la preuve dont nous n'explicitons par l'idée, il s'agit d'effectuer le changement de variable  $x_i = a_i - 2a_{i-1} + a_{i-2}$ .

$x_0 = N - 1 + a_0$ , et nous avons alors pour  $i \geq 0$  la relation,

$$\begin{aligned} x_{i+1} = a_{i+1} - 2a_i + a_{i-1} &= \frac{1}{2}(b_i - a_{i-2} + 3a_i) - 2a_i + a_{i-1} = \frac{b_i - x_i}{2} \\ &\iff \\ x_i &= -2x_{i+1} + b_i \end{aligned} \quad (3.1)$$

Nous pouvons alors exprimer  $x_0$ , pour tout  $j$ , en fonction de  $x_{j+1}$  et de  $(b_i)_{\llbracket 0; j \rrbracket}$ , et injecter dans l'équation obtenue notre déduction sur l'unicité de la séquence  $(b_i)_{\llbracket 0; \mathcal{L} \rrbracket}$ .

Nous avons donc par induction sur l'équation 3.1, pour tout  $j$ ,

$$x_0 = (-2)^{j+1}x_{j+1} + \sum_{r=0}^j (-2)^r b_r$$

et en utilisant notre connaissance de la séquence  $b_{\llbracket 0; \mathcal{L} \rrbracket} = (2, 0, 2, 0, \dots, 2, 0, 2)$  nous obtenons en remplaçant  $j$  par  $\mathcal{L} - 2$ , car  $\mathcal{L}$  est pair,

$$x_0 = (-2)4^{\frac{\mathcal{L}}{2}-1}x_{\mathcal{L}-1} + 2 \sum_{r=0}^{\frac{\mathcal{L}}{2}-1} 4^r.$$

Nous montrons alors que  $x_0$  est exponentiel en  $\mathcal{L}$ , en considérant deux cas sur  $x_{\mathcal{L}+1}$  menant à la même conclusion :

$$(-2)4^{\frac{\mathcal{L}}{2}-1}x_{\mathcal{L}-1} \geq 0$$

1.  $x_{\mathcal{L}+1} \neq 1$ . Alors d'après l'équation 3.1 et puisque  $b_{\mathcal{L}} = 2$ , nous obtenons  $|x_{\mathcal{L}}| \geq 2$ . Toujours à partir de l'équation 3.1, nous remarquons par induction de  $\mathcal{L}$  à 0 que les signes de la suite  $(x_i)_{i \leq \mathcal{L}}$  sont alternés, et  $x_0$  est positif donc  $x_{\mathcal{L}-1}$  est négatif.
2.  $s_{\mathcal{L}+1} = 1$ . Alors d'après l'équation 3.1 et puisque  $b_{\mathcal{L}} = 2$  et  $b_{\mathcal{L}-1} = 0$ , nous obtenons  $x_{\mathcal{L}} = x_{\mathcal{L}-1} = 0$ .

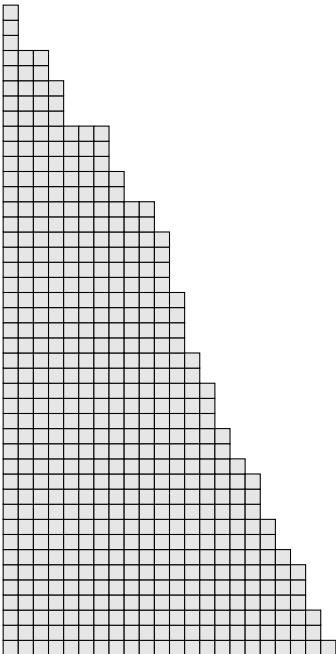
Le terme  $(-2)4^{\frac{\mathcal{L}}{2}-1}x_{\mathcal{L}-1}$  est donc positif, ce qui nous permet de conclure sur le fait que  $N$  est exponentiel en  $\mathcal{L}$  :

$$\frac{3}{2}(N-1) \geq x_0 \geq 2 \sum_{r=0}^{\frac{\mathcal{L}}{2}-1} 4^r = 2 \frac{4^{\frac{\mathcal{L}}{2}-1} - 1}{3}$$

où la première inégalité est déduite de  $a_0 \leq \frac{N-1}{2}$  (car la hauteur de la colonne 0 ne peut que diminuer et chacun des  $a_0$  éboulements déplace 2 grains sur la droite parmi les  $N-1$  initialement empilés) et  $x_0 = N-1 + a_0$ .  $\square$

Pour  $\text{KSPM}(2)$ , les  $N$  premières avalanches sont pleines à partir d'une colonne logarithmique en  $N$ , et nous pourrions donc appliquer le Théorème 3.6, le Corollaire 3.7 et la Proposition 3.10 pour étudier asymptotiquement complètement la dynamique des avalanches. Malheureusement, l'approche présentée ci-dessus ne s'étend pas directement à tout paramètre  $p$  du modèle, car il est difficile de généraliser le motif régulier  $(2, 0, 2, 0, \dots, 2, 0, 2)$  nécessaire à l'obtention d'un trou. Soulignons pour terminer que les valeurs  $p$  et  $0$  jouent un rôle très important dans le contrôle des éboulements d'une avalanche, mais qu'il semble indispensable pour généraliser ce résultat de prendre en compte le fait qu'un point fixe est issue de la configuration  $(N, 0^\omega)$ .

Les premières valeurs de la colonne de plénitude globale pour  $p = 3$  sont présentées sur la figure 3.8.



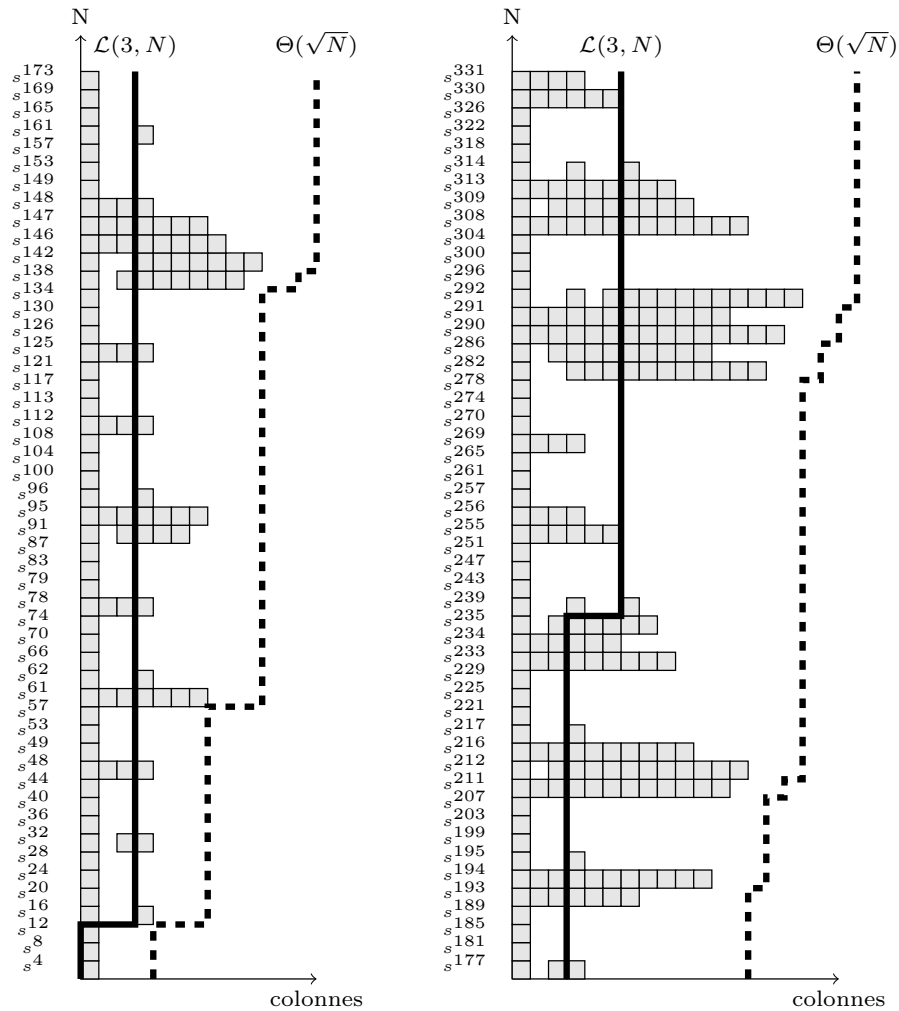
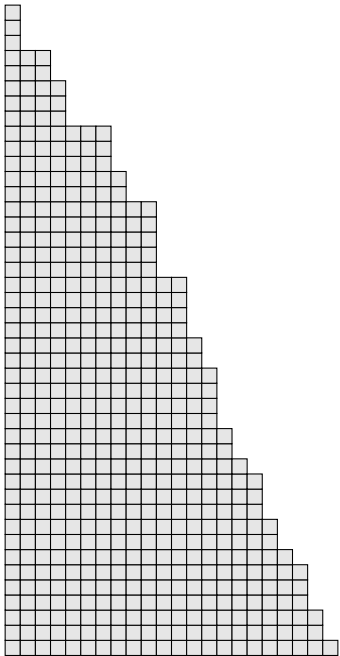


FIGURE 3.8 – Colonne de plénitude globale pour  $p = 3$ . Une avalanche est représentée par ligne, les avalanches vides (qui n'éboulent aucune colonne) sont ignorées. Un carré gris indique une colonne tirée, par exemple la 314<sup>ième</sup> avalanche a tiré les colonnes 0, 3 et 6. La ligne noire illustre la colonne de plénitude globale  $\mathcal{L}(3, N)$ , et la ligne pointillée représente la colonne non-vide maximale (la taille du support). Cette ligne pointillée est trois colonnes au devant de la colonne tirée la plus à droite car l'application de la règle déplace trois grains vers la droite. La propriété de plénitude des avalanches semble toujours vérifiée à partir d'une colonne de très faible indice pour toutes les avalanches.



## TRACE DES AVALANCHES

4.1	Construction des traces . . . . .	88
4.1.1	Invariabilité des avalanches . . . . .	88
4.1.2	Définition . . . . .	92
4.2	Transduction des traces . . . . .	96
4.2.1	Calcul . . . . .	96
4.2.2	Algorithme . . . . .	99
4.2.3	Définition . . . . .	100
4.2.4	Analyse du transducteur pour KSPM(2) . . . . .	101
4.3	Des traces aux vagues . . . . .	106
4.4	Conclusion pour KSPM(2) . . . . .	108

Nous avons montré au chapitre précédent que la suite des éboulements d'une avalanche est compréhensible en termes simples à partir du moment où la propriété de plénitude est vérifiée. Ce chapitre sera consacré à la conversion de la plénitude des avalanches en une propriété sur la forme des points fixes. Nous continuerons donc à nous intéresser à la méthode inductive d'obtention d'un point fixe, par l'ajout successif des grains qui le composent et la considération des avalanches déclenchées par ces additions. Se basant sur l'hypothèse que les avalanches sont pleines, les développements qui suivent sont donc valables uniquement à partir de la colonne de plénitude globale  $\mathcal{L}(p, N)$ .

L'idée que nous suivrons pour étudier la forme de  $\pi(N)$  est la suivante. Pour une colonne  $n$  à la droite de l'indice de plénitude globale, nous construirons dans la partie 4.1 un mot, que nous appellerons une *trace*, encodant les pics apparus autour d'une colonne  $n$ , depuis la première jusqu'à la  $N^{\text{ième}}$  avalanche. Cette trace pour la colonne  $n$  contiendra suffisamment d'information pour en déduire les valeurs de la pente sur les colonnes à la droite de  $n$ . La partie 4.2 présentera alors la construc-

tion d'un transducteur permettant, à partir de la trace pour une colonne  $n$ , de construire la trace pour la colonne  $n + p$ .  $i$  itérations de ce transducteur produiront donc la trace pour la colonne  $n + ip$ . Il s'agira alors d'étudier l'émergence de régularités sur les mots produits par les itérations successives du transducteur. Nous verrons que cette analyse est concluante pour  $p = 2$ , dont les traces sont exponentiellement vite régulières par l'application répétée du transducteur (partie 4.2.4). Une trace pour une colonne  $n + ip$  permettant de reconstituer le point fixe pour les colonnes à partir de  $n + (i + 1)p$ , la partie 4.3 se concentrera sur les liens entre la régularité des traces et l'apparition des motifs de vague sur les points fixes.

Nous présenterons les constructions et résultats sous leur forme la plus générale. Les développements qui suivent nous permettront, grâce à la démonstration de plénitude des avalanches à partir d'un indice logarithmique en  $N$  dans ce cas (Lemme 3.11 du chapitre 3), de prouver le Théorème 2.11 pour  $p = 2$ . Les difficultés à généraliser les techniques proposées dans ce chapitre à tout paramètre  $p$  seront discutées.

Nous proposons en ouverture de ce chapitre une représentation graphique du plan annoncé, sur les figures 4.1 et 4.2, dans le but d'avoir une vision d'ensemble des objectifs avant d'entrer dans les détails.

Nous considérons un paramètre  $p$  fixé.

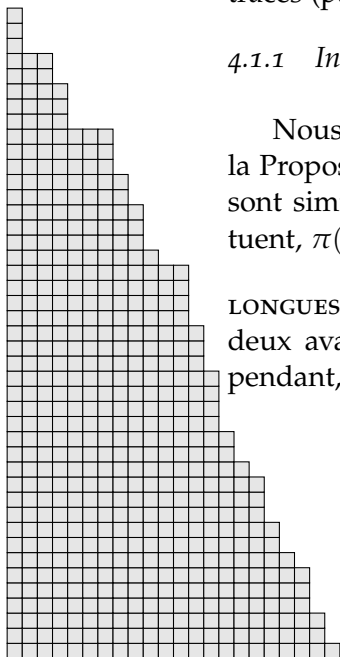
#### 4.1 CONSTRUCTION DES TRACES

Au delà de la colonne de plénitude globale, nous avons vu à la fin du chapitre précédent que la  $k^{\text{ième}}$  avalanche laisse une large partie du point fixe inchangée de  $\pi(k - 1)$  à  $\pi(k)$ , ce qui suggère une similarité entre  $s^k$  et  $s^{k+1}$ . Cette propriété de similitude, ou d'invariance entre deux avalanches successives sera établie par le Lemme 4.1, qui affirme que deux avalanches successives partagent de nombreux pics. Nous commencerons par établir cette propriété d'invariabilité des avalanches, exprimée par la présence des mêmes pics sur plusieurs avalanches successives (partie 4.1.1). Dans un second temps, nous définissons formellement les traces (partie 4.1.2).

##### 4.1.1 Invariabilité des avalanches

Nous commençons par établir formellement l'idée intuitive suivant la Proposition 3.10, selon laquelle deux avalanches successives  $s^k$  et  $s^{k+1}$  sont similaires car les points fixes respectifs sur lesquelles elles s'effectuent,  $\pi(k - 1)$  et  $\pi(k)$ , sont eux-mêmes similaires.

**LONGUES AVALANCHES** L'invariabilité des points fixes implique que ces deux avalanches vont en effet partager en partie les mêmes pics. Cependant, il faut prendre en compte le fait que la partie concernée par



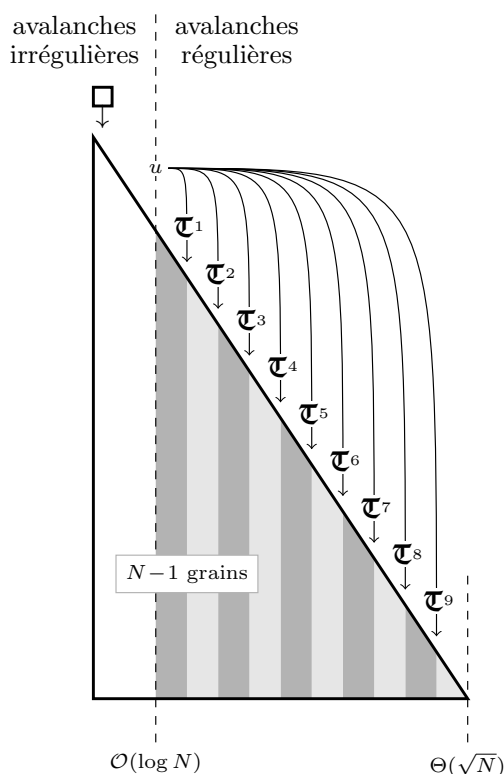


FIGURE 4.1 – Les ordres de grandeur sont prouvés pour  $p = 2$ , et conjecturés pour tout  $p$ . Les avalanches deviennent pleines exponentiellement vite en le nombre de grains. Cette régularité nous permet de capturer le comportement des avalanches dans un mot  $u$ , appelé trace. Pour une certaine colonne  $i$  en  $\mathcal{O}(\log N)$  (la longue ligne verticale pointillée),  $u$  décrit complètement la façon dont chaque grain est passé au dessus de cette colonne, et permet de reconstituer le point fixe  $\pi(N)$  à partir de la colonne  $i + p$ . Cette trace est grossièrement la concaténation des positions des pics entre les colonnes  $i$  et  $i + p$ , pour les  $N$  premières avalanches. Nous construisons un transducteur à états finis  $\mathfrak{T}$  produisant, à partir de de la trace  $u$  pour l'indice  $i$ , la trace  $u'$  pour l'indice  $i + p$ . La  $j^{\text{ème}}$  itération du transducteur produira ainsi la trace pour l'indice  $i + jp$ , c'est-à-dire un mot capturant la façon dont les grains ont passé la colonne  $i + jp$ , et permettant de reconstruire le point fixe sur la droite de la colonne  $i + (j + 1)p$ .

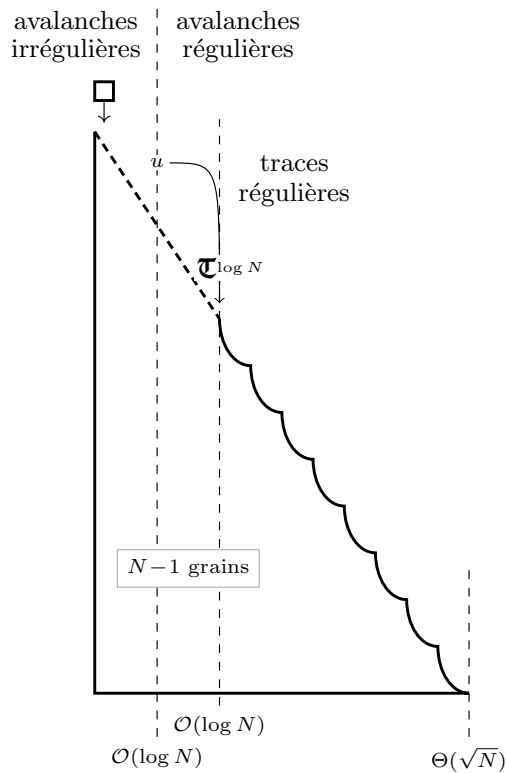
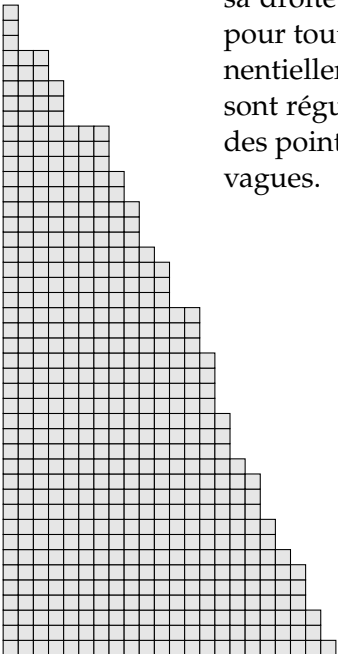


FIGURE 4.2 – Les ordres de grandeur sont prouvés pour  $p = 2$ , et conjecturés pour tout  $p$ . À partir de la connaissance de la trace  $u$  pour un indice, nous pouvons calculer le point fixe sur les colonnes qui sont à sa droite. Une analyse du transducteur pour  $p = 2$  nous indiquera que, pour toute trace  $u$ , le transducteur  $\mathcal{T}$  produit des mots périodiques exponentiellement rapidement. Ainsi, en  $\mathcal{O}(\log N)$  itérations de  $\mathcal{T}$ , les traces sont régulières. Finalement, la régularité des traces entraîne la régularité des points fixes, qui sont asymptotiquement complètement constitués de vagues.





l'invariabilité des points fixes se situe après la colonne de plénitude globale, et donc ne considérer que les avalanches qui atteignent cette partie sur laquelle la Proposition 3.10 s'applique. Nous souhaitons extraire de la suite des avalanches  $(s^1, \dots, s^N)$  celles qui éboulent au moins une colonne à la droite de  $\mathcal{L}(p, N) + p$ . Nous définissons ainsi formellement la suite des *longues avalanches* jusqu'à  $N$ ,  $\Phi(p, N) = (\phi^1, \dots, \phi^n)$ , par

$$s^k \in \Phi(p, N) \iff \mathcal{L}(p, N) + p \in s^k.$$

Nous définissons également la suite des points fixes correspondants,  $(\mu^0, \mu^1, \dots, \mu^n)$ , tels que  $\mu^0 = \pi(0) = 0^\omega$ , et pour tout entier  $k$ ,  $\mu^k$  est le point fixe obtenu après l'avalanche  $\phi^k$ , c'est-à-dire  $\mu^k = \pi(m)$  avec  $\phi^k = s^m$ .

**INVARIABILITÉ DES PICS** Le Lemme suivant établit l'invariabilité des avalanches à partir des pics. Pour un nombre de grains  $N$ , nous considérons toutes les longues avalanches jusqu'à  $N$ , et montrons une invariabilité des pics entre ces avalanches, deux à deux. Puisque entre deux longues avalanches certaines avalanches qui ne sont pas longues peuvent s'arrêter dans l'intervalle  $[\mathcal{L}(p, N); \mathcal{L}(p, N) + p - 1]$  et donc changer les valeurs des pentes dans l'intervalle  $[\mathcal{L}(p, N) + p; \mathcal{L}(p, N) + 2p - 1]$ , l'invariabilité des pics est établie à partir de la colonne  $\mathcal{L}(p, N) + 2p$ .

**Lemme 4.1.** *Dans  $KSPM(p)$ , soient  $\mathcal{L}$  la colonne de plénitude globale pour un nombre de grains  $N$ , et  $\Phi = (\phi^1, \dots, \phi^n)$  la séquence de longues avalanches jusqu'à  $N$ .*

*Soient  $k < N$ , et  $Q^k$  (resp.  $Q^{k+1}$ ) la séquence des pics  $q$  de  $\phi^k$  (resp.  $\phi^{k+1}$ ) tels que  $q \geq \mathcal{L} + 2p$ . Nous avons,*

$$Q^k \setminus \{\max Q^k\} = Q^{k+1} \cap [\mathcal{L} + 2p; \max Q^k].$$

Ce Lemme peut être compris de la façon suivante :  $|Q^{k+1}| \geq |Q^k| - 1$ , et les  $|Q^k| - 1$  premiers éléments de  $Q^{k+1}$  et  $Q^k$  sont égaux. Entre une longue avalanche et la suivante, la séquence des pics peut être continuée de façon arbitraire, mais diminue uniquement pic par pic.

*Démonstration.* Nous commençons par étudier les conséquences que peuvent avoir les avalanches entre  $\phi^k$  et  $\phi^{k+1}$ , puis établissons la relation énoncée.

Soient  $\kappa$  et  $\kappa'$  deux entiers tels que  $\phi^k$  est la  $\kappa^{\text{ième}}$  avalanche, et  $\phi^{k+1}$  est la  $\kappa'^{\text{ième}}$  avalanche. D'après la Proposition 3.10, pour tout  $i \in [\mathcal{L} + p; \max Q^k]$ , nous avons  $\pi(\kappa)_i = \pi(\kappa - 1)_i$ .

Par définition des longues avalanches, toute avalanche  $s$  entre  $\phi^k$  et  $\phi^{k+1}$  s'arrête avant la colonne  $\mathcal{L} + p$ , c'est-à-dire pour tout  $i \geq \mathcal{L} + p$ ,

$i \notin s$ . En combinant les deux remarques précédentes, nous avons pour tout  $\kappa'' \in \llbracket \kappa; \kappa' \rrbracket$  :

$$\text{pour tout } i \in \llbracket \mathcal{L} + p; \mathcal{L} + 2p \rrbracket, \quad \pi(\kappa'')_i \geq \pi(\kappa - 1)_i \quad (4.1)$$

$$\text{pour tout } i \in \llbracket \mathcal{L} + 2p; \max Q^k \rrbracket, \quad \pi(\kappa'')_i = \pi(\kappa - 1)_i \quad (4.2)$$

puisque les colonnes de l'intervalle  $\llbracket \mathcal{L} + p; \mathcal{L} + 2p \rrbracket$  peuvent recevoir des unités de pente si des colonnes parmi  $\llbracket \mathcal{L}; \mathcal{L} + p \rrbracket$  sont tirées. Les équations ci-dessus sont donc en particulier vérifiées pour  $\kappa'' = \kappa' - 1$ , c'est-à-dire entre le point fixe précédent  $\phi^{k+1}$  et le point fixe précédent  $\phi^k$ .

Nous pouvons alors utiliser le Théorème 3.6, qui nous dit qu'une colonne est un pic si et seulement si sa pente est  $p$  et si il est précédé par un autre pic à distance inférieure ou égale à  $p$ . Pour l'initialisation, d'après la relation 4.1 nous avons que le pic le plus à droite parmi  $\llbracket \mathcal{L} + p; \mathcal{L} + 2p \rrbracket$  dans  $\phi^k$  est également un pic dans  $\phi^{k+1}$ . L'induction est alors directe par le Théorème 3.6 et la relation 4.2 :

- soit  $q \geq \mathcal{L} + 2p$  le pic suivant dans  $\phi^k = s^k$ ;
- alors  $q$  vérifie sur  $\pi(\kappa - 1)$  les deux conditions données dans le Théorème 3.6;
- d'après la relation 4.2,  $q$  vérifie également les deux conditions du Théorème sur  $\pi(\kappa' - 1)$ ;
- donc c'est le pic suivant dans  $s^{\kappa'} = \phi^{k+1}$ .

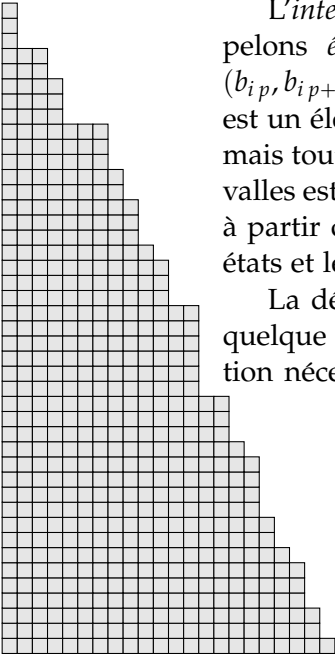
Ce raisonnement est valide tant que  $q < \max Q^k$ . □

#### 4.1.2 Définition

Nous utilisons le Lemme 4.1 pour construire les traces. Informellement, nous allons découper les configurations en *intervalles*  $I_0, I_1, I_2, \dots$  de taille  $p$ , et enregistrer dans une *trace* tous les éboulements qui se produisent dans un intervalle  $I_i$  au cours des  $N$  premières avalanches. Ensuite, nous verrons comment produire la trace pour  $I_{i+1}$  à partir de la trace pour  $I_i$  à l'aide d'un transducteur à états finis.

L'intervalle  $I_i$  est constitué des colonnes  $\llbracket i p; (i + 1) p - 1 \rrbracket$  et nous appelons *état* d'un intervalle  $I_i$  dans une configuration  $b$  sa valeur  $(b_{i p}, b_{i p + 1}, \dots, b_{(i + 1) p - 1})$ . Ainsi, l'état d'un intervalle dans un point fixe est un élément de l'ensemble  $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, p\}^p$ . Une remarque, évidente mais tout de même importante, est que dans  $\pi(0)$  l'état de tous les intervalles est  $(0, 0, \dots, 0)$ . Cela nous permettra de reconstituer les points fixes à partir des traces. Par commodité, nous écrirons également  $00 \dots 0$  les états et les suites lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté entre les symboles.

La définition formelle de la *trace* jusque  $N$  dans un intervalle  $I_i$  est quelque peu élaborée, dans le but de conserver uniquement l'information nécessaire pour reconstruire le point fixe sur la droite de la trace,



sans redondance. En une phrase, il s'agit de la suite des positions relatives des plus grands pics dans l'intervalle  $I_i$  au cours des  $N$  premières longues avalanches, dans laquelle chaque pic est considéré une unique fois tant qu'il reste d'une longue avalanche à la suivante (ce qui arrive, d'après le Lemme 4.1, lorsqu'une longue avalanche tire une colonne à sa droite). Nous proposons un exemple de construction de trace sur la figure 4.3, dont la légende utilise le vocabulaire introduit ci-après. La définition formelle des traces procèdera en deux étapes : nous verrons dans un premier temps la position relative du plus grand pic d'une avalanche dans un intervalle (le *type*), puis comment ne considérer les pics qu'une seule fois, à partir du Lemme 4.1.

**TYPE** Soit  $i$  un entier tel que  $i p \geq \mathcal{L}(p, N) + 2p$ , et considérons l'intervalle  $I_i$ . Le type d'une avalanche sur l'intervalle  $I_i$  sera défini comme la position relative (dans  $I_i$ ) du plus grand pic dans cet intervalle.

Soit  $q$  le plus grand pic de  $\phi^k$  tel que  $q < (i + 1)p$ . Le type  $\alpha(i, k)$  de la longue avalanche  $\phi^k$  sur  $I_i$  est défini comme,

- $\alpha(i, k) = q \bmod p$  si  $q \in I_i$ ;
- $\alpha(i, k) = \epsilon$  si  $q \notin I_i$ .

Les types possibles sont donc  $\epsilon, 0, 1, \dots, p - 1$ . Formellement, nous considérons les types comme des mots de longueur au plus un sur l'alphabet  $\mathcal{T} = \{0, 1, \dots, p - 1\}$ , et  $\epsilon$  comme le mot vide. L'ensemble des types possibles est ainsi  $\mathcal{T} \cup \{\epsilon\}$ . Il est toutefois plus naturel de penser aux types comme étant chacun une lettre, y compris  $\epsilon$ .

*Remarque 4.2.* Notons que d'après le Théorème 3.6, les pics d'une avalanche sont à distance au plus  $p$  les uns des autres, donc une avalanche ayant un type non vide sur un intervalle a également un type non vide sur tous les intervalles qui précèdent (et où le type est défini); et une avalanche ayant un type vide sur un intervalle a un type vide sur tous les intervalles qui suivent.

**REDONDANCE** Une *trace* est un élément de  $\mathcal{T}^*$ . Intuitivement, la trace jusque  $N$  sur  $I_i$  est la sous-suite de la séquence des types  $(\alpha(i, k))_{k=1}^n$ , telle que chaque type n'est conservé qu'une seule fois lorsque qu'il apparaît sur des longues avalanches consécutives. Par exemple, la séquence 01121002112220 deviendra 012102120. Nous introduisons dans le paragraphe suivant quelques notions supplémentaires pour décrire la redondance des types dans un intervalle  $I_i$ . La définition de la trace suivra immédiatement.

Deux longues avalanches  $\phi^k$  et  $\phi^{k'}$  sont  *$i$ -similaires* si elles ont le même type sur l'intervalle  $I_i$ , c'est-à-dire si  $\alpha(i, k) = \alpha(i, k')$ . Nous pouvons alors diviser la séquence  $\Phi$  des longues avalanches jusque  $N$  en sous-suites les plus longues possibles d'avalanches consécutives  *$i$ -similaires*. Une telle séquence  $(\phi^k, \phi^{k+1}, \dots, \phi^{k''})$  vérifie que pour tout  $k' \in \llbracket k; k'' \rrbracket$ ,  $\phi^{k'}$  et

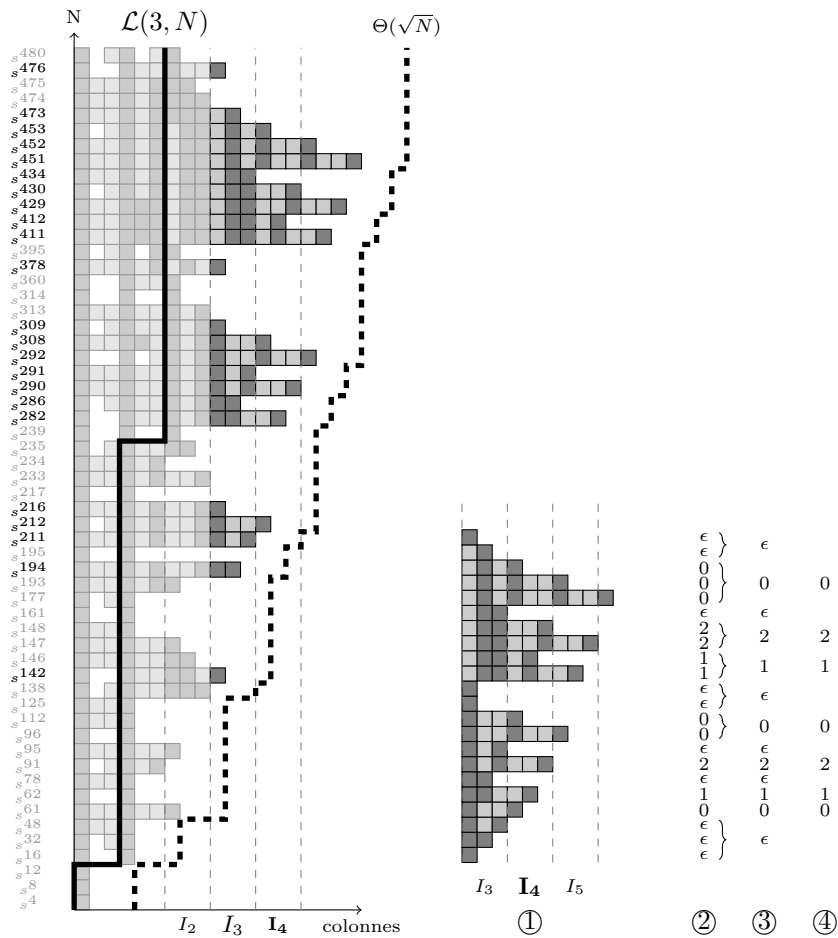
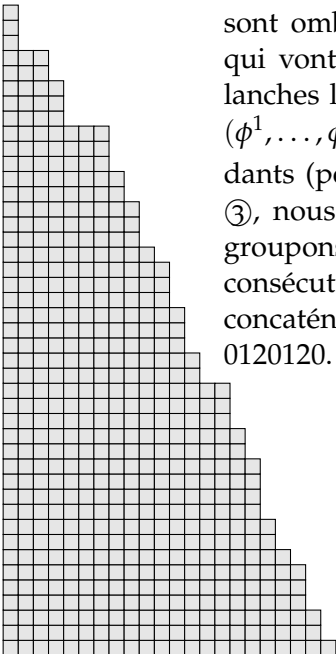


FIGURE 4.3 – Illustration pour  $p = 3$  de la définition d’une trace. Nous nous intéressons à la trace jusque  $N = 480$  sur  $I_4$ . À gauche, les  $N$  premières avalanches sont représentées, une par ligne (les avalanches vides sont ignorées). Les carrés gris clairs sont les colonnes tirées, et les carrés gris foncés les pics (par exemple, la suite des pics de  $s^{194}$  est  $0, 3, 5, 8, 9, 10$ ). La ligne noire est la colonne de plénitude globale, dont nous retiendrons la valeur  $\mathcal{L}(3, 480) = 6$ . Les colonnes avant  $\mathcal{L}(p, N) + p$  sont ombrées, ce qui nous permet d’identifier les avalanches longues, qui vont au delà. À droite, nous retenons en ① uniquement les avalanches longues sur les colonnes à la droite de  $\mathcal{L}(p, N) + p$ ,  $\Phi(4, 480) = (\phi^1, \dots, \phi^{22})$ . En ② nous présentons la séquence des types correspondants (position relative du pic le plus à droite) sur  $I_4$ ,  $(\alpha(4, k))_{k=1}^{k=22}$ . En ③, nous retenons simplement le type des suites 4-redondantes (nous groupons les longues avalanches 4-similaires, c’est-à-dire de même type, consécutives). Enfin, la trace jusque 480 sur  $I_4$  est obtenue en ④ en concaténant les types des suites 4-redondantes (en supprimant les  $\epsilon$ ) : 0120120.



$\phi^{k'+1}$  sont  $i$ -similaires. Nous appelons ces sous-suites de longueur maximale des suites  $i$ -redondantes. Une suite  $i$ -redondante est dite de type  $\alpha$  si le type de chacune des avalanches qui la composent est  $\alpha$ . Une distinction sera souvent faite entre les cas où  $\alpha \in \mathcal{T}$  et  $\alpha = \epsilon$ , nous dirons pour les premières que la suite  $i$ -redondante est de type *non- $\epsilon$* . Lexicalement, nous confondrons les suites de types et les suites des avalanches correspondantes, l'objet dont nous parlons devenant clair suivant le contexte.

TRACE

**Definition 4.3.** La *trace* jusque  $N$  sur  $I_i$  est le mot de  $\mathcal{T}^*$  formé par la concaténation des types des suites  $i$ -redondantes parmi  $\Phi(p, N)$ .

Notons que les suites  $i$ -redondantes de type  $\epsilon$  sont ainsi ignorées.

Un exemple de construction d'une trace, étape par étape, est présenté sur la figure 4.3. Par la suite, nous utiliserons les lettres  $a$  et  $b$  en remplacement des types 0 et 1, pour décrire les traces de KSPM(2).

Terminons sur une courte Proposition suivant le Lemme 4.1, en vue de construire le transducteur de traces.

**Proposition 4.4.** *En termes d'avalanches, toute suite  $(i + 1)$ -redondante de type non- $\epsilon$  est contenue dans une suite  $i$ -redondante de type non- $\epsilon$ .*

*Démonstration.* Soit  $\Phi_{\llbracket k; k'' \rrbracket} = (\phi^k, \dots, \phi^{k''})$  une suite  $i$ -redondante de type  $\alpha \neq \epsilon$ . Nous montrons que les avalanches  $\phi^k$  et  $\phi^{k''}$  sont de type  $\epsilon$  dans l'intervalle  $I_{i+1}$ .

Par maximalité de la longueur des suites  $i$ -redondantes, les longues avalanches changent de type sur l'intervalle  $I_i$  exactement après  $\phi^{k''}$ . D'après le Lemme 4.1, la séquence des pics peut augmenter de façon arbitraire, mais seulement le pic le plus à droite peut disparaître d'une longue avalanche à la suivante, donc pour que les avalanches changent de type dans  $I_i$  exactement après  $\phi^{k''}$ , le plus grand pic de  $\phi^{k''}$  est à la position relative  $\alpha$  dans  $I_i$ , c'est-à-dire  $\max \phi^{k''} = ip + \alpha$ , donc  $\phi^{k''}$  est de type  $\epsilon$  dans  $I_{i+1}$ .

De plus, pour qu'une suite  $i$ -redondante de type non- $\epsilon$   $\Phi_{\llbracket k; k'' \rrbracket}$  commence, un pic doit apparaître à la position relative  $\alpha$  dans  $I_i$  durant  $\phi^k$ , ce qui force la longue avalanche précédente  $\phi^{k-1}$  à s'être arrêtée avant cette position :  $\max \phi^{k-1} < ip + \alpha$  (car d'après la Proposition 3.10, les changements sur le point fixe entraînés par une avalanche pleine se situent sur les  $p$  colonnes à droite de la colonne tirée maximale, et cette dernière ne peut devenir un pic car sa pente devient 0). Nous pouvons conclure que  $\phi^{k-1}$  est de type  $\epsilon$  dans  $I_{i+1}$ .

Toute suite  $(i + 1)$ -redondante de type non- $\epsilon$  commence et se termine donc bien à l'intérieur d'une suite de longues avalanches  $i$ -redondante de type non- $\epsilon$  (Remarque 4.2).  $\square$

## 4.2 TRANSDUCTION DES TRACES

Dans cette partie, Nous construisons un transducteur à états finis produisant, à partir de la trace jusque  $N$  sur  $I_i$ , la trace jusque  $N$  sur  $I_{i+1}$ . Les états du transducteur seront les états possibles des intervalles, et à chaque lecture d'un type non- $\epsilon$  d'une suite  $i$ -redondante, la transition produira la concaténation des types des suites d'avalanches  $(i+1)$ -redondantes contenues dans celle-ci (Proposition 4.4).

## 4.2.1 Calcul

Le Lemme suivant servira de base à la construction d'un transducteur. Étant donné l'état de l'intervalle  $I_{i+1}$  (encodé dans l'état du transducteur), et le type non- $\epsilon$  d'une suite  $i$ -redondante (la lettre lue), celui-ci ira dans un nouvel état encodant l'état de l'intervalle  $I_{i+1}$  après cette suite  $i$ -redondante d'avalanches, tout en produisant la séquence des types des suites  $(i+1)$ -redondantes correspondantes. Nous en extrairons un algorithme décrivant la construction de la fonction de transition du transducteur. Rappelons que  $\mu^k$  dénote le point fixe obtenu après la longue avalanche  $\phi^k$ . Un exemple de calcul est proposé sur la figure 4.4.

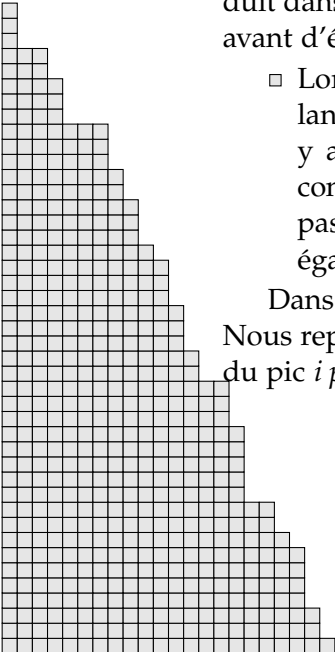
**Lemme 4.5.** Soit  $I_i$  un intervalle dont les colonnes sont toutes à la droite de  $\mathcal{L}(p, N) + 2p$ , et soit  $\Phi_{\llbracket k; k'' \rrbracket} = (\phi^k, \phi^{k+1}, \dots, \phi^{k''})$  une suite  $i$ -redondante de type  $\alpha$ , avec  $k'' \leq N$ . Étant donné l'état  $(c_0, c_1, \dots, c_{p-1})$  de  $I_{i+1}$  dans la configuration  $\mu^{k-1}$ , et  $\alpha$ , il est possible de calculer sans plus d'information :

- l'état  $(c'_0, c'_1, \dots, c'_{p-1})$  de  $I_{i+1}$  dans la configuration  $\mu^{k''}$  ;
- la concaténation des types des suites  $(i+1)$ -redondantes contenues dans  $\Phi_{\llbracket k; k'' \rrbracket}$ .

*Démonstration.* Nous commencerons par considérer deux cas simples, le premier où le type  $\alpha$  est  $\epsilon$ , et le second où aucun éboulement ne se produit dans l'intervalle  $I_{i+1}$  au cours de la suite d'avalanches  $i$ -redondante, avant d'étudier le cas général.

- Lorsque le type de la suite  $i$ -redondante  $\alpha = \epsilon$ , toutes les avalanches de  $\Phi_{\llbracket k; k'' \rrbracket}$  s'arrêtent avant la colonne  $ip$  (sinon il devrait y avoir au moins un pic par intervalle d'après le Théorème 3.6, contredisant le type  $\epsilon$  considéré), donc l'état de  $I_{i+1}$  ne change pas et la suite  $(i+1)$ -redondante contenue dans  $(\phi^k, \dots, \phi^{k''})$  est également de type  $\epsilon$ .

Dans les deux cas qui suivent, nous considérons un type non- $\epsilon$ ,  $\alpha \in \mathcal{T}$ . Nous représentons la situation d'une avalanche de  $\Phi$  au temps terminus du pic  $ip + \alpha$  par le schéma suivant (pour  $p = 5$  et  $\alpha = 2$ ) :



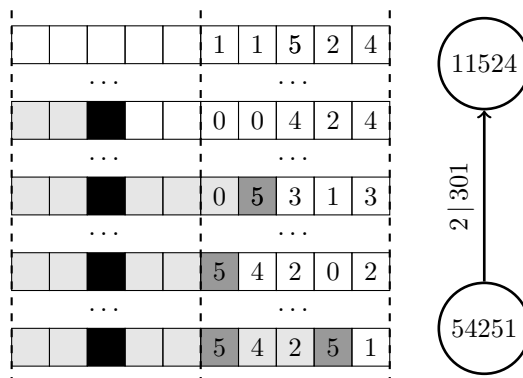
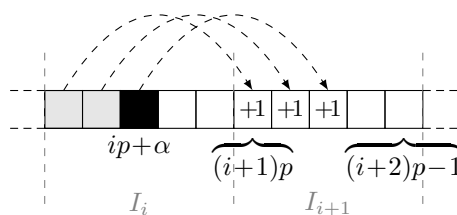


FIGURE 4.4 – Exemple de transition du transducteur pour  $p = 5$ . À partir de la connaissance de l'état de l'intervalle  $I_{i+1}$  (54251) et du type d'une séquence  $i$ -redondante (2), nous pouvons calculer l'état de l'intervalle  $I_{i+1}$  après cette suite  $i$ -redondante (11524) ainsi que les types des suites  $(i + 1)$ -redondantes correspondantes (301). Sur la gauche, une avalanche est représentée par ligne (de bas en haut) pour la séquence  $i$ -redondante de type 2 (le carré noir correspond à ce pic), et les points de suspension indiquent de possibles avalanches qui s'arrêtent avant l'intervalle  $I_i$  ou après l'intervalle  $I_{i+1}$  et qui ne changent donc pas l'état de  $I_{i+1}$ . L'information dont nous disposons est suffisante pour prévoir, grâce au Théorème 3.6 et à la Proposition 3.10 : quand la suite  $i$ -redondante s'arrête (lorsque la prochaine valeur de pente  $p$  à la droite du pic noir est à distance supérieure à  $p$ ); la concaténation des types des séquences  $(i + 1)$ -redondantes (plus grand pic dans l'intervalle  $I_{i+1}$ ); et l'état de  $I_{i+1}$  à l'issue de la suite  $i$ -redondante. Une colonne gris clair est tirée, et une colonne gris foncé est un pic. Sur la droite, la transition du transducteur associée.



- Dans le cas où il n'y a pas d'entier  $m \in \llbracket 0; \alpha \rrbracket$  tel que  $c_m = p$ ,  $\phi^k$  ne contient pas de pic dans  $I_{i+1}$ , et le calcul est simple. Par le Théorème 3.6, le pic  $ip + \alpha$  est le plus grand pic de  $\phi^k$  (car la valeur  $p$  suivante est à distance strictement supérieure à  $p$ ), donc  $\mu_{ip+\alpha}^k = 0$  (Proposition 3.10) et  $ip + \alpha$  n'est pas un pic de  $\phi^{k+1}$ . Par conséquent,
  - la suite  $i$ -redondante considérée se termine après  $\phi^k$  (car la pro-

chaîne longue avalanche ne sera plus  $i$ -similaire);

- et elle est composée d'une seule longue avalanche ( $k = k''$ ) qui est de type  $\epsilon$  sur l'intervalle  $I_{i+1}$  (seconde partie du résultat).

Concernant le nouvel état de  $I_{i+1}$ , la longue avalanche  $\phi^k$  est pleine et s'arrête en  $i p + \alpha$  donc d'après la Proposition 3.10,

- pour  $(i + 1) p \leq j \leq (i + 1) p + \alpha$ , nous avons  $\mu_j^k = \mu_j^{k-1} + 1$ ;
- pour  $(i + 1) p + \alpha < j < (i + 2) p$ , nous avons  $\mu_j^k = \mu_j^{k-1}$ .

Ainsi, en termes d'états (première partie du résultat),

- $c'_m = c_m + 1$  pour  $m \in \llbracket 0; \alpha \rrbracket$ ;
- $c'_m = c_m$  pour  $m \in \llbracket \alpha; p - 1 \rrbracket$ .
- Si il existe un entier  $m \in \llbracket 0; \alpha \rrbracket$  tel que  $c_m = p$ , alors  $\phi^k$  contient un pic dans l'intervalle  $I_{i+1}$ . Soit donc  $(i + 1) p + \alpha'$  le plus grand de ces pics ( $\alpha' \in \mathcal{T}$  sera le type de la suite  $(i + 1)$ -redondante que nous allons considérer). La colonne  $(i + 1) p + \alpha'$  est la plus grande colonne  $q$  telle que  $\mu_q^{k-1} = p$  et  $(i + 1) p \leq q < (i + 2) p$  (Théorème 3.6, puisque qu'il y a au moins un pic parmi ces  $p$  colonnes). C'est-à-dire,  $\alpha'$  est le plus grand entier  $m$  tel que  $a_m = p$ .

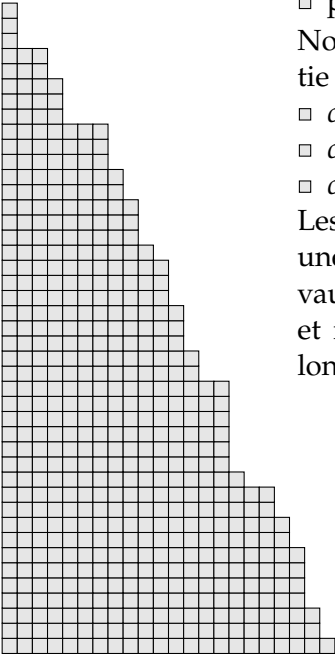
$\phi^k$  débute une suite  $(i + 1)$ -redondante de type  $\alpha' \neq \epsilon$ . Considérons les longues avalanches qui suivent. Au sujet des types, d'après la Proposition 4.4, tant que  $(i + 1) p + \alpha'$  est un pic de  $\phi^{k'}$ ,  $i p + \alpha$  est également un pic de  $\phi^{k'}$ . En ce qui concerne l'état de  $I_{i+1}$ , d'après la Proposition 3.10, tant que  $(i + 1) p + \alpha'$  n'est pas le dernier pic de  $\phi^{k'}$  cet état n'est pas modifié. Nous avons ainsi que la première avalanche qui change l'état de  $I_{i+1}$  est celle dont le dernier pic est  $(i + 1) p + \alpha'$  ( $k' \leq k''$  puisque nous considérons une suite  $i$ -redondante, donc de taille maximale). Nous avons alors  $\mu_{(i+1)p+\alpha'}^{k'} = 0$ , ce qui termine la suite  $(i + 1)$ -redondante de type  $\alpha'$  (deuxième partie du résultat, incomplet). Notons qu'en revanche, la suite  $i$ -redondante  $\Phi_{\llbracket k; k' \rrbracket}$  peut ne pas terminer à ce moment. Comme dans le cas précédent,

- pour  $(i + 1) p \leq j < (i + 1) p + \alpha'$ , nous avons  $\mu_j^{k'} = \mu_j^k$ ;
- $\mu_{(i+1)p+\alpha'}^{k'} = 0$ ;
- pour  $(i + 1) p + \alpha' < j < (i + 2) p$ , nous avons  $\mu_j^{k'} = \mu_j^k + 1$ .

Nous réécrivons cette observation sous forme d'état (première partie du résultat, incomplet),

- $c'_m = c_m$  pour  $m \in \llbracket 0; \alpha' \rrbracket$ ;
- $c'_m = 0$  pour  $m = \alpha'$ ;
- $c'_m = c_m + 1$  pour  $m \in \llbracket \alpha'; p - 1 \rrbracket$ .

Les arguments ci-dessus peuvent alors être répétés tant qu'il existe une colonne de  $I_{i+1}$  à une position relative  $m \leq \alpha$  dont la pente vaut  $p$ . Nous concaténons les types des suites  $(i + 1)$ -redondantes, et mettons à jour l'état de  $I_{i+1}$ . Lorsqu'il n'y a plus de telle colonne, le pic  $i p + \alpha$  termine la prochaine avalanche, donc sa valeur





devient 0 et il ne sera pas un pic de l'avalanche suivante. L'avalanche considérée est nécessairement  $\phi^{k''}$ , et nous pouvons mettre à jour une dernière fois l'état de  $I_{i+1}$ , tel qu'il a été présenté dans le second cas.

Notons que ce processus termine, car il est impossible d'avoir des suites  $i$ -redondantes infinies (sauf pour  $I_0$ , pour lequel la trace n'est définie que pour les toutes premières valeurs de  $N$ ).

□

#### 4.2.2 Algorithme

À partir de la preuve du Lemme 4.5, nous présentons sous forme algorithmique le calcul. Pour l'état d'un intervalle  $I_{i+1}$  et le type d'une avalanche sur  $I_i$ , la fonction  $f$  retourne le plus grand pic de  $I_{i+1}$ , et  $g$  calcul le nouvel état de  $I_{i+1}$  tout en concaténant la séquence des types des suites  $(i+1)$ -redondantes (pour cela elle utilise  $f$ ).  $g$  s'appelle elle-même tant que le pic considéré sur  $I_i$  reste présent d'une avalanche à l'autre, c'est-à-dire tant que nous sommes dans la même suite  $i$ -redondante.

$\delta$  est la fonction qui nous intéresse, et nous ignorons les entrée du type  $\epsilon$ , qui ne changent pas l'état de l'intervalle  $I_{i+1}$  et correspondent à des suite  $(i+1)$ -redondantes également de type  $\epsilon$  (première partie de la preuve).

Entrées : un type non vide  $\alpha \in \mathcal{T}$   
un état  $C = (c_0, \dots, c_{p-1}) \in \mathcal{S}$ .

Variable : une séquence  $u$  de types.

Fonctions :

$$\begin{array}{l}
 f : \mathcal{S} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T} \cup \{\epsilon\} \\
 \left| \begin{array}{l}
 f(C, \alpha) := \\
 \text{si } (\{m \leq \alpha : c_m = p\} \neq \emptyset) \\
 \text{alors} \\
 \quad \max\{m : c_m = p\} \\
 \text{sinon} \\
 \quad \epsilon
 \end{array} \right. \\
 \\
 g : \mathcal{S} \times \mathcal{T} \times \mathcal{T}^* \rightarrow \mathcal{S} \times \mathcal{T}^* \\
 \left| \begin{array}{l}
 g(C, \alpha, u) := \\
 \text{filtrer } f(C, \alpha) \text{ suivant} \\
 \quad | \epsilon \rightarrow (c_0 + 1, \dots, c_\alpha + 1, c_{\alpha+1}, \dots, c_{p-1}), u \\
 \quad | q \rightarrow g((c_0, \dots, c_{q-1}, 0, c_{q+1} + 1, \dots, c_{p-1} + 1), \alpha, u :: q)
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{l} \delta : \mathcal{S} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S} \times \mathcal{T}^* \\ \delta(C, \alpha) := g(C, \alpha, \epsilon) \end{array} \right.$$

où  $::$  est l'opérateur de concaténation.

#### 4.2.3 Définition

L'algorithme ci-dessus nous permet de définir un transducteur à états finis  $\mathfrak{T}$  calculant la trace jusque  $N$  sur  $I_{i+1}$  à partir de la trace jusque  $N$  sur  $I_i$ .

**Définition 4.6.** Pour un  $p$  fixé, le transducteur à états finis  $\mathfrak{T}$  est un 5-uplet  $(Q, \Sigma, \Gamma, I, \delta)$  dans lequel :

- l'ensemble des états  $Q$  est  $\mathcal{S}$  ;
- les alphabets d'entrée ( $\Sigma$ ) et de sortie ( $\Gamma$ ) sont tous deux  $\mathcal{T} = \{0, \dots, p-1\}$  ;
- la fonction de transition  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q \times \Gamma^*$  est définie par l'algorithme ci-dessus ;
- l'état initial est  $(0, 0, \dots, 0)$ , et nous n'avons pas besoin d'état final.

L'image d'un mot  $u$  par  $\mathfrak{T}$  sera dénotée par  $t(u)$ . Nous ne nous servons pas de la définition formelle de  $t$ , qui est quelque peu technique, nous la donnons ci-dessous par formalité.

**Définition 4.7.** Dans le but de définir  $t$ , nous définissons quelques fonctions intermédiaires. Soit  $\delta_{\mathcal{S}}$  (resp.  $\delta_{\mathcal{T}}$ ) la première (resp. seconde) projection du résultat de l'application de  $\delta$  :

$$\text{si } \delta(C, \alpha) = (C', u'), \text{ alors } \begin{cases} \delta_{\mathcal{S}}(C, \alpha) = C' \\ \delta_{\mathcal{T}}(C, \alpha) = u' \end{cases}$$

Nous définissons également la fonction de transition généralisée du transducteur :

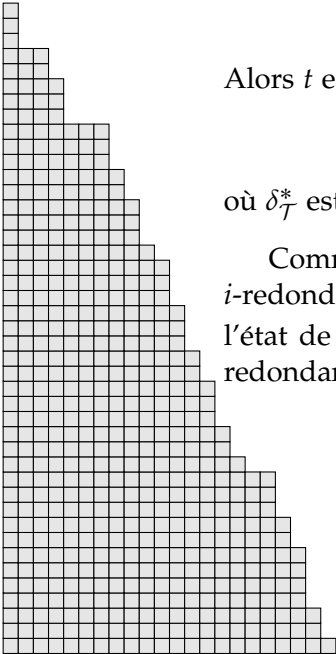
$$\delta^*(C, u) = \delta^\circ(C, u, \epsilon) \text{ avec } \begin{cases} \delta^\circ(C, \alpha u, u') = \delta^\circ(\delta_{\mathcal{S}}(C, \alpha), u, u' \delta_{\mathcal{T}}(C, \alpha)) \\ \delta^\circ(C, \epsilon, u') = (C, u') \end{cases}$$

Alors  $t$  est définie pour tout mot  $u \in \mathcal{T}^*$  par

$$t(u) = \delta_{\mathcal{T}}^*(00\dots 0, u)$$

où  $\delta_{\mathcal{T}}^*$  est la seconde projection du résultat de l'application de  $\delta^*$ .

Comme présenté dans le Lemme 4.5, si  $\alpha \neq \epsilon$  est le type d'une suite  $i$ -redondante  $\Phi_{\llbracket k; k' \rrbracket}$ , et  $C$  l'état de  $I_{i+1}$  dans  $\mu^{k-1}$ , alors  $\delta(C, \alpha)$  calcule l'état de  $I_{i+1}$  dans  $\mu^k$ , et la concaténation des types des suites  $(i+1)$ -redondantes parmi  $\Phi_{\llbracket k; k' \rrbracket}$ . Il suit que si  $\beta \neq \epsilon$  est le type d'une suite



$i$ -redondante  $\Phi_{\llbracket k'+1; k'' \rrbracket}$ , nous connaissons déjà l'état de  $I_{i+1}$  dans  $\mu^{k'}$ , et sommes capables de calculer la concaténation des types des suites  $(i+1)$ -redondantes parmi  $\Phi_{\llbracket k'+1; k'' \rrbracket}$ .

Nous avons déjà souligné le fait que dans le point fixe  $\pi(0)$ , tout intervalle  $I_i$  avec  $i > 0$  est dans l'état  $(0, 0, \dots, 0)$ . Par conséquence, si  $u$  est la trace jusque  $N$  sur  $I_i$ , alors  $t(u)$  est la trace jusque  $N$  sur  $I_{i+1}$ . De plus, nous pouvons utiliser l'égalité des alphabets d'entrée et de sortie du transducteur  $\mathcal{T}$ , pour calculer  $t(t(u))$ , la trace jusque  $N$  sur  $I_{i+2}$ , et plus généralement  $t^n(u)$  la trace jusque  $N$  sur  $I_{i+n}$  (voir la figure 4.1).

Notons pour finir que nous autorisons, dans la définition des traces sur  $I_i$  jusque  $N$ , que le dernier type de la trace soit « incomplet » : en arrêtant de considérer les avalanches à la  $N^{\text{ième}}$ , il est possible que la  $(N+1)^{\text{ième}}$  avalanche soit  $i$ -similaire à la  $N^{\text{ième}}$ . Alors,

- pour  $\Phi_{\llbracket k; N \rrbracket}$  la dernière sous-suite  $i$ -redondante de type non- $\epsilon$  de la suite des longues avalanches jusque  $N$ ,
- $\Phi_{\llbracket k; N \rrbracket}$  n'est pas  $i$ -redondante pour la suite des longues avalanches jusque  $N+1$  (car il faut lui ajouter la  $(N+1)^{\text{ième}}$  avalanche).

Ce détail sera discuté dans la partie 4.3, il s'agira simplement de considérer qu'à la fin nous avons ces quelques dernières avalanches qui forment une suite  $i$ -redondante possiblement « incomplètes », ce qui correspond à dire que le calcul de  $\delta$  peut s'arrêter après chaque appel récursif de  $g$ .

L'exemple du transducteur de KSPM(2) est proposé sur la figure 4.5, dont l'étude est l'objet de la partie qui suit.

#### 4.2.4 Analyse du transducteur pour KSPM(2)

Pour la plus petite valeur intéressante de KSPM,  $p = 2$ , le transducteur  $\mathcal{T}$  peut être dessiné (figure 4.5) et analysé. Par soucis de lisibilité, nous renommons les types  $0 \mapsto a$  et  $1 \mapsto b$ . Nous établissons dans cette partie l'émergence de mots périodiques formés d'une alternance de  $a$  et de  $b$ , par l'application répétée de la fonction de transduction  $t$ . De plus, cette émergence est exponentiellement rapide en la taille du mot d'entrée. En termes de traces, et puisque la trace jusque  $N$  est de taille inférieure à  $N$ , cela signifie qu'à partir de toute trace jusque  $N$  sur un intervalle  $I_i$ , il existe un nombre  $n$  en  $\mathcal{O}(\log N)$  tel que la trace jusque  $N$  sur  $I_{i+n}$  est périodique. Nous aborderons dans la partie 4.3 la signification des traces régulières.

Nous commencerons par introduire quelques notations et éléments de vocabulaire pour parler du transducteur, de ses états transients et récurrents, puis nous montrerons dans un premier temps qu'après deux itérations les mots non vides commencent nécessairement par  $ab$ , ce qui nous servira de base pour dans un second temps prouver l'émergence exponentiellement rapide de mots réguliers à partir de l'état 21 ainsi atteint.

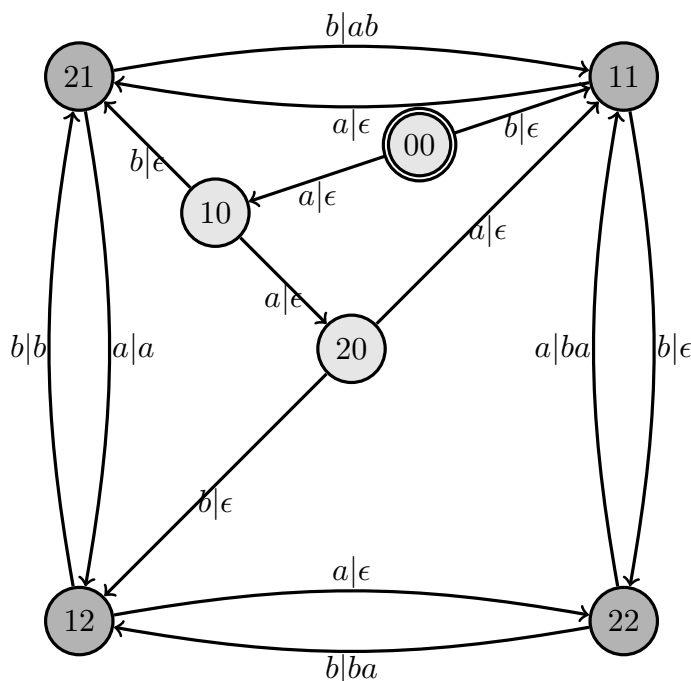
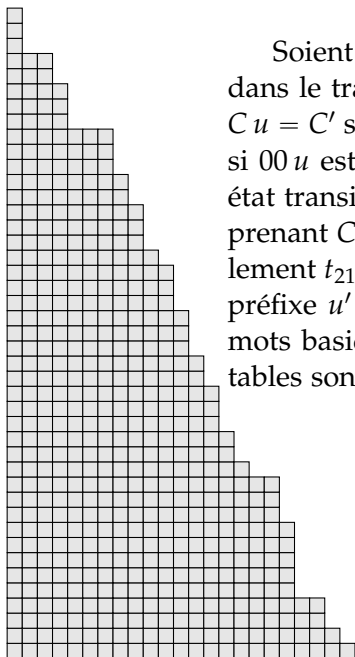


FIGURE 4.5 – Transducteur pour  $p = 2$ . Nous renommons  $0 \mapsto a$  et  $1 \mapsto b$ , et ne dessinons pas les états non connectés à l'état initial 00. Les arcs comportent des étiquettes de la forme  $x|u$ , où  $x \in \mathcal{T}$  est le type lu (entrée) et  $u \in \mathcal{T}^*$  est la séquence des types produite (sortie). Par exemple,  $t(abaaaaab) = abaab$ . Ce transducteur comporte trois états transients : 00, 10, 20; et quatre états récurrents organisés en un cycle : 11, 12, 21, 22. Remarquons que, pour  $n > 0$ , nous avons :  $t((ab)^n) = (ab)^{n-1}$ .

NOTATIONS Le transducteur pour KSPM(2) possède trois états *transients* : 00, 10, 20; et quatre états *récurrents* organisés en un cycle : 11, 12, 21, 22.

Soient  $C$  et  $C'$  deux états de  $\mathcal{S}$  et  $u$  un mot de  $\mathcal{T}^*$ . Considérons, dans le transducteur, le chemin partant de  $C$  en lisant  $u$ , nous noterons  $Cu = C'$  si ce chemin termine dans l'état  $C'$ . Un mot  $u$  est un *mot d'entrée* si  $00u$  est un état récurrent et si pour tout préfixe  $u'$  de  $u$ ,  $00u'$  est un état transient. Soit  $t_C : \mathcal{T}^* \rightarrow \mathcal{T}^*$  la fonction de transduction obtenue en prenant  $C$  pour état initial, nous avons  $t_{00} = t$ . Nous utiliserons principalement  $t_{21}$ . Un mot  $u$  est *basique* pour un état  $C$  si  $|t_C(u)| \geq 2$  et pour tout préfixe  $u'$  de  $u$ ,  $|t_C(u')| < 2$ . Pour tout état récurrent  $C$ , l'ensemble des mots basiques pour  $C$  et leur image par  $t_C$  sont donnés ci-dessous (les tables sont construites par disjonction de cas selon le début de  $u$ ).



$$\begin{array}{ll}
11 : & \begin{array}{l}
aaaa \rightarrow aba \\
aaab \rightarrow aba \\
aab \rightarrow ab \\
ab \rightarrow ab \\
ba \rightarrow ba \\
bb \rightarrow ba
\end{array} & 21 : & \begin{array}{l}
aaa \rightarrow aba \\
aab \rightarrow aba \\
ab \rightarrow ab \\
b \rightarrow ab
\end{array} \\
12 : & \begin{array}{l}
aa \rightarrow ba \\
ab \rightarrow ba \\
ba \rightarrow ba \\
bb \rightarrow bab
\end{array} & 22 : & \begin{array}{l}
a \rightarrow ba \\
b \rightarrow ba
\end{array}
\end{array}$$

Tout mot  $u$  tel que  $t(u) \neq \epsilon$  admet une unique décomposition  $u = u_0 u_1 \dots u_q$  telle que

- $u_0$  est un mot d'entrée ;
- pour  $1 \leq i < q$ ,  $u_i$  est un mot basique pour l'état  $00 u_0 u_1 \dots u_{i-1}$  ;
- $u_q$  est un préfixe non vide d'un mot basique pour l'état  $00 u_0 u_1 \dots u_{q-1}$ .

Le mot  $u$  admet également une décomposition  $u = u'_1 u'_2 \dots u'_{q'}$  telle que

- pour  $1 \leq i < q'$ ,  $u'_i$  est un mot basique pour l'état  $21 u'_1 \dots u'_{i-1}$  ;
- $u'_{q'}$  est un préfixe non vide d'un mot basique pour l'état  $21 u'_1 \dots u'_{q'-1}$ .

**PRÉFIXE** Le premier résultat ci-dessous nous indique qu'après au plus deux itérations de la fonction de transduction  $t$ , pour tout mot  $u$  le mot obtenu commence par  $ab$ , c'est-à-dire que les deux premières transitions nous emmènerons dans l'état 21. La preuve suit des constats très élémentaires sur le transducteur et les mots basiques des états récurrents.

**Lemme 4.8.** Soit le langage  $L = \{ab u : u \in \mathcal{T}^*\} \cup \{\epsilon, a\}$ .

- Pour tout  $u \in \mathcal{T}^*$ , nous avons  $t_{21}(u) \in L$  ;
- pour tout  $v \in L$ , nous avons  $t(v) \in L$  ;
- pour tout  $u \in \mathcal{T}^*$ , nous avons  $t^2(u) \in L$ .

*Démonstration.* Nous prouvons les trois points successivement en établissant des disjonctions de cas, et en utilisant les points précédents comme hypothèses.

- Soit  $u \in \mathcal{T}^*$  tel que  $u \neq \epsilon$ . Considérons la seconde décomposition décrite ci-dessus :  $u = u'_1 u'_2 \dots u'_{q'}$ . Nous obtenons  $t_{21}(u) = t_{21}(u'_1) t_C(u'_2 \dots u'_{q'})$  avec  $C$  un état récurrent, car  $21 u'_1$  est un état récurrent.
- Pour  $q' \geq 2$ ,  $t_{21}(u'_1)$  est l'image d'un mot basique pour 21, donc  $t_{21}(u'_1) \in \{ab, aba\}$  et nous avons bien  $t_{21}(u) \in L$ .
- Pour  $q' = 1$ ,  $t_{21}(u) = t_{21}(u'_1)$  et  $t_{21}(u'_1)$  est l'image d'un préfixe non vide d'un mot basique pour 21, donc  $t_{21}(u'_1)$  est un préfixe de  $aba$  et nous avons bien  $t_{21}(u) \in L$ .

- Soit  $v \in L$ . Si  $v \in \{\epsilon, a\}$ , alors  $t(v) = \epsilon$  d'après le transducteur. Si  $v = ab u$ , alors  $t(v) = t(ab)t_{21}(u) = t_{21}(u)$ , et  $t_{21}(u) \in L$  d'après le premier point. Nous avons donc dans tous les cas  $t(v) \in L$ .
- Soit  $u \in \mathcal{T}^*$  tel que  $u \neq \epsilon$ . Si  $q = 0$  alors  $t(u) = \epsilon$  pour tous les préfixes des mots d'entrée, donc  $t^2(u) = \epsilon$ . Nous considérons la première décomposition décrite ci-dessus :  $u = u_0 u_1 \dots u_q$ . Nous avons  $t(u) = t_C(u_1) t_{C u_1}(u_2 \dots u_q)$ , où  $C$  est un état récurrent.
  - Pour  $q = 1$ ,  $t(u) = t_C(u_1)$ , et  $t_C(u_1)$  est l'image par  $t_C$  d'un préfixe d'un mot basique pour  $C$ , donc  $t(u)$  est préfixe de  $aba$  ou  $ba$  car les images possibles des mots basiques sont  $ab$ ,  $ba$ , et  $aba$ . Dans tous ces cas,  $t^2(u) \in \{\epsilon, a\}$  d'après le transducteur.
  - Pour  $q \geq 2$ , nous avons  $t_C(u_1) \in \{ab, ba, aba\}$ . Si  $t_C(u_1) \in \{ab, aba\}$ , alors  $t(u) \in L$ , et donc  $t^2(u) \in L$  d'après le second point. Si  $t_C(u_1) = ba$ , alors nous pouvons poser  $t(u) = bau'$ , et ainsi  $t^2(u) = t_{21}(u')$ . Nous avons  $t_{21}(u') \in L$  d'après le premier point, d'où  $t^2(u) \in L$ .

□

**CONVERGENCE** À l'aide des développements précédents, nous définissons une notion de hauteur sur les mots de  $\mathcal{T}^*$ , comptant la différence des nombres de  $a$  et de  $b$  qu'ils contiennent. Si la hauteur de tous les préfixes d'un mot est comprise entre 0 et 1, alors ce mot est nécessairement périodique, par une induction directe sur la longueur du mot. Le Lemme 4.8 nous permet de ne considérer que les mots du langage  $L$ , en ajoutant deux itérations à la borne sur le temps de convergence de  $t$ .

**Definition 4.9.** La hauteur  $h$  d'un mot fini  $u \in \mathcal{T}^*$  est  $h(u) = ||u|_a - |u|_b|$ , où  $|u|_x$  est le nombre d'occurrences de la lettre  $x$  dans  $u$ .

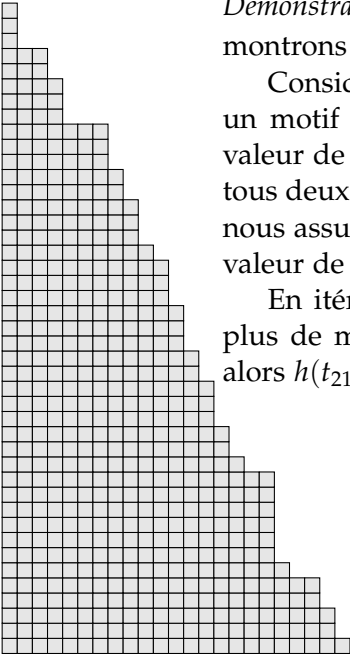
Le Lemme suivant montre que la hauteur des mots diminue par l'application de la fonction de transduction  $t$ .

**Lemme 4.10.** Pour tout mot fini  $v \in L$ ,  $h(t(v)) \leq \frac{h(v)}{4} + 1$ .

*Démonstration.* Le résultat est direct si  $v \in \{\epsilon, a\}$ . Pour un mot  $v = ab u$ , montrons que quel que soit  $u \in \mathcal{T}^*$  fini,  $h(t_{21}(u)) \leq \frac{h(u)}{4} + 1$ .

Considérons le cas  $|u|_a - |u|_b \geq 0$ . Supposons que nous supprimons un motif de la forme  $ab$  ou  $ba$  à  $u$ , cette opération ne change pas la valeur de  $h(u)$ . De plus, pour tout état récurrent  $C$ ,  $t_C(ab)$  et  $t_C(ba)$  sont tous deux des éléments de  $\{ab, ba\}$ , et  $C ab = C ba = C$ . Cette observation nous assure que la suppression de tels motifs ne change pas non plus la valeur de  $h(t_{21}(u))$ .

En itérant cet argument jusqu'à ce que le mot obtenu ne comporte plus de motif  $ab$  ou  $ba$ , nous avons l'égalité suivante : soit  $u' = a^{h(u)}$ , alors  $h(t_{21}(u')) = h(t_{21}(u))$ .



L'entier  $h(u)$  peut être écrit sous la forme  $h(u) = 4i + r$  avec  $r \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$ . Nous avons  $t_{21}(aaaa) = aba$ , et  $21aaaa = 21$ , ainsi  $t_{21}(u') = (aba)^i t_{21}(a^r)$ , ce qui nous donne

$$h(t_{21}(u')) \leq h((aba)^i) + \max_{r \in \llbracket 0; 3 \rrbracket} \{h(t_{21}(a^r))\} = i + 1.$$

Nous pouvons donc conclure que  $h(t_{21}(u)) \leq \frac{h(u)}{4} + 1$ .

L'autre cas, pour  $|u|_a - |u|_b \leq 0$ , est similaire. Par suppression des motifs  $ba$  et  $ab$ , nous obtenons  $h(t_{21}(u')) = h(t_{21}(u))$ , pour  $u' = b^{h(u)}$ . La valeur  $h(u)$  peut à nouveau être écrite  $h(u) = 4j + s$  avec  $s \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$ . Nous avons alors  $t_{21}(bbbb) = abbab$  et  $21bbbb = 21$ , et ainsi  $t_{21}(u') = (abbab)^j t_{21}(b^s)$ , ce qui nous donne

$$h(t_{21}(u')) \leq h((abbab)^j) + \max_{s \in \llbracket 0; 3 \rrbracket} \{h(t_{21}(b^s))\} = j.$$

Nous pouvons encore une fois conclure que  $h(t_{21}(u)) \leq \frac{h(u)}{4} + 1$ .  $\square$

Le Lemme suivant conclut l'étude du transducteur pour  $p = 2$ , en établissant l'emergence de mots périodiques par l'application itérée de la fonction de transduction  $t$ .

**Lemme 4.11.** *Pour tout mot  $u \in \mathcal{T}^*$  de longueur  $l$ , il existe un nombre d'itérations  $n(l)$  en  $\mathcal{O}(\log l)$  tel que  $t^{n(l)}(u)$  est un préfixe de  $(ab)^\omega$ .*

*Démonstration.* Nous commençons par montrer le résultat en nous restreignant aux mots de  $L$ .

Soit un mot fini  $v \in L$ , nous définissons la *hauteur maximale*  $g(v) = \max\{h(v') : v' \text{ préfixe de } v\}$ . Le Lemme 4.10 implique que  $g(t(v)) \leq 1 + \frac{g(v)}{4}$ . Définissons  $g'(v) = g(v) - \frac{4}{3}$ , nous avons alors :

$$g(t(v)) \leq 1 + \frac{g(v)}{4} \iff g'(t(v)) \leq \frac{g'(v)}{4}$$

Par le Lemme 4.8,  $t(v)$  est un élément de  $L$ . Nous pouvons donc itérer ce raisonnement, et obtenir pour tout  $n$ ,

$$g'(t^n(v)) \leq \frac{g'(v)}{4^n}$$

Ainsi, pour  $n > \log_4(g'(v)) - \log_4(\frac{2}{3})$ , nous avons  $g'(t^n(v)) < \frac{2}{3}$ , c'est-à-dire  $g(t^n(v)) < 2$ , et par l'intégrité des valeurs de  $g$ ,

$$g(t^n(v)) \leq 1$$

Cette dernière inégalité assure que  $u$  admet une décomposition  $t^n(v) = w_1 w_2 \dots w_q$  telle que, pour  $i \in \llbracket 1; q \rrbracket$ ,  $w_i \in \{ab, ba\}$ , et  $w_q \in \{\epsilon, a, b\}$ . Nous

pouvons conclure dans ce cas :  $t^{n+1}(u) = t(w_1)t_{21}(w_2) \dots t_{21}(w_q)$ , donc  $t^{n+1}(u)$  est un préfixe du mot infini  $(ab)^\omega$ , car  $t_{21}(ab) = t_{21}(ba) = ab$  et  $t(ab) = t(ba) = \epsilon$ .

Maintenant, pour tout mot fini  $u \in \mathcal{T}^*$ , nous avons d'après le Lemme 4.8 que  $t^2(u) \in L$ . c'est-à-dire,  $|t^2(u)| \leq 4|u|$  et  $|t^2(u)| + \frac{4}{3} \geq g'(t^2(u))$ , ce qui nous donne  $g'(t^2(u)) \leq 4|u| + \frac{4}{3}$ . En conséquence, pour  $n > \log_4(4|u| + \frac{4}{3}) - \log_4(\frac{2}{3})$ , nous obtenons que  $t^{n+1}(t^2(u))$  est un préfixe du mot infini  $(ab)^\omega$ . En d'autres termes, pour  $m > \log_4(4|u| + \frac{4}{3}) - \log_4(\frac{2}{3}) + 3$ ,  $t^m(u)$  est un préfixe du mot infini  $(ab)^\omega$ .  $\square$

Nous pouvons reformuler le Lemme 4.11 en termes de traces.

**Corollaire 4.12.** *Dans  $KSPM(2)$ , soient  $N$  un nombre de grains, et  $i \geq \mathcal{L}(2, N) + 4$ . Il existe un  $n$  en  $\mathcal{O}(\log N)$  tel que la trace jusque  $N$  sur  $I_{i+n}$  est un préfixe de  $(ab)^\omega$ .*

*Démonstration.* La trace jusque  $N$  est bien définie pour  $I_i$ , et elle est de taille inférieure à  $N$ . Nous pouvons donc appliquer le Lemme 4.11.  $\square$

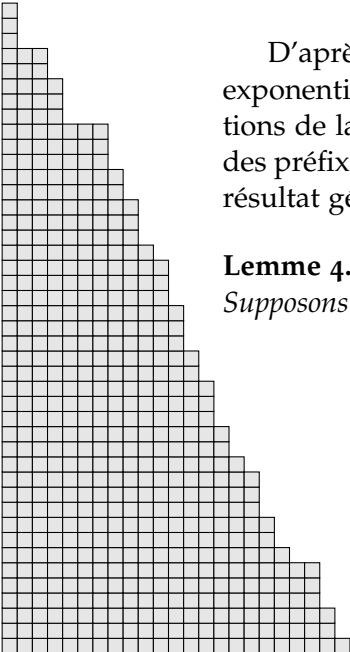
Ce résultat d'émergence nous permettra de prouver le Théorème 2.11 pour  $KSPM(2)$  (partie 4.4). Pour un paramètre général  $p$ , le transducteur comporte  $(p+1)^p$  états, ce qui rend sa lecture difficile lorsque  $p > 2$ . Dans le cas  $p = 2$ , la figure 4.5 nous permet en effet de faire une distinction entre des états transients et récurrents, ce qui n'est plus possible aussi simplement dans les autres cas. Il semble ainsi nécessaire de déduire des propriétés structurelles du transducteur à partir de sa définition formelle. Une possibilité pour simplifier ce problème pourrait être de restreindre l'ensemble des mots auxquelles nous nous intéressons, car les traces vérifient vraisemblablement certaines contraintes. Des résultats de simulations nous laissent penser que cette émergence est vérifiée dans le cas général.

### 4.3 DES TRACES AUX VAGUES

D'après le Corollaire 4.12, pour  $p = 2$  des traces périodiques émergent exponentiellement rapidement (après un nombre logarithmique d'itérations de la fonction de transition). Pour tout  $p$ , les traces régulières sont des préfixes du mot infini  $(0, \dots, p-1)^\omega$ . Nous présentons ci-dessous un résultat général concernant l'interprétation des traces régulières.

**Lemme 4.13.** *Dans  $KSPM(p)$ , soit  $I_i$  un intervalle tel que  $i \geq \mathcal{L}(p, N) + 2p$ . Supposons que la trace jusque  $N$  sur  $I_i$  soit*

$$(0, \dots, p-1)^x(0, \dots, \alpha), \text{ avec } x \geq 0 \text{ et } \alpha \leq p-1$$





et soit  $y$  la longueur de la dernière suite  $i$ -redondante, de type  $\alpha \neq \epsilon$ . Nous avons  $y \leq x + 1$ , et  $\pi(N)_{\llbracket(i+1)p; \infty\rrbracket}$  est égal à

$$\begin{cases} (\alpha \cdot \dots \cdot 1)(p \cdot \dots \cdot 1)^{x-y} 0 (p \cdot \dots \cdot 1)^y 0^\omega & \text{si } y < x + 1 \\ (\alpha + 1 \cdot \dots \cdot 1)(p \cdot \dots \cdot 1)^x 0^\omega & \text{si } y = x + 1. \end{cases}$$

*Démonstration.* Nous nous concentrons sur la partie droite des points fixes :  $\pi(k)_{\llbracket(i+1)p; \infty\rrbracket}$ . Cette preuve est une simple induction sur les avalanches, en utilisant le Théorème 3.6 qui nous permet de savoir où la prochaine avalanche va s'arrêter, et la Proposition 3.10 qui prédit les changements à apporter au point fixe. Initialement, pour  $k = 0$ , nous avons

$$\pi(k)_{\llbracket(i+1)p; \infty\rrbracket} = 0^\omega.$$

Les  $p$  premiers types (non- $\epsilon$ ) des suites  $i$ -redondantes de longues avalanches le conduisent à

$$p \cdot p - 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot 0^\omega.$$

Ensuite, à partir de  $(p \cdot \dots \cdot 1)^r 0^\omega$ , la trace applique de façon répétée les types  $0, \dots, p - 1$ . D'après le Théorème 3.6 et le Lemme 4.1, nous pouvons prédire que chaque suite  $i$ -redondante (de type non- $\epsilon$ ) comporte alors  $r + 1$  longues avalanches (il y a  $r$  pics sur lesquels l'avalanche doit s'arrêter pour chaque suite  $i$ -redondante), ainsi chaque répétition comporte  $(r + 1)p$  longues avalanches. Enfin, nous avons l'invariant suivant : la  $((r + 1)\alpha + s)$  ième longue avalanche, avec  $0 \leq \alpha < p$  et  $0 < s \leq r + 1$ , est du type  $\alpha$  (sur  $I_i$ ), et mène à

$$\begin{cases} (\alpha \cdot \alpha - 1 \cdot \dots \cdot 1)(p \cdot \dots \cdot 1)^{r-s} 0 (p \cdot \dots \cdot 1)^s 0^\omega & \text{si } s \leq r; \\ (\alpha + 1 \cdot \alpha \cdot \dots \cdot 1)(p \cdot \dots \cdot 1)^r 0^\omega & \text{si } s = r + 1. \end{cases}$$

Les étapes de l'induction découlent de l'application du Théorème 3.6 et de la Proposition 3.10.  $\square$

*Remarque 4.14.* Dans la preuve ci-dessus, l'application du Théorème 3.6 donne type par type la trace jusque  $N$  sur  $I_{i+1}$ , qui est  $(0, \dots, p - 1)^{x-1} (0, \dots, \alpha)$ . Nous avons donc que  $(0, \dots, p - 1)^\omega$  est un point fixe pour  $t$ .

Pour un paramètre  $p$ , une trace régulière sur un intervalle  $I_i$  est un préfixe de  $(0, \dots, p - 1)^\omega$ , et elle implique l'apparition des motifs réguliers de vague sur le point fixe à partir de l'intervalle suivant :

$$(p \cdot \dots \cdot 1)^* 0 (p \cdot \dots \cdot 1)^* 0^\omega.$$

## 4.4 CONCLUSION POUR KSPM(2)

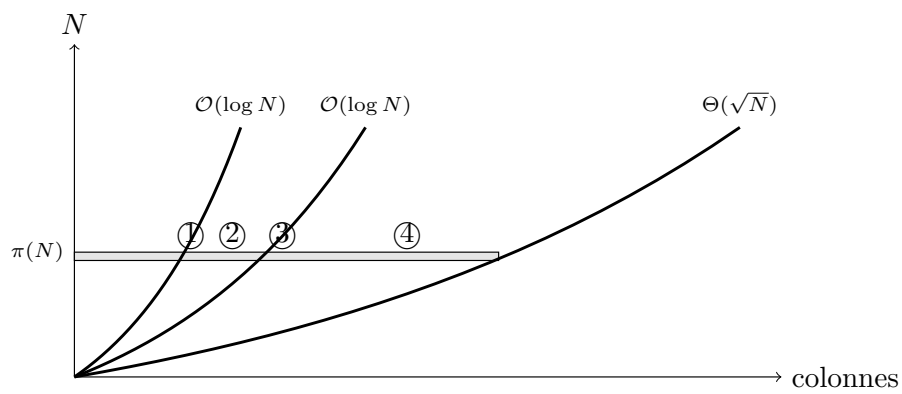
Nous avons tous les éléments pour conclure que le Théorème 2.11 est vrai pour KSPM(2).

**Théorème 4.15.** *Dans KSPM(2), pour tout nombre de grains  $N$ , il existe une colonne  $n$  en  $\mathcal{O}(\log N)$  telle que*

$$\pi(N)_{\llbracket n; \infty \rrbracket} \in (2 \cdot 1)^* 0 (2 \cdot 1)^* 0^\omega$$

*Démonstration.* D'après le Lemme 3.11,  $\mathcal{L}(p, N)$  est en  $\mathcal{O}(\log N)$ . Nous pouvons donc prendre un indice  $i$  en  $\mathcal{O}(\log N)$ , et appliquer le Corollaire 4.12, qui nous dit qu'il existe un  $m$  en  $\mathcal{O}(\log N)$  tel que la trace jusque  $N$  sur  $I_{i+m}$  est régulière. Le Lemme 4.13 prouve alors que l'énoncé du Théorème est vrai pour  $n = 2(i + m + 1)$ , qui est bien en  $\mathcal{O}(\log N)$  (figure 4.2).  $\square$

Pour KSPM(2), l'étude du transducteur a pu être combinée à l'étude de la plénitude des avalanches pour montrer le Théorème 4.15. Cependant, les techniques employées sont difficiles à généraliser, comme il a été discuté à la suite des Lemme 3.11 et Corollaire 4.12. Le tableau présenté en figure 4.6 fait un point sur les résultats qui restent à généraliser en suivant cette démarche. Dans le chapitre suivant, nous présentons une autre méthode pour montrer le Théorème 2.11, concluante pour tout  $p$ .



Resultats	$p = 2$	Pour tout $p$
① : $\mathcal{L}(p, N)$ en $\mathcal{O}(\log N)$	Lemme 3.11	×
② : Construction du transducteur	Théorème 3.6 Lemme 4.5	Théorème 3.6 Lemme 4.5
③ : Traces régulières	Corollaire 4.12	×
④ : Traces régulières et motifs de vague	Lemme 4.13	Lemme 4.13

FIGURE 4.6 – Bilan de l'étude de la plénitude des avalanches et des traces.



## DYNAMIQUE INTERNE DES POINTS FIXES

5.1	Construction de la dynamique interne des points fixes . . .	114
5.1.1	Pentes et actions . . . . .	114
5.1.2	Dynamique interne des points fixes . . . . .	115
5.2	Harmonisation des termes continu et discret . . . . .	117
5.2.1	Changement de base et projection . . . . .	117
5.2.2	Intuition . . . . .	119
5.3	Convergence du système moyennant . . . . .	120
5.3.1	Convergence linéaire . . . . .	121
5.3.2	Convergence exponentielle faible . . . . .	122
5.3.3	Convergence exponentielle forte . . . . .	125
5.4	Emergence des vagues . . . . .	126
5.4.1	Emergence faible . . . . .	126
5.4.2	Raffinement . . . . .	128

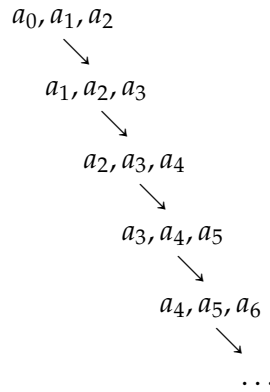
**N**OUS PRÉSENTONS DANS CE CHAPITRE une étude aboutissant à la preuve du Théorème 2.11 (énoncé à la fin du chapitre 2), qui établit l'émergence de motifs de vague réguliers recouvrant asymptotiquement entièrement les points fixes.

Dans tout ce chapitre, nous considérons un paramètre  $p$  fixé.

En partie 5.1, nous utiliserons le lien entre les représentations sous forme de suite de pentes et de suite d'actions des points fixes pour construire un système dynamique discret dans  $\mathbb{Z}^{p+1}$ , tel que l'orbite d'un point choisi en fonction du nombre de grains  $N$  décrive  $\pi(N)$ . Par exemple, pour  $p = 2$  et  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  la suite des actions du point fixe  $\pi(N)$ , ce système dynamique partira du point  $(a_0, a_1, a_2)$ , et après une itération

nous obtiendrons le point  $(a_1, a_2, a_3)$ , puis  $(a_2, a_3, a_4)$  et ainsi de suite, comme il est présenté sur le schéma suivant.

$$\pi(N) = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots)$$



Le but sera alors d'étudier la dynamique de ce système pour montrer qu'il converge exponentiellement vite en  $N$  vers un certain ensemble de points tels que nous puissions, à partir des valeurs d'actions qu'ils représentent, en déduire l'émergence des motifs de vague sur les points fixes.

Ce système est non-linéaire, car l'image d'un point de  $\mathbb{Z}^{p+1}$  sera obtenue par l'application d'une transformation linéaire, suivie de l'addition d'une petite perturbation permettant à l'image d'être à nouveau un élément de  $\mathbb{Z}^{p+1}$  à coordonnées entières. Cet « arrondi » rend l'étude de la dynamique difficile (excepté dans le cas  $p = 2$ ). La manipulation clé, présentée dans la partie 5.2, consistera à réduire ce système à un nouveau système non-linéaire dans  $\mathbb{Z}^p$ , que nous appellerons *système moyennant*, et pour lequel nous aurons une intuition claire.

Nous prouverons alors la convergence exponentiellement rapide en  $N$  du système moyennant vers certains points de  $\mathbb{Z}^p$  dont toutes les composantes sont égales, c'est-à-dire vers des vecteurs constants (partie 5.3). Une analyse de la signification des vecteurs constants permettra d'en déduire l'apparition des motifs de vague sur les points fixes, dans un premier temps en un sens faible ne correspondant pas encore à l'énoncé du Théorème 2.11 (partie 5.4). Pour montrer ce dernier il semble nécessaire de prendre en compte certains aspects de la dynamique des points fixes (de ne pas considérer uniquement  $\pi(N)$ , mais la suite des points fixes  $\pi(0), \pi(1), \dots, \pi(N)$ ), ce que nous exposerons dans la partie 5.4.2. Cette dernière partie utilisera quelques éléments de l'étude des avalanches présentée au chapitre 3.

La figure 5.1 présente graphiquement la méthode que nous suivrons, et un exemple de différentes représentations des points fixes que nous considérerons est donné sur la figure 5.3 (page 132) pour  $\pi(2000)$  et  $p = 4$ .

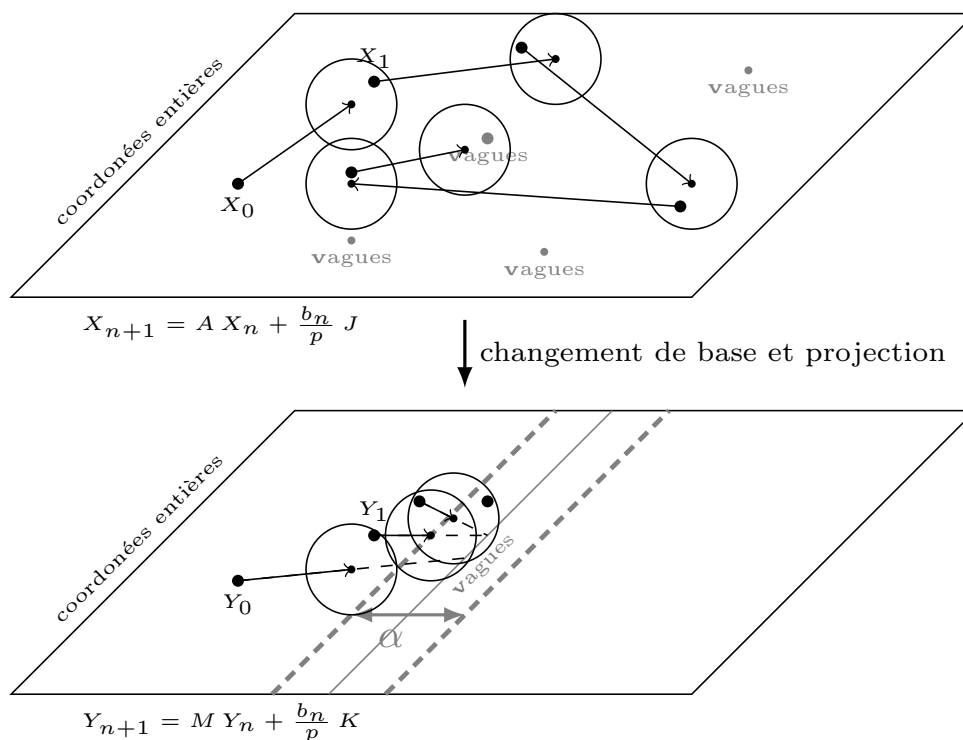


FIGURE 5.1 – Illustration de la démarche suivie dans ce chapitre. En haut : nous construisons un système dynamique dans  $\mathbb{Z}^{p+1}$  tel que l'orbite d'un point  $X_0$  choisi en fonction de  $N$  décrive la suite d'actions de  $\pi(N)$ . Ce système est non-linéaire, à chaque itération nous appliquons une transformation linéaire (flèche), suivie d'une perturbation dont nous ne connaissons pas la valeur mais qui est bornée par une constante (le cercle autour du point image de l'application linéaire). Certains points correspondent au motif de vague sur les points fixes, mais il est difficile de les identifier. Nous effectuerons alors une transformation du système. En bas : le système, après changement de base et projection, a un comportement plus intuitif. À chaque étape de temps, l'application linéaire fait tendre le point vers une zone bien identifiée correspondant à des vecteurs constants, et malgré la perturbation nous prouverons que le point  $Y_0$  tend exponentiellement rapidement vers un tel vecteur constant (en deux temps, d'abord à distance inférieure à une constante  $\alpha$  près, puis vers ce vecteur constant). Enfin, nous verrons que les vecteurs constants impliquent la forme de vague sur les colonnes décrites par la fin de l'orbite.

## 5.1 CONSTRUCTION DE LA DYNAMIQUE INTERNE DES POINTS FIXES

Nous commençons dans la partie 5.1.1 par relier les représentations d'un point fixe  $\pi(N)$  sous forme de suite de pentes et de suite d'actions. À partir de cette relation, nous construisons en 5.1.2 un système dynamique discret non-linéaire dans  $\mathbb{Z}^{p+1}$ , contraint par la règle de transition et la stabilité des points fixes, et tel que l'orbite d'un point défini en fonction du nombre de grains  $N$  décrive  $\pi(N)$  de la gauche vers la droite. Nous parlons ainsi de *dynamique interne* des points fixes.

## 5.1.1 Pentes et actions

Un point fixe  $\pi(N)$  peut être représenté par sa suite des pentes  $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$  ( $b_i = \pi(N)_i$  pour tout  $i$ ), et par sa suite des actions  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . Reprenons le lien établi entre ces deux représentations au chapitre 2 (équation 2.2),

$$\text{pour tout } n \geq p : b_n = a_{n-p} - (p+1)a_n + p a_{n+1}.$$

La plus petite valeur de la suite des actions ainsi considérée est  $a_0$ , dont nous ne connaissons pas la valeur. Pour simplifier les discussions, nous prenons les conditions initiales suivante,

$$\begin{cases} a_{-p} = N \\ a_i = 0 \end{cases} \quad \text{pour tout } i \in \llbracket -p+1 ; 0 \rrbracket$$

qui signifient que la colonne 0 est la seule à recevoir  $N$  fois une unité de pente (une unité pour chaque éboulement de la colonne hypothétique d'indice  $-p$ ). Avec ces conditions initiales, l'équation ci-dessus est valable pour tout  $i \geq 0$ , et nous la reformulons en,

$$\text{pour tout } n \geq 0 : a_{n+1} = -\frac{1}{p} a_{n-p} + \frac{p+1}{p} a_n + \frac{1}{p} b_n. \quad (5.1)$$

Puisque  $\pi(N)$  est un point fixe, nous avons de plus une contrainte de stabilité pour toutes ses colonnes,

$$\text{pour tout } i \geq 0 : 0 \leq b_n \leq p.$$

L'équation 5.1 exprime l'action de la colonne  $n+1$  en fonction de l'action des colonnes  $n-p$  et  $n$ , plus une perturbation bornée  $0 \leq \frac{b_n}{p} \leq 1$ .

*Remarque 5.1.* Notons que  $a_{n+1} \in \mathbb{N}$ , donc  $-a_{n-p} + (p+1)a_n + b_n \equiv 0 \pmod{p}$ . Par conséquent, la valeur de  $b_n$  est *presque déterminée* : étant donnés  $a_{n-p}$  et  $a_n$ , il n'y a qu'une seule valeur possible pour  $b_n$ , sauf si  $-a_{n-p} + (p+1)a_n \equiv 0 \pmod{p}$ , auquel cas  $b_n$  vaut 0 ou  $p$ .



Par exemple, considérons  $\pi(2000)$  pour  $p = 4$  (figure 5.3b page 132). Nous avons  $a_8 = 120$  et  $a_4 = 189$ , ainsi  $-a_4 + 5a_8 = 411 \equiv 3 \pmod{4}$ . Nous pouvons en déduire que  $b_8$  vaut 1, de telle sorte que  $a_9 = -\frac{1}{4}a_4 + \frac{5}{4}a_8 + \frac{1}{4}b_8 = 103$  soit un entier.

La remarque ci-dessus jouera un rôle central après l'étude du système que nous allons construire, pour retrouver les valeurs de la pente du point fixe à partir de valeurs d'actions, et montrer l'émergence des motifs de vague.

### 5.1.2 Dynamique interne des points fixes

Nous réécrivons la relation 5.1 en un système dans  $\mathbb{N}^{p+1}$ , pour la manipuler plus aisément.

$a_{n+1}$  est exprimé en fonction de  $a_{n-p}$  et  $a_n$ , donc nous construisons une suite de vecteurs  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  avec  $X_i \in \mathbb{N}^{p+1}$  et telle que

$$X_n = {}^t(a_{n-p}, a_{n-p+1}, \dots, a_n)$$

où  ${}^t v$  dénote la transposée de  $v$  ( $X_n$  est un vecteur colonne). Nous ne considérons que des configurations finies, donc il existe toujours un entier  $n_0$  (en  $\Theta(\sqrt{N})$  d'après la Proposition 2.8) tel que  $X_n = \mathbb{0}$  pour  $n \geq n_0$ , avec  $\mathbb{0} = {}^t(0, \dots, 0)$ .

Étant donnés  $X_n$  et  $b_n$  nous pouvons calculer  $X_{n+1}$  avec la relation

$$X_{n+1} = A X_n + \frac{b_n}{p} J \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -\frac{1}{p} & 0 & & 0 & \frac{p+1}{p} \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique  $B = (e_0, e_1, \dots, e_p)$ , et  $A$  est une matrice carrée de taille  $p + 1$ . Nous prendrons comme convention pour l'écriture des matrices que les espaces blancs sont des zéros, et les espaces en pointillés sont les suites induites par leurs extrémités.

Ce système exprime les valeurs de la suite d'actions autour de la position  $n + 1$  (via  $X_{n+1}$ ) en fonction de la suite d'actions autour de la position  $n$  (via  $X_n$ ) et de la pente en  $n$  (via  $b_n$ ). Ainsi l'orbite du point correspondant aux conditions initiales  $X_0 = {}^t(N, 0, \dots, 0, a_0)$  de  $\mathbb{N}^{p+1}$  décrit la suite d'actions du point fixe  $\pi(N)$ .

Notons qu'il peut sembler étrange d'étudier la suite  $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$  à l'aide d'un système dynamique discret présupposant une connaissance de  $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$  pour calculer les images. Nous verrons que ce système s'avère en effet utile, grâce au fait que les valeurs de  $b_n$  sont bornées et *presque déterminées* (Remarque 5.1) : dans la suite du chapitre nous ne ferons aucune supposition sur la suite  $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$  (excepté la stabilité  $0 \leq b_i \leq p$  pour tout  $i$ )

et prouverons que ce système non-déterministe converge exponentiellement rapidement en  $N$ . Ainsi, nous obtiendrons un indice  $n$  en  $\mathcal{O}(\log N)$  tel que la suite  $(b_i)_{i \geq n}$  sera *déterminée* à avoir une forme régulière de vagues répétées.

Le système que nous obtenons est non-linéaire, car l'application linéaire est suivie d'une perturbation induite par la contrainte d'intégrité des valeurs de la pente. Bien que la perturbation soit bornée par une constante globale à chaque étape ( $b_n \leq p$  pour  $n$  puisque  $\pi(N)$  est un point fixe), la non-linéarité du système nous empêche d'établir la convergence avec une simple formule du type  $\|X_{n+1}\| \leq \alpha \|X_n\|$  (pour  $\|\cdot\|$  une norme et  $0 < \alpha < 1$ ).

Soit  $\phi$  la transformation correspondante de  $\mathbb{Z}^{p+1}$  dans  $\mathbb{Z}^{p+1}$ , qui est composée de deux termes : une *application linéaire*  $A$  et une *perturbation*  $\frac{b_n}{p} J$ . Soit

$$R(x) = x^{p-1} + \frac{p-1}{p}x^{p-2} + \dots + \frac{2}{p}x + \frac{1}{p},$$

le polynôme caractéristique de  $A$  est  $(1-x)^2R(x)$ . Nous pouvons remarquer tout d'abord que 1 est valeur propre double. Une seconde remarque, qui aide à avoir une vision d'ensemble du système, est que toutes les autres valeurs propres de  $A$  sont distinctes et plus petites que 1 (voir le Lemme 5.6 ci-après, en utilisant une borne par ENERSTRÖM et KAKAYA). Par conséquent, il existe une base telle que la matrice  $\phi$  soit sous forme normale de Jordan avec un bloque de taille 2 correspondant à la valeur propre double 1. Ensuite, nous pourrions projeter selon les  $p-1$  autres composantes et obtenir une matrice diagonale pour notre transformation, avec l'espoir qu'il présente un comportement contractant simple à montrer. Nous ne suivrons pas exactement cette approche, mais utiliserons ces remarques dans la partie 5.3.

Nous avons essayé d'exprimer la transformation  $\phi$  dans une base telle que sa matrice soit sous forme normale de Jordan, mais n'avons pas réussi à saisir l'effet de la perturbation ainsi transformée. Nous exprimerons plutôt  $\phi$  dans une base telle que la matrice et la perturbation interagissent harmonieusement. La preuve du Théorème 2.11 procèdera en trois étapes :

1. la construction d'un nouveau système dynamique discret : nous exprimerons tout d'abord  $\phi$  dans une nouvelle base  $B'$ , puis projeterons selon une de ses composantes (partie 5.2) ;
2. le comportement de ce nouveau système sera compréhensible en des termes simples, et nous verrons qu'il converge exponentiellement rapidement (en  $\mathcal{O}(\log N)$  étapes) vers un vecteur constant (partie 5.3) ;

3. finalement, nous prouverons que dès que nous obtenons un vecteur constant dans ce nouveau système dynamique discret, les motifs de vague du Théorème 2.11 apparaissent (partie 5.4).

## 5.2 HARMONISATION DES TERMES CONTINU ET DISCRET

Dans cette partie, nous présentons la transformation appliquée au système de la dynamique interne des points fixes nous permettant d'entrevoir la démarche à suivre pour obtenir le résultat (partie 5.2.1). Pour alléger cette présentation, nous postposons en partie 5.2.2 la discussion des intuitions pour trouver cette manipulation clé dans la preuve du Théorème 2.11.

### 5.2.1 Changement de base et projection

À partir du système dynamique  $X_{n+1} = A X_n + \frac{b_n}{p} J$  dans la base canonique  $B$ , nous construisons un nouveau système pour la transformation  $\phi$  en deux temps : premièrement nous changeons la base de  $\mathbb{Z}^{p+1}$  dans laquelle nous exprimons  $\phi$ , de la base canonique  $B$  à une base  $B'$  ; deuxièmement nous projetons  $\phi$  selon la première composante de  $B'$ . Nous appellerons *système moyennant* le système obtenu dans  $\mathbb{Z}^p$ , dont nous pourrons prédire la dynamique intuitivement, ce qui nous permettra de dérouler une étude de sa convergence vers un vecteur constant dans la partie 5.3.

Soient

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad B'^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 \\ -1 & \ddots & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

deux matrices carrées de taille  $p + 1$  et posons  $B' = (e'_0, \dots, e'_p)$ , avec  $e'_i$  la  $(i + 1)^{\text{ième}}$  colonne de la matrice  $B'$ . Alors  $B'$  est une base de  $\mathbb{Z}^{p+1}$ , car nous pouvons engendrer la base canonique  $B = (e_0, \dots, e_p)$ .

$$\begin{cases} e_i = e'_i - e'_{i+1} \text{ pour } i \in \llbracket 0; p \llbracket \\ e_p = e'_p \end{cases}$$

Nous effectuons le changement de base de  $B$  à  $B'$ ,

$$\begin{aligned} B'^{-1} X_{n+1} &= B'^{-1} A B' B'^{-1} X_n + \frac{b_n}{p} B'^{-1} J \\ \iff X'_{n+1} &= A' X'_n + \frac{b_n}{p} J' \end{aligned}$$

avec

$$X'_n = B'^{-1} X_n \quad A' = B'^{-1} A B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ 0 & \frac{1}{p} & \dots & \frac{1}{p} \end{pmatrix} \quad J' = B'^{-1} J = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nous procédons à la seconde étape, en projetant selon  $e'_0$ . Soit donc  $P$  la projection dans  $\mathbb{Z}^{p+1}$  selon  $e'_0$  sur  $\{0\} \times \mathbb{Z}^p$ . Nous pouvons remarquer que  $e'_0$  est un vecteur propre de  $A'$ ,

$$A' e'_0 = e'_0$$

donc la composante correspondant est indépendante des autres dans ce système, et projeter selon  $e'_0$  correspond simplement à effacer cette première composante du vecteur  $X'_i$ . Par commodité, nous ne noterons pas la composante fixée à 0 des objets de  $\{0\} \times \mathbb{Z}^p$ .

Le nouveau système dynamique dont nous allons étudier la convergence, que nous nommerons *système moyennant*, est

$$Y_{n+1} = M Y_n + \frac{b_n}{p} K \quad (5.2)$$

avec les éléments suivants de  $\mathbb{Z}^p$  (de  $\{0\} \times \mathbb{Z}^p$ ),

$$Y_n = P X'_n \quad M = P A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ \frac{1}{p} & \frac{1}{p} & \dots & \frac{1}{p} \end{pmatrix} \quad K = P J' = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Voyons plus en détail  $Y_n$ , et l'information sur le point fixe qu'il représente. Nous avons  $X_n = {}^t(a_{n-p}, a_{n-p+1}, \dots, a_n)$ , ce qui donne

$$Y_n = P B'^{-1} X_n = \begin{pmatrix} a_{n-p+1} - a_{n-p} \\ \vdots \\ a_{n-1} - a_{n-2} \\ a_n - a_{n-1} \end{pmatrix} \text{ et pour l'initialisation } Y_0 = \begin{pmatrix} -N \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_0 \end{pmatrix}.$$

$Y_n$  représente donc des différences d'action, qui peuvent être négatives. Dans la partie 5.3 nous verrons que le système moyennant à un comportement pour lequel nous avons une intuition claire, et nous prouverons, à partir de  $Y_0$ , sa convergence exponentiellement rapide en  $N$  vers un vecteur constant. La partie 5.4 se concentrera ensuite sur les conséquences que nous pouvons tirer de la présence d'un vecteur  $Y_n$  constant, c'est-à-dire la création et le maintien des motifs réguliers de vague.

## 5.2.2 Intuition

La transformation que nous avons effectuée nous permet de passer de l'expression des suites d'actions aux suite de différences d'action. Ces suites sont présentées pour  $p = 2$  et  $N = 2000$  sur les figures 5.3b et 5.3c (page 132). Nous pouvons remarquer sur ces deux diagrammes qu'avant d'effectuer ce changement de base, nous aurions voulu prouver que la suite des actions tend vers une suite de la forme

$$\begin{array}{l} \dots, \\ p + 2p + 3p, \dots, p + 2p + 6, p + 2p + 3, \\ \qquad \qquad \qquad p + 2p, \dots, p + 4, p + 2, \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad p, \dots, 2, 1, 0^\omega. \end{array}$$

Nous voyons toutefois dans le motif ci-dessus qu'en considérant la suite des différences d'action, nous obtenons

$$\begin{array}{l} \dots, \\ 3, \dots, 3, 3, \\ \qquad \qquad \qquad 2, \dots, 2, 2, \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 1, \dots, 1, 1, 0^\omega. \end{array}$$

L'idée naturelle est ainsi montrer que la suite des différences d'action tend vers des séquences de  $p$  valeurs constantes (exactement ce que permet le système moyennant, comme nous le verrons). En suivant la démarche de construction du système de la dynamique interne des points fixes présentée dans la partie 5.1.2 pour les suites de différences d'action à la place des suites d'actions, nous aurions obtenu exactement le même système dans  $\mathbb{Z}^{p+1}$ , à partir de la relation

$$a_{n+1} - a_n = \frac{p+1}{p} (a_n - a_{n-1}) - \frac{1}{p} (a_{n-p} - a_{n-p-1}) + \frac{1}{p} (b_n - b_{n-1}).$$

Cette méthode ne nous aurait donc pas permis d'avoir une meilleure intuition sur la marche à suivre pour trouver une projection vers  $\mathbb{Z}^p$  et montrer que le système obtenu converge vers des vecteurs constants.

Lorsque nous passons à la base  $B'$ , nous considérons les vecteurs

$$X'_n = B'^{-1} X_n = \begin{pmatrix} a_{n-p} \\ -a_{n-p} + a_{n-p+1} \\ -a_{n-p+1} + a_{n-p+2} \\ \vdots \\ -a_n + a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Il semble que ce soit la valeur  $a_{n-p}$ , qui n'est pas une différence d'action, et que nous effaçons lors de la projection, qui permette d'obtenir le

système moyennant et d'effectuer les développements présentés dans la partie 5.3. Nous n'avons pas abordé le problème de la perturbation, qui doit se comporter harmonieusement avec la partie linéaire de la dynamique pour pouvoir conclure. Il se trouve que le changement de base vers  $B'$  et la projection  $P$  permet à l'ensemble de suivre une dynamique pour laquelle nous avons une intuition claire. Cette transformation est la simplification de manipulations à l'origine plus confuses (un changement de base, suivi d'un plongement, puis un nouveau changement de base, et enfin une projection), et nous n'avons pas d'explication satisfaisante d'une méthode « automatique » aboutissant à sa découverte.

### 5.3 CONVERGENCE DU SYSTÈME MOYENNANT

Le système moyennant est compréhensible en termes simples. À partir de  $Y_n$  dans  $\mathbb{Z}^p$ , nous obtenons  $Y_{n+1}$  en,

1. décalant toutes les valeurs d'un rang vers le haut ;
2. pour la composante du bas, en calculant la moyenne des valeurs composant  $Y_n$ , et en y ajoutant une petite perturbation (un multiple de  $\frac{1}{p}$  entre 0 et 1).

Soit  $y_n$  la première composante de  $Y_n$ , nous avons donc

$$Y_n = {}^t(y_n, \dots, y_{n+p-1}).$$

Soit également  $m_n$  la moyenne des valeurs de  $Y_n$ ,

$$m_n = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} y_{n+i}.$$

*Remarque 5.2.* Les  $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  sont toujours des vecteurs d'entiers, donc la perturbation ajoutée à la dernière composante est encore une fois *presque déterminée* :  $(m_n + \frac{b_n}{p}) \in \mathbb{Z}$  et  $0 \leq \frac{b_n}{p} \leq 1$ . Par conséquent, si  $m_n$  n'est pas un entier alors  $b_n$  est *déterminée* à la valeur  $p([\![m_n]\!] - m_n)$ , et sinon  $b_n$  vaut 0 ou  $p$ .

Par exemple, considérons  $\pi(2000)$  pour  $p = 4$  (voir la figure 5.3c page 132, qui représente  $a_n - a_{n+1}$  à la position  $n$ ). Nous avons  $Y_{13} = {}^t(-3, -5, -7, -7)$ , soit  $m_{13} = -\frac{11}{2}$ , et  $b_{13}$  est déterminée à la valeur 2 pour que  $Y_{14} = {}^t(-5, -7, -7, -5)$  soit un vecteur d'entiers (sa dernière composante est égale à  $m_{13} + \frac{b_{13}}{4}$ ).

Nous pouvons prédire intuitivement la dynamique de ce système à mesure que les nouvelles valeurs sont calculées : à une large échelle —lorsque les valeurs sont grandes comparées à  $p$ — le système évolue grossièrement vers la moyenne des valeurs du vecteur initial  $Y_0$  ; et à une

petite échelle —lorsque les valeurs sont petites comparées à  $p$ — la perturbation fait quelque peu « sursauter » les points. Les développements qui précèdent permettent de montrer grâce à un argument simple que ces petits « sursauts » n'empêchent pas la convergence exponentielle du système vers un vecteur constant.

L'étude du système moyennant fonctionne dans le détail en trois étapes :

- (i). établir une convergence linéaire du système à chaque étape, puis exprimer  $Y_n$  en fonction de  $Y_0$  et  $(b_i)_{0 \leq i \leq n}$  ;
- (ii). isoler la perturbation induite par les  $(b_i)_{0 \leq i \leq n}$  et la borner par une constante indépendante de  $N$  ;
- (iii). montrer que l'autre partie (correspondant à l'application linéaire  $M$ ) est contractante exponentiellement rapidement.

D'après (ii) et (iii), un point converge exponentiellement rapidement vers une boule de rayon constant autour d'un vecteur constant, et ensuite d'après (i) ce point nécessite un nombre constant d'itérations supplémentaires pour atteindre le centre de la boule, c'est-à-dire un vecteur constant.

Soient  $m_n$  (resp.  $\bar{m}_n, \underline{m}_n$ ) la moyenne (resp. maximale, minimale) des valeurs des composantes de  $Y_n$ . Nous allons montrer que  $\bar{m}_n - \underline{m}_n$  converge en  $\mathcal{O}(\log N)$  itérations vers 0.

*Remarque 5.3.* La matrice  $M$  est stochastique (termes positifs et dont la somme sur une ligne vaut 1) mais non doublement-stochastique (cette observation n'est plus vraie pour les colonnes). Pour toute matrice stochastique, 1 est le module d'une valeur propre et les autres sont toutes de module inférieur ou égal à 1. Intuitivement, le système moyennant ne converge pas vers  $\mathbb{0}$  mais vers un vecteur constant, ce qui est exprimé par la valeur propre de module 1 de vecteur propre associé  $(1, \dots, 1)$  (partie 5.3.2). Dans notre cas, nous souhaitons de plus que les autres valeurs propres soient de module strictement inférieures à 1, et que la dynamique de cette matrice s'accorde avec la perturbation discrète, ce qui rend l'étude plus compliquée. Notons en outre que  $M$  est une *matrice compagne*, ce qui nous servira pour exprimer son polynôme caractéristique.

### 5.3.1 Convergence linéaire

Pour établir la convergence linéaire, nous utilisons l'intégrité des valeurs  $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  qui composent les vecteurs  $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . L'idée est la suivante : pour calculer la nouvelle valeur nous commençons par considérer  $m_n$ , puis ajoutons  $\frac{b_n}{p}$ . Nous remarquons alors que lorsque  $\underline{m}_n \neq \bar{m}_n$ ,  $m_n$  est strictement entre ces extrêmes, et l'ajout d'une perturbation ne peut pas faire passer  $m_n$  au dessus de la valeur maximale. Après au plus  $p$  itérations, toutes les valeurs calculées sont donc strictement plus proches les unes

des autres qu'à l'étape  $n$ , car la valeur minimale a strictement augmenté et la valeur maximale n'a pas augmenté.

**Lemme 5.4.** *La valeur de  $\bar{m}_n - \underline{m}_n$  décroît linéairement : si  $\underline{m}_n \neq \bar{m}_n$ , alors il existe un nombre d'itération  $c$ , avec  $1 \leq c \leq p$ , tel que*

$$\bar{m}_{n+c} - \underline{m}_{n+c} < \bar{m}_n - \underline{m}_n.$$

*Démonstration.* Si  $\underline{m}_n \neq \bar{m}_n$ , c'est-à-dire si le vecteur  $Y_n$  n'est pas constant, alors la moyennes des valeurs de  $Y_n$  est strictement entre la plus petite et la plus grande :  $\underline{m}_n < m_n < \bar{m}_n$ . Ainsi,  $\underline{m}_n < y_{n+p} = m_n + \frac{b_n}{p} \leq \bar{m}_n$  puisque  $0 \leq \frac{b_n}{p} \leq 1$  et  $(m_n + \frac{b_n}{p}) \in \mathbb{Z}$  (il n'est pas possible d'atteindre un entier supérieur à  $\bar{m}_n$ ), et nous obtenons  $\underline{m}_n \leq \underline{m}_{n+1} \leq \bar{m}_{n+1} \leq \bar{m}_n$ .

Ce raisonnement s'applique tant que  $\underline{m}_{n+i} \neq \bar{m}_{n+i}$ , donc  $\underline{m}_{n+i} < y_{n+i+p} \leq \bar{m}_{n+i}$  et  $\underline{m}_{n+i} \leq \underline{m}_{n+i+1} \leq \bar{m}_{n+i+1} \leq \bar{m}_{n+i}$ .

Si il existe  $c \leq p$  tel que  $\underline{m}_{n+c} = \bar{m}_{n+c}$ , alors le résultat est vrai. Dans le cas contraire, pour  $0 \leq i < p$ , nous avons  $\underline{m}_n \leq \underline{m}_{n+i} < y_{n+i+p} \leq \bar{m}_{n+i} \leq \bar{m}_n$ , or ces valeurs de la suite  $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  composent  $Y_{n+p}$ , et nous en déduisons donc  $\underline{m}_n < \underline{m}_{n+p} \leq \bar{m}_{n+p} \leq \bar{m}_n$ , ce qui complète la preuve.  $\square$

### 5.3.2 Convergence exponentielle faible

Nous montrons ici que le système converge exponentiellement rapidement vers un vecteur dont les valeurs sont proches les unes des autres à une constante indépendante de  $N$  près. Intuitivement, lorsque  $\bar{m}_n - \underline{m}_n$  est grand comparé à  $p$ , l'effet de la perturbation est négligeable.

**Lemme 5.5.** *Soit  $p$  fixé. Il existe une constante  $\alpha$  et un  $n_0$  en  $\mathcal{O}(\log N)$  tels que  $\bar{m}_{n_0} - \underline{m}_{n_0} < \alpha$ .*

*Démonstration.* Nous partons du vecteur  $Y_0 = {}^t(-N, 0, \dots, 0, a_0)$ , pour lequel  $\bar{m}_0 - \underline{m}_0 = N + a_0 \leq \frac{p+1}{p}N$  puisque  $a_0 \leq \frac{N}{p}$  ( $a_0$  est l'action de la colonne 0 qui contient initialement  $N$  grains, et à chaque fois que cette colonne est tirée elle perd  $p$  grains).

La relation liant  $Y_n$  à  $Y_{n+1}$  est

$$Y_{n+1} = M Y_n + \frac{b_n}{p} K.$$

Puisque nous souhaitons prouver que  $Y_n$  converge vers un vecteur proche de la moyenne des valeurs de ses composantes, nous allons considérer l'évolution d'un vecteur de distance à la moyenne associé à  $Y_n$ , en utilisant les vecteurs constants  $M_n = (m_n, \dots, m_n)$  de  $\mathbb{Z}^p$ .



Soit  $Z_n = Y_n - M_n$ , nous avons

$$Z_{n+1} = O Z_n + \frac{b_n}{p} L \quad \text{où} \quad \begin{cases} O = D M \\ L = D K \end{cases}$$

$$\text{et avec } D = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

car  $D M Y_n = D M D Y_n$ .

L'objectif est alors de montrer qu'il existe un  $n_0$  en  $\mathcal{O}(\log N)$  tel que la norme de  $Z_{n_0}$  est bornée par une constante.

Nous exprimons  $Z_n$  en termes de  $Z_0$  et  $(b_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$  :

$$Z_n = O^n Z_0 + \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{n-1} b_i O^{n-1-i} L.$$

Dans le but de prouver le résultat, nous allons montrer que l'application linéaire  $O$  est  *finalement contractante*  (en anglais, *eventually contracting*), donc elle converge exponentiellement rapidement vers  $0$ , son unique point fixe ([KH96] Corollaire 2.6.13). C'est-à-dire,  $O^n Z_0$  converge vers  $0$  exponentiellement rapidement. Il restera alors à borner supérieurement la norme de la somme restante par une constante  $\alpha$  pour obtenir le résultat.

Pour prouver que  $O = D M$  est finalement contractante, il suffit de montrer que son *rayon spectral* (le plus grand module de ses valeurs propres) est strictement inférieur à 1 ([KH96] Corollaire 3.3.5). Ce point est détaillé dans le Lemme 5.7 qui suit, en utilisant le fait que  $M$  est une matrice compagnon dont le module des valeurs propres est borné par un résultat de ENESTRÖM et KAKEYA.

Puisque  $\bar{m}_0 - \underline{m}_0$  est en  $\mathcal{O}(N)$ ,  $\|Z_0\|_\infty$  est également en  $\mathcal{O}(N)$ , et il existe un  $n_0$  en  $\mathcal{O}(\log N)$  tel que  $\|O^{n_0} Z_0\|_\infty < 1$ .

Il reste à borner supérieurement la somme restante. Nous utiliserons la norme des matrices, définie pour une matrice  $A$  par  $\|A\|_\infty = \sup \|A x\|_\infty$  pour  $\|x\|_\infty = 1$ .

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{n_0-1} b_i O^{n_0-1-i} L \right\|_\infty &\leq \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{n_0-1} \|O\|_\infty^{n_0-1-i} \|L\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{1 - \|O\|_\infty} \|L\|_\infty \\ &\leq \beta - 1 \end{aligned}$$

pour une constante  $\beta$  indépendante de  $N$ . Nous avons ainsi

$$\|Z_{n_0}\|_\infty \leq \|O^{n_0} Z_0\|_\infty + \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{n_0-1} b_i O^{n_0-1-i} L \|_\infty \leq \beta$$

et le fait que  $\bar{m}_{n_0} - \underline{m}_{n_0} \leq 2 \|Z_{n_0}\|_\infty$  complète la preuve avec  $\alpha = 2\beta$ .  $\square$

**POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE** Nous présentons une rapide étude du polynôme

$$R(x) = x^{p-1} + \frac{p-1}{p} x^{p-2} + \cdots + \frac{2}{p} x + \frac{1}{p}$$

utilisé dans la preuve du Lemme 5.7 qui suit.

**Lemme 5.6.** *Le polynôme  $R(x)$  a  $p-1$  racines distinctes  $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$ , et pour tout  $i$ ,  $|\lambda_i| \leq \frac{p-1}{p}$ .*

*Démonstration.* Nous commençons par montrer que  $S(x) = p x^{p-1} R(\frac{1}{x}) = x^{p-1} + 2 x^{p-2} + \cdots + (p-1)x + p$  a ses racines distinctes, ce qui implique la même conclusion pour  $R(x)$ . Nous déduisons la non égalité des racines de  $S(x)$  par la co-primalité de  $S(x)$  et  $S'(x)$ . Avec  $\mu = \frac{-p+1}{p(p+1)} x + \frac{1}{p}$  et  $\nu = \frac{1}{p(p+1)} x^2 - \frac{1}{p(p+1)} x$ , nous obtenons  $\mu S(x) + \nu S'(x) = 1$ . Par le Théorème de Bachet-Bézout,  $\text{PGCD}(S(x), S'(x)) = 1$  implique le résultat.

Pour la seconde partie du Lemme, nous utilisons un résultat classique de ENESTRÖM et KAKEYA (voir par exemple [Pra04] qui reprend le résultat des papiers historiques [Eneoc; Kak12]). Ce résultat affirme que pour un polynôme  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$  dont tous les coefficients sont strictement positifs, alors toute racine  $\lambda$  vérifie

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left( \frac{a_{i-1}}{a_i} \right) \leq |\lambda| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left( \frac{a_{i-1}}{a_i} \right)$$

dans notre cas, nous obtenons que toutes les racines (possiblement complexes) de  $R(x)$  sont de module inférieur ou égal à  $\frac{p-1}{p}$ .  $\square$

**MATRICE CONTRACTANTE** Nous montrons ici que la matrice  $O = D M$  est finalement contractante.

**Lemme 5.7.** *Le rayon spectral de la matrice  $O$  est strictement inférieur à 1.*

*Démonstration.*  $M$  est une matrice compagnon, son polynôme caractéristique est donc donné par la formule

$$x^p - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{p} x^k = (x-1) R(x)$$

avec  $R(x) = x^{p-1} + \frac{p-1}{p} x^{p-2} + \cdots + \frac{2}{p} x + \frac{1}{p}$  (voir par exemple [HJ90]). D'après le Lemme 5.6 nous savons que  $R(x)$  a  $p-1$  racines distinctes  $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$ , toutes comprises entre  $\frac{1}{p}$  et  $\frac{p-1}{p}$ . L'ensemble des valeurs propres de  $M$  est donc  $M_\lambda = \{1, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}\}$ . Nous allons montrer que l'ensemble des valeurs propres de  $O = D M$  est  $DM_\lambda = \{0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}\}$ .

Soient  $v_0, \dots, v_{p-1}$  des vecteurs propres non nul respectivement associés aux valeurs propres  $1, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$  de  $M$ . Le cas particulier  $v_0$  permet de conclure que  $0$  est valeur propre de  $DM$ , et les autres valeurs propres de  $M$  sont également valeurs propres de  $DM$  avec les vecteurs propres  $v_1, \dots, v_{p-1}$  :

- $DM v_0 = D v_0$  puisque la valeur propre associée est  $1$ , et  $D v_0 = 0$  car l'espace propre associé à la valeur propre  $1$  est l'hyperplan des vecteurs constants. Ainsi  $0$  est valeur propre de  $DM$ .
- Pour les autres vecteurs propres, c'est-à-dire pour  $1 \leq i \leq p-1$ , soit  $c_i$  le vecteur constant dont toutes les composantes valent  $\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} v_{i_k}$ , avec  $v_{i_k}$  la  $k^{\text{ième}}$  composante du vecteur  $v_i$ .  $v_i - c_i \neq 0$ , et

$$\begin{aligned} DM(v_i - c_i) &= D(M v_i - M c_i) \\ &= D(\lambda_i v_i - c_i) \\ &= \lambda_i D v_i - D c_i \\ &= \lambda_i(v_i - c_i) - 0 \end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue par définition de  $D$  :  $D v_i = v_i - c_i$ . En conséquence,  $\lambda_i$  est une valeur propre de  $DM$ .

Pour conclure,  $DM_\lambda = \{0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}\}$  et le rayon spectral de  $O = DM$  est inférieur ou égal à  $\frac{p-1}{p}$ . □

### 5.3.3 Convergence exponentielle forte

À partir des Lemmes 5.4 et 5.5, nous pouvons prouver le résultat attendu.

**Lemme 5.8.** *Soit  $p$  fixé. Il existe un  $n$  en  $\mathcal{O}(\log N)$  tel que  $Y_n$  est un vecteur constant.*

*Démonstration.* Soit  $p$  fixé. En partant de  $\bar{m}_0 - \underline{m}_0$  en  $\mathcal{O}(N)$ , nous avons une constante  $\alpha$  et un  $n_0$  en  $\mathcal{O}(\log N)$  tels que  $\bar{m}_{n_0} - \underline{m}_{n_0} < \alpha$  grâce à la convergence exponentielle à une échelle large (Lemme 5.5). Ensuite, après  $p$  itérations la valeur de  $\bar{m}_{n_0+p} - \underline{m}_{n_0+p}$  décroît d'au moins  $1$  (Lemme 5.4). Ainsi, il existe un nombre d'itérations  $\beta$ , avec  $\beta \leq p\alpha$ , tel qu'après  $\beta$  itérations supplémentaires à partir de  $n_0$ , nous ayons  $\bar{m}_{n_0+\beta} - \underline{m}_{n_0+\beta} = 0$ . C'est-à-dire que  $Y_{n_0+\beta}$  est un vecteur constant, et  $n_0 + \beta$  est en  $\mathcal{O}(\log N)$ . □

Dans cette preuve, ni l'étude discrète ni l'étude continue n'est concluante en elle-même. D'un côté, l'étude discrète donne une convergence linéaire et non exponentielle du système. De l'autre côté, l'étude continue donne une convergence exponentielle vers un vecteur constant, mais à elle seule la partie continue n'atteint jamais le vecteur constant mais tend asymptotiquement vers lui. C'est la combinaison de ces deux modalités (discrète et continue) qui permet de conclure.

*Remarque 5.9.* Notons que pour  $p = 1$ , le système moyennant a une dynamique triviale. Pour  $p = 2$ , son comportement est moins évident, mais des simplifications majeures apparaissent : la nouvelle valeur calculée est la moyenne de deux valeurs, donc dans ce cas la différence  $\bar{m}_n - \underline{m}_n$  décroît d'un facteur deux à chaque itération.

5.4 EMERGENCE DES VAGUES

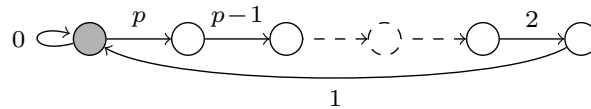
Rappelons que nous appelons *vague* le motif  $p \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$  sur la suite des pentes. Le Lemme 5.8 montre qu'il existe un  $n$  en  $\mathcal{O}(\log N)$  tel que  $Y_n$  est un vecteur constant. Dans cette partie, nous commencerons par montrer que si  $Y_n$  est un vecteur constant, alors à partir de la colonne  $n$  la suite des pentes est exclusivement constituée de vagues, séparées par un nombre arbitraire de 0. Il semble être nécessaire de dépasser notre étude *directe* de la dynamique interne d'un *seul* point fixe pour raffiner ce résultat, ce que nous proposerons dans la partie 5.4.2 concluant la preuve du Théorème 2.11.

5.4.1 Emergence faible

**Lemme 5.10.**  $Y_n$  est un vecteur constant de  $\mathbb{Z}^p$  implique

$$\pi(N)_{\llbracket n; \infty \rrbracket} \in \left( 0 + (p \cdot p-1 \cdot \dots \cdot 1) \right)^* 0^\omega$$

*Démonstration.* L'idée de cette preuve suit l'application de la Remarque 5.2. Si  $Y_n$  est un vecteur constant, alors  $b_n$  vaut 0 ou  $p$ . Si  $b_n = 0$ , alors  $Y_{n+1}$  est toujours un vecteur constant ; si  $b_n = p$ , alors la suite  $(b_i)_{i \in \llbracket n; n+p \rrbracket}$  est déterminée à prendre les valeurs  $p \cdot p-1 \cdot \dots \cdot 1$ , et  $Y_{n+p}$  est à nouveau un vecteur constant. Le diagramme suivant illustre cette observation : le sommet gris correspond à un  $Y_n$  constant, et à chaque itération nous suivons un arc dont l'étiquette donne la valeur de  $b_n$ . En partant du sommet gris, les étiquettes de tout chemin terminant sur le sommet gris (la suite  $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est ultimement égale à 0) vérifient l'énoncé du Lemme.



Concentrons nous sur les valeurs de  $Y_n$ . Le fait que ses composantes sont entières, et particulièrement la dernière, va jouer un rôle très important dans la détermination de la valeur  $b_n$ , car  $0 \leq b_n \leq p$  ( $b_n$  est la pente du point fixe  $\pi(N)$  à l'indice  $n$ , c'est-à-dire  $b_i = \pi(N)_i$ ).

Nous partons de l'hypothèse  $Y_n = {}^t(\alpha, \dots, \alpha)$  pour une constante  $\alpha \in \mathbb{Z}$ , donc d'après la relation  $Y_{n+1} = M Y_n + \frac{b_n}{p} K$  nous avons  $Y_{n+1} =$

${}^t(\alpha, \dots, \alpha, \alpha + \frac{b_n}{p})$ .  $Y_{n+1}$  est un vecteur d'entiers et  $\alpha$  est un entier, donc  $b_n$  vaut 0 ou  $p$ .

- Si  $b_n = 0$  alors  $Y_{n+1} = {}^t(\alpha, \dots, \alpha)$  et nous sommes de nouveau dans la situation de départ.
- Si  $b_n = p$  alors  $Y_{n+k+1} = {}^t(\alpha, \dots, \alpha, \alpha + 1)$  d'après la relation ci-dessus. Un motif de vague émerge alors.
  - Si  $Y_{n+1} = {}^t(\alpha, \dots, \alpha, \alpha + 1)$ , alors  $Y_{n+2} = {}^t(\alpha, \dots, \alpha, \alpha + 1, \frac{p\alpha+1+b_{n+1}}{p})$  et cela détermine  $b_{n+1} = p - 1$  de façon à ce que  $Y_{n+2} = (\alpha, \dots, \alpha, \alpha + 1, \alpha + 1)$  soit un vecteur d'entiers.
  - Si  $Y_{n+2} = {}^t(\alpha, \dots, \alpha, \alpha + 1, \alpha + 1)$ , alors  $Y_{n+2} = {}^t(\alpha, \dots, \alpha, \alpha + 1, \frac{p\alpha+2+b_{n+2}}{p})$  et cela détermine  $b_{n+2} = p - 2$  de façon à ce que  $Y_{n+3} = {}^t(\alpha, \dots, \alpha, \alpha + 1, \alpha + 1, \alpha + 1)$  soit un vecteur d'entiers.
  - Ainsi de suite, nous avons  $b_{n+i} = p - i$  pour  $0 \leq i < p$ , et finalement  $Y_{n+p} = {}^t(\alpha + 1, \dots, \alpha + 1)$  est un vecteur constant (notons que  $Y_0$  a une moyenne négative, ce qui est consistant avec le  $\alpha + 1$  obtenu).

Nous sommes donc de nouveau dans la situation de départ, après qu'une vague entière soit apparue.

Naturellement, ce processus continu tant que  $Y_n \neq 0$ . □

En composant les Lemmes 5.8 et 5.10, nous pouvons montrer l'émergence, à partir d'une colonne logarithmique en  $N$ , des motifs de vague tels qu'ils sont présentés dans le Lemme 5.10.

**Corollaire 5.11.** *Soit  $p$  fixé. Pour tout nombre de grains  $N$ , il existe une colonne  $n$  en  $\mathcal{O}(\log N)$  telle que*

$$\pi(N)_{\llbracket n; \infty \rrbracket} \in \left(0 + (p \cdot p - 1 \cdot \dots \cdot 1)\right)^* 0^\omega$$

Notons que la Proposition 2.7, affirmant qu'il est impossible d'avoir des séquences de plus de  $p + 1$  hauteurs consécutives égales sur les configurations atteignables depuis  $(N, 0^\omega)$ , nous permet d'obtenir le Corollaire suivant.

**Corollaire 5.12.** *Soit  $p$  fixé. Pour tout nombre de grains  $N$ , il existe une colonne  $n$  en  $\mathcal{O}(\log N)$  telle que*

$$\pi(N)_{\llbracket n; \infty \rrbracket} \in \left(p \cdot p - 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot \left(\bigoplus_{i=0}^p 0^i\right)\right)^* 0^\omega$$

$$\text{avec } \bigoplus_{i=0}^p 0^i = \underbrace{0 \dots 0}_p + \dots + 00 + 0 + \epsilon.$$

Ce résultat indique qu'à partir d'un indice logarithmique en le nombre de grains, les points fixes sont constitués de vagues séparées par des séquences d'au plus  $p$  symboles 0, comme il est présenté sur la figure 5.2.

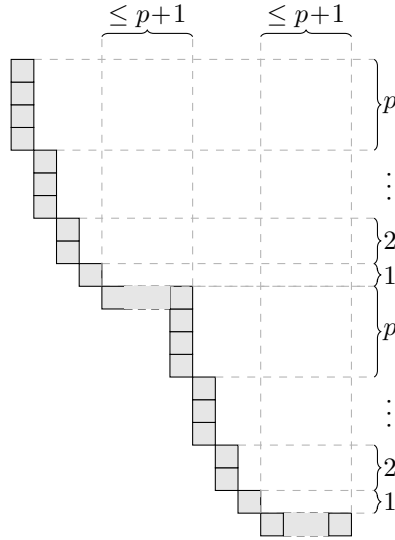


FIGURE 5.2 – Emergence de motifs de vague faibles (Corollaire 5.12) : illustration de l'expression régulière  $(p \cdot p-1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot \left(\sum_{i=0}^p 0^i\right))^*$ .

5.4.2 Raffinement

Dans le but de prouver le Théorème 2.11, nous raffinons le Corollaire 5.12 pour montrer qu'il y a au plus un plateau de taille 2 parmi les motifs de vague, correspondant à un symbole 0 dans la suite des pentes. Il semble nécessaire de dépasser l'étude *directe* pour le point fixe  $\pi(N)$  présentée ci-avant, et de considérer la *dynamique* des points fixes de  $\pi(0)$  à  $\pi(N)$ , par une induction sur  $N$ .

Le Corollaire 5.12 (qui renforce le Corollaire 5.11) donne la suite des pentes à partir d'un indice  $n$ . Le lemme qui suit utilise le Lemme 3.5 de localité des avalanches pour étudier le comportement d'une avalanche sur une telle suite de pentes, et montrer qu'elle a la propriété d'être pleine à partir de  $n$  et termine sur la première pente de valeur 0 qu'elle rencontre.

**Lemme 5.13.** Soient  $n$  et  $N$  tels que

$$\pi(N)_{\llbracket n; \infty \rrbracket} \in (p \cdot p-1 \cdot \dots \cdot 1) \left(0 + (p \cdot p-1 \cdot \dots \cdot 1)\right)^* 0^\omega.$$

$s^{N+1}$  désigne la  $(N + 1)^{\text{ième}}$  avalanche, et nous avons

- $\mathcal{L}'(p, N + 1) \leq n$  ;
- et si  $\max s^{N+1} \geq n$  alors  $\max s^{N+1} = \min \{i > n : \pi(N)_i = 0\} - p$ .

*Démonstration.* Dans le cas où  $\max s^{N+1} < n$ , les deux parties du résultat sont immédiatement vraies. Considérons le cas où  $\max s^{N+1} \geq n$ .

Nous montrons les deux parties du Lemme par induction sur le nombre de vagues consécutives (sans 0 entre elles). Le Lemme 3.5 de localité des avalanches nous permet d'observer que :

1. nous avons au moins un pic toutes les  $p$  colonnes ;
2. et les pics sont nécessairement de pente  $p$  dans  $\pi(N)$ .

Pour démarrer l'induction, remarquons que le plus grand indice tiré par la  $(N + 1)^{\text{ième}}$  avalanche,  $\max s^{N+1}$ , est par définition un pic. Puisque  $\max s^{N+1} \geq n$ , il y a donc au moins un pic parmi les indices  $n$  à  $n + p - 1$  (observation 1), or  $\pi(N)_{\llbracket n ; n+p-1 \rrbracket}$  est une vague, donc l'unique pic est à l'indice  $n$  (l'unique valeur  $p$ , observation 2).

L'hypothèse d'induction est la suivante : nous avons  $q$  un pic avec  $\pi(N)_q = p$  qui appartient à une vague allant de  $q$  à  $q + p - 1$ . Montrons que si la prochaine vague est consécutive ( $q + p \neq 0$ ) alors  $q + p$  est un pic et les colonnes  $q + 1$  à  $q + p - 1$  sont des cols (première partie du résultat) ; et si  $q + p = 0$  alors  $q = \max s^{N+1}$  (deuxième partie du résultat, et termine la première partie du résultat).

- Si  $q + p \neq 0$ , c'est-à-dire si nous avons une vague des indices  $q + p$  à  $q + 2p - 1$ , alors par les observations 1 et 2, la colonne  $q + p$  est un pic. Les colonnes  $q + 1$  à  $q + p - 1$  sont alors des cols dans  $s^{N+1}$  (ce ne sont pas des pics par l'observation 2) :

$$\dots (p \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1) (p \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1) \dots$$

$$\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$$

$$\quad \quad \quad q \quad \quad \quad q+p$$

- l'éboulement de  $q + p$  donne  $p$  unités de pente à  $q + p - 1$ , or  $\pi(N)_{q+p-1} = 1$  donc cette colonne devient instable et s'éboule ;
- l'éboulement de  $q + p - 1$  donne  $p$  unités de pente à  $q + p - 2$ , or  $\pi(N)_{q+p-2} = 2$  donc cette colonne devient instable et s'éboule ;
- ...
- l'éboulement de  $q + 2$  donne  $p$  unités de pente à  $q + 1$ , or  $\pi(N)_{q+1} = p - 1$  donc cette colonne devient instable et s'éboule.

Les colonnes  $q + 1$  à  $q + p - 1$  sont donc bien des cols, et nous avons le pic  $q + p$  qui appartient à une vague allant de  $q + p$  à  $q + 2p - 1$  (hypothèse d'induction pour  $q + p$ ).

- Si  $q + p = 0$  :

$$\dots (p \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1) 0 \dots$$

$$\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$$

$$\quad \quad \quad q \quad \quad \quad q+p$$

D'après l'observation 2 il n'y a pas de pic parmi les colonnes  $q + 1$  à  $q + p$ , et par l'observation 1 nous avons que  $q$  est le plus grand pic de l'avalanche, ce qui montre la deuxième partie de l'énoncé.

La première partie du résultat est montrée directement car tous les indices de  $n$  à  $\max s^{N+1}$  sont éboulés (nous pouvons aussi appliquer le Corollaire 3.7 à la première étape de l'induction).  $\square$

D'après le Corollaire 5.12, ce Lemme s'applique pour une colonne  $n$  en  $\mathcal{O}(\log N)$ . Nous avons alors  $\mathcal{L}'(p, N)$  en  $\mathcal{O}(\log N)$ , c'est-à-dire que la  $N^{\text{ième}}$  avalanche est pleine à partir d'un indice logarithmique en  $N$ , et nous en déduisons le Corollaire suivant.

**Corollaire 5.14.** *Soit  $p$  fixé,  $\mathcal{L}(p, N)$  est en  $\mathcal{O}(\log N)$ .*

Nous pouvons conclure ce chapitre par une preuve du Théorème 2.11 décrivant asymptotiquement complètement la forme des points fixes. Nous partons du résultat du Corollaire 5.12 décrivant le point fixe à partir d'un indice  $n$  par des vagues séparées par des suites de pentes égales à 0, et montrons par induction sur le nombre de grains que le point fixe comporte toujours au plus un plateau qui est de taille 2 sur les colonnes à la droite de  $n$ , en utilisant le Lemme 5.13 qui nous dit où les avalanches s'arrêtent.

**Théorème 2.11.** *Soit  $p$  fixé. Pour tout nombre de grains  $N$ , il existe une colonne  $n$  en  $\mathcal{O}(\log N)$  telle que*

$$\pi(N)_{\llbracket n; \infty \rrbracket} \in (p \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1)^* 0 (p \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1)^* 0^\omega$$

*Démonstration.* Nous montrons le résultat par induction sur le nombre de grains  $N$ . D'après le Corollaire 5.12, pour tout  $N' \leq N$  il existe une colonne  $n'$  en  $\mathcal{O}(\log N')$  telle que  $\pi(N')_{\llbracket n'; \infty \rrbracket}$  est de la forme

$$\left( p \cdot p-1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot \left( \begin{array}{c} p \\ \vdots \\ 0^i \end{array} \right) \right)^* 0^\omega.$$

Soit  $\mathcal{N}$  l'ensemble de ces indices  $n'$  (pour  $N'$  de 0 à  $N$ ). Nous allons considérons la colonne  $\ell = \max \mathcal{N} + p$  qui est en  $\mathcal{O}(\log N)$ , et montrer que  $\pi(N)_{\llbracket \ell; \infty \rrbracket}$  comporte au plus un plateau de taille 2.

Nous prouvons le résultat par induction, en supposant que pour un certain  $N'$  avec  $N' < N$  nous avons au plus une valeur de pente 0 dans  $\pi(N')_{\llbracket \ell; \infty \rrbracket}$  (en dehors du  $0^\omega$  final), et en montrant qu'alors ceci est toujours vrai pour  $N' + 1$ . Soit  $q = \min \{i \geq \ell : \pi(N')_i = 0\}$  l'indice de la valeur de pente 0 parmi les vagues, ou le premier indice de la séquence infinie de 0. Pour  $\pi(N')$ , nous avons schématiquement

$$\dots (p \cdot p-1 \cdot \dots \cdot 1) \underset{\uparrow q-p}{0} (p \cdot p-1 \cdot \dots \cdot 1)^* \underset{\uparrow q}{0} 0^\omega$$



avec  $\ell \leq q$ .

- Si  $\max s^{N'+1} + p < \ell$  alors cette avalanche ne modifie pas les pentes à droite de l'indice  $\ell$  (inclus), donc  $\pi(N' + 1)_{\llbracket \ell; \infty \rrbracket}$  comporte toujours au plus une valeur de pente 0.
- Si  $\max s^{N'+1} + p \geq \ell$  alors par définition de  $\ell$  nous pouvons appliquer le Lemme 5.13 pour une colonne inférieure ou égale à  $\ell - p$ , ce qui nous donne
  - $\mathcal{L}'(p, N' + 1) \leq \ell - p$  (hypothèse  $\mathcal{H}_{\text{pleine}}$ )
  - $\max s^{N'+1} = \min \{i > \ell - p : \pi(N')_i = 0\} - p$
 Puisque  $\max s^{N'+1} + p \geq \ell$ , nous avons

$$\min \{i > \ell - p : \pi(N')_i = 0\} \geq \ell$$

ce qui signifie d'après notre hypothèse d'induction que  $\max s^{N'+1} = q - p$ .

Grâce à la plénitude de l'avalanche avant l'indice  $\ell - p$  (hypothèse  $\mathcal{H}_{\text{pleine}}$ ), nous pouvons appliquer la Proposition 3.10 pour connaître les valeurs de  $\pi(N' + 1)$  sur la droite de l'indice  $\ell$ , avec  $\max s^{N'+1} = q - p$  :

- $\pi(N' + 1)_{q-p} = 0$ ;
- $\pi(N' + 1)_{q-p+i} = \pi(N')_{q-p+i} + 1$  pour  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ;
- $\pi(N' + 1)_i = \pi(N')_i$  pour  $i \geq \ell$  et  $i \notin \llbracket q - p; q \rrbracket$ .

Ainsi la valeur de pente 0 est « remontée » d'une vague sur la gauche, ce qui conclut la preuve. □

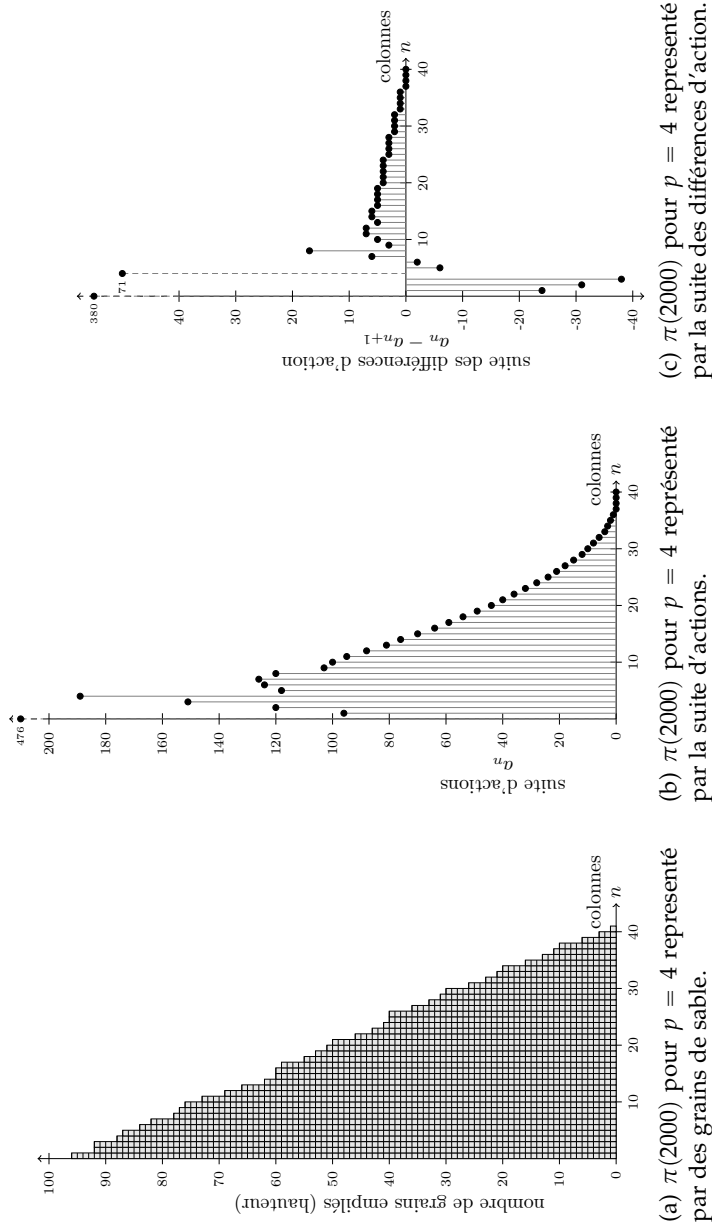


FIGURE 5-3 – Représentations de  $\pi(2000)$  pour  $p = 4$ .  
 $\pi(2000) = 4, 0, 4, 1, 3, 2, 4, 1, 1, 3, 4, 3, 4, 2, 0, 1, 4, 2, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 0, 4, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 0^{\omega}$

## DISCUSSION

6.1	Description asymptotique . . . . .	133
6.2	Précision du résultat . . . . .	134
6.2.1	Borne inférieure . . . . .	134
6.2.2	Formule close . . . . .	134
6.2.3	Configurations atteignables . . . . .	135
6.3	Emergence, discrétude et continuité . . . . .	136
6.4	Vers le modèle de tas de sable BTW . . . . .	137
6.5	Paradoxe sorite . . . . .	138

**N**OUS PROPOSONS UNE DISCUSSION du résultat, des précisions qu’il est envisageable d’y apporter, et dans quelles directions l’étude plus approfondie de la méthode employée pourrait apporter des éclaircissements.

### 6.1 DESCRIPTION ASYMPTOTIQUE

Le Théorème 2.11 est une caractérisation asymptotique de la forme des points fixes du modèle de pile de sable Kadanoff, en fonction du nombre de grains  $N$  et du paramètre  $p$ , montrant l’émergence à partir d’une colonne  $v(N)$  en  $\mathcal{O}(\log N)$  de formes de vague répétées très régulièrement. Soulignons qu’asymptotiquement, la taille  $w(N)$  du support de la configuration étant en  $\Theta(\sqrt{N})$  colonnes, nous avons

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{v(N)}{w(N)} = 0$$

ce qui signifie que la taille relative de la partie non capturée par la description du Théorème 2.11 est asymptotiquement nulle, et que les points fixes sont en ce sens asymptotiquement *quasi-complètement* constitués de vagues.

## 6.2 PRÉCISION DU RÉSULTAT

## 6.2.1 Borne inférieure

Une approche pour raffiner l'idée d'émergence des vagues sur les points fixes serait de montrer que les motifs de vague réguliers n'apparaissent pas avant un indice logarithmique.

**Conjecture 6.1.** *Soit  $p$  fixé. Pour tout nombre de grains  $N$ , la plus petite colonne  $n$  vérifiant la formule ci-dessous est en  $\Theta(\log N)$ .*

$$\pi(N)_{\llbracket n; \infty \rrbracket} \in (p \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1)^* 0 (p \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1)^* 0^\omega$$

## 6.2.2 Formule close

Trouver, pour la colonne à partir de laquelle les vagues apparaissent, une formule close incluant le paramètre  $p$  (plutôt qu'une asymptote pour  $p$  fixé) permettrait de compléter l'étude du modèle de pile de sable Kadanoﬀ. Nous pouvons nous inspirer du travail de Guillaume HANROT, Xavier PUJOL et Damien STÉHLÉ qui présentent l'étude d'un système dynamique proche, pour borner le temps d'exécution d'un algorithme de réduction de réseaux [HPS11].

D'après les termes et notations du chapitre 5, il s'agit d'utiliser la norme euclidienne  $\|\cdot\|_2$  pour borner le temps de convergence du système moyennant. Pour un vecteur  $Y_n$  de ce système, nous considérons la dynamique des différences à la moyenne  $Z_n = Y_n - M_n$ , via la transformation non-linéaire  $Z_n = O^n Z_0 + s$  où la norme euclidienne du terme  $s$  est bornée supérieurement par  $\frac{1}{1-\|O\|_2} \|L\|_2$  (preuve du Lemme 5.5), et  $O = DM$  avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ \frac{1}{p} & \frac{1}{p} & \dots & \frac{1}{p} \end{pmatrix}.$$

La difficulté est alors d'étudier la vitesse de convergence (vers 0) en fonction de  $n$  de la norme euclidienne du terme linéaire  $O^n Z_0$ . Nous avons

$$\|O^n Z_0\|_2 = {}^t Z_0 ({}^t O O)^n Z_0$$

avec  ${}^t$  la transposée des vecteurs et matrices. Remarquons que  ${}^t O O$  est une matrice symétrique, par exemple pour  $p = 4$  :

$${}^t O_4 O_4 = \frac{1}{4^3} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 43 & -21 & -21 \\ -1 & -21 & 43 & -21 \\ -1 & -21 & -21 & 43 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons donc appliquer le Théorème spectral (voir par exemple [Hal63]), qui nous indique que toutes les valeurs propres de  ${}^tOO$  sont réelles, et que cette matrice est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres. La recherche d'une telle base parait abordable, mais dans notre cas ce ne serait pas suffisant car 1 semble toujours valeur propre de  ${}^tOO$ , donc nous ne pourrions pas obtenir une décroissance exponentielle en  $n$  de  ${}^tZ_0 ({}^tOO)^n Z_0$ . Une issue possible est de considérer la matrice  $({}^tOO)^{p-1}$ , qui a expérimentalement toutes ses valeurs propres inférieures à 1. L'obstacle de cette approche consiste à exprimer les valeurs propres de  $({}^tOO)^{p-1}$  par un calcul symbolique.

Plus généralement, il parait bénéfique de creuser les liens entre les problèmes de réduction de réseau et de comportement des piles de sable, qui ont été établis récemment et semblent prégnants [MV10].

### 6.2.3 Configurations atteignables

Une caractérisation simple des configurations atteignables à partir d'un nombre fini de grains empilés sur une seule colonne, c'est-à-dire des éléments de  $KSPM(p, N)$ , permettrait sans doute une meilleure compréhension de la dynamique du modèle Kadanoff. Les stratégies d'extrême gauche (les avalanches) étudiées dans les chapitres 3 et 4 ne nous font visiter qu'un sous ensemble très restreint des configurations atteignables. En effet, la pente de toute colonne d'une configuration atteinte au cours de la  $N^{\text{ième}}$  avalanche pour un paramètre  $p$  est toujours comprise entre 0 et  $2p$  (le cas de la colonne 0 est éventuellement différent). Or, nous atteignons facilement pour tout  $p$  une pente arbitraire à une position arbitraire :

- dans un premier temps, remarquons qu'avec  $N = j(p+1)^i$  nous pouvons obtenir une pente de  $j$  à l'indice  $ip$  par la stratégie

$$s = (\underbrace{0, \dots, 0}_{j(p+1)^{i-1}}, \underbrace{p, \dots, p}_{j(p+1)^{i-2}}, \underbrace{2p, \dots, 2p}_{j(p+1)^{i-3}}, \dots, \underbrace{(i-1)p, \dots, (i-1)p}_j).$$

À chaque étape nous avons suffisamment de pente sur la colonne tirée (grâce au groupe d'éboulements qui précède), et les  $j$  derniers éboulements donnent  $j$  unités de pente à la colonne d'indice  $ip$  ;

- ensuite, notons que les pentes des colonnes  $(i-1)p$  à  $ip-1$  sont de valeur 0 car
  - la colonne  $(i-1)p$  a reçu  $j(p+1)$  fois 1 unité de pente par les éboulements de la colonne  $(i-2)p$ , et a donné  $j$  fois  $p+1$  unités de pente par ses propres éboulements ;
  - aucune des colonnes qui changent sur la pente aux indices  $(i-1)p+1$  à  $ip-1$  ne sont éboulées dans la stratégie  $s$ .

Nous obtenons alors une pente de valeur  $j'$  à l'indice  $ip + i'$  en prenant  $j = j'(p+1) \left(\frac{p+1}{p}\right)^{i'}$  et en poursuivant la stratégie  $s$  avec

$$s' = \underbrace{(ip, \dots, ip)}_{j' \left(\frac{p+1}{p}\right)^{i'}} \underbrace{(ip-1, \dots, ip-1)}_{j' \left(\frac{p+1}{p}\right)^{i'-1}} \dots \underbrace{((i-1)p+i', \dots, (i-1)p+i')}_{j'}$$

À chaque étape nous avons suffisamment de pente sur la colonne tirée (grâce au groupe d'éboulements qui précède), et les  $j'$  derniers éboulements donnent  $j'$  unités de pente à la colonne d'indice  $ip + i'$ , qui valait 0.

Alors avec la stratégie  $s \cdot s'$ , nous atteignons une configuration de pente  $j'$  à l'indice  $ip + i'$  à partir de la configuration initiale avec

$$N = \left( j'(p+1) \left( \frac{p+1}{p} \right)^{i'} \right) (p+1)^i$$

grains empilés, pour tous  $i, i'$  et  $j'$ .

Pour le modèle KSPM(1)=SPM, une caractérisation élégante est possible à partir des plateaux et des falaises : deux plateaux doivent être séparés par au moins une falaise. La généralisation à tout paramètre  $p$  du modèle KSPM nécessite davantage de contraintes.

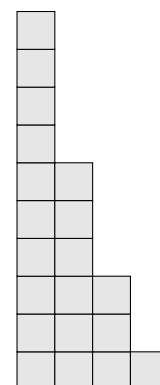
### 6.3 ÉMERGENCE, DISCRÉTUDE ET CONTINUITÉ

Notre étude du comportement asymptotique des piles de sable peut être interprété comme étant à la frontière entre phénomènes discrets et continus. Nous avons déjà souligné que lorsqu'un point fixe comporte peu de grains, chacun de ces grains contribue pour une grande part à la forme du point fixe, alors que lorsque le nombre de grains est très important, chacun compte peu dans la forme globale du point fixe. En étudiant de façon précise la forme du point fixe pour un grand nombre de grains, il en ressort une interprétation naturelle d'un lien ces deux modalités. La forme de vague suggère d'être représentative du comportement continu par son analogie avec un liquide, alors que le segment initial à l'allure désordonnée ferait référence au comportement discret. Il en ressort que le modèle de pile de sable Kadanoff sépare les modalités discrètes et continues sur deux parties distinctes des points fixes. De plus, la forme asymptotique des points fixes est alors entièrement continue, ce qui est satisfaisant. Remarquons que le comportement interprété comme continu *émerge* de la partie discrète, car tous les grains qui la composent en sont issus !

Il semble approprié de parler d'*émergence* dynamique des vagues : pour un paramètre  $p$  une vague seule est constituée de

$$v = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^i j = \frac{1}{6} p(p+1)(p+2) \text{ grains.}$$

Cependant (sauf pour  $p = 1$ ) le point fixe  $\pi(v)$  ne forme jamais une vague : à la première application de la règle des grains sont présents sur  $p + 1$  colonnes différentes, or la vague concerne  $p$  colonnes. Les vagues ne sont donc pas créées immédiatement.



Soulignons que nous montrons qu'il émerge des motifs très réguliers sans rien pouvoir dire de la partie gauche (avant les vagues). Comprendre ce segment initial semble difficile car nous avons deux intuitions contradictoires : il semble expérimentalement très peu ordonné avec de nouveaux motifs apparaissant toujours plus tard au cours de la dynamique ; et pourtant la régularité d'apparition des motifs de vague émerge. Etudier quel(s) sens du mot « désordre » il est possible de placer ou non derrière une partie de laquelle émerge rapidement une régularité aussi forte serait intéressant pour la compréhension des conditions d'apparition des phénomènes d'*émergence*.

#### 6.4 VERS LE MODÈLE DE TAS DE SABLE BTW

La preuve du Théorème 2.11 présentée dans le chapitre 5 comporte quelques éléments inattendus. Dans le but de montrer l'apparition exponentiellement rapide des motifs de vague, il semble naturel de considérer une forme de dynamique spatiale des points fixes de la gauche vers la droite (comme le font le système de la dynamique interne et le système moyennant). La difficulté repose sur l'harmonisation des composantes continue et discrète de cette dynamique, et l'approche présentée est délicate : après avoir établi la convergence du système moyennant vers des vecteurs constants  $(Y_n)$ , nous retrouvons la valeur de la pente  $(b_n)$  sans certitude, mais avons tout de même suffisamment d'information pour conclure. Cette indécision est probablement liée à la présence du symbole 0 : notre preuve de la convergence du système moyennant donne un ordre de grandeur qui ne permet en principe pas de déduire la position exacte du 0, donc notre déduction de la forme du point fixe semble nécessairement imprécise. Comprendre plus en détail ces considérations verbeuses pourrait peut-être permettre d'utiliser cette méthode pour étudier d'autres systèmes non-linéaires.

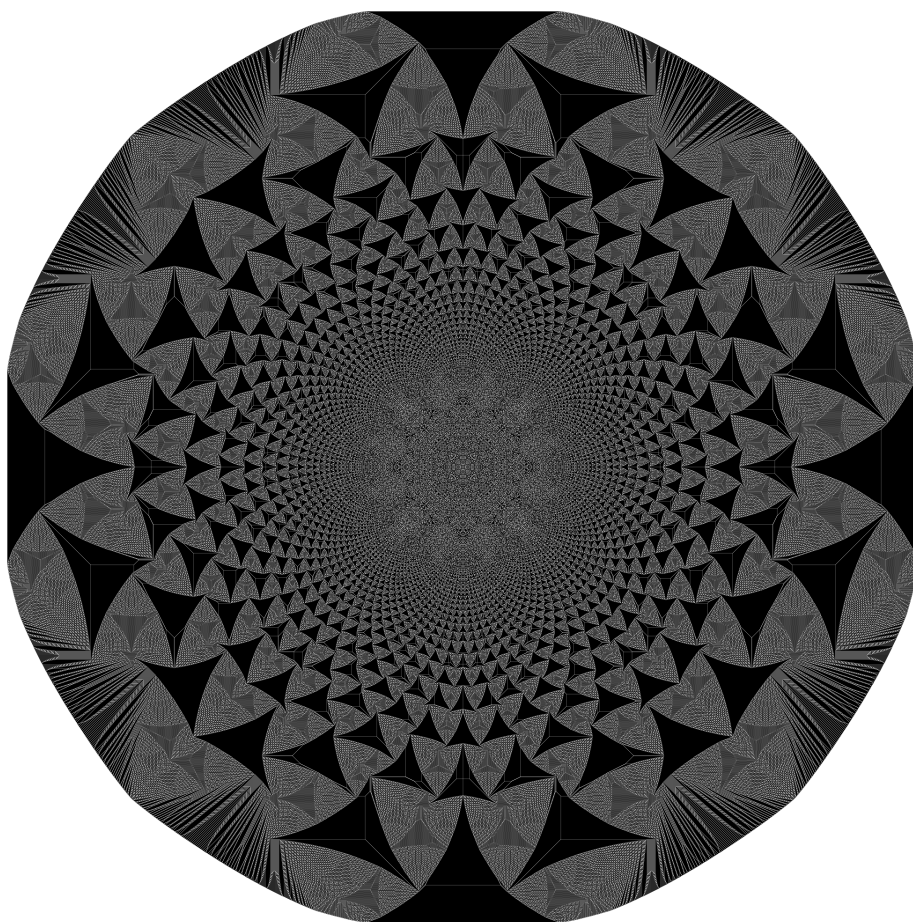


FIGURE 6.1 – Configuration stable obtenue par l'ajout de  $4.10^6$  grains au centre d'une grille infinie, selon le modèle de tas de sable BTW. Le code couleur va de **0-blanc** à **3-noir**.

Figure disponible et empruntée sur la page personnelle de David PERKINSON  
<http://people.reed.edu/~davidp/sand/gallery/>

Sans aller trop loin, regardons la figure 6.1 du modèle de tas de sable BTW. L'émergence des structures régulières sur l'extérieur, à partir d'un centre à l'allure désordonnée, semble partager un certain nombre de caractéristiques avec les points fixes du modèle KSPM, bien qu'ici les régularités semblent plus difficiles à décrire.

## 6.5 PARADOXE SORITE

Terminons par une application du Théorème 2.11 au fameux *paradoxe sorite*, vraisemblablement formulé pour la première fois par EUBULIDE DE MILET aux cours du IV<sup>e</sup> siècle av. J.-C. [LG65]. Cette réflexion



ne s'applique formellement qu'à la distinction entre *tas* et *non-tas* dans le modèle de pile de sable Kadanoff unidimensionnel, pour lequel nous pouvons proposer une solution par la formulation d'une limite précise et naturelle ; nous la présentons toutefois sous une forme plus distrayante en remplaçant *grain* par *centime* et *tas* par *riche*.

Une personne qui ne possède pas ou très peu d'argent est appelée *pauvre*. Une personne *pauvre* qui reçoit 1 *centime* reste *pauvre*. Néanmoins, si le gain de 1 *centime* est répété un très grand nombre de fois, alors la personne devient *riche*. La question est alors : quand exactement la personne devient-elle *riche* ? Une réponse pourrait être que la *richesse* apparaît lorsque l'argent commence à faire des vagues...



---

## TABLE DES FIGURES

1.1	BTW. Configuration critique typique . . . . .	11
1.2	ASM. Élement identité du modèle de tas de sable BTW pour une grille de taille 200 par 200 . . . . .	18
1.3	ASM. Élement identité du modèle de tas de sable BTW pour une grille de taille 400 par 400 . . . . .	19
1.4	ASM. Région touchée par l'ajout de 1000, 40 000, et 150 000 grains au centre d'une grille infinie sur fond de hauteur 2 . . . . .	20
1.5	SPM. Règle d'itération verticale . . . . .	26
1.6	SPM. Le treillis $SPM(8)$ . . . . .	27
1.7	SPM. Point fixe pour $N = 25$ grains . . . . .	29
1.8	IPM. Règle d'itération horizontale . . . . .	29
1.9	SSPM. Règles d'itération . . . . .	32
1.10	CFG ASM KBTW BTW SPM KSPM . . . . .	37
2.1	KSPM. Règle d'itération . . . . .	42
2.2	KSPM. Exemple de suite d'itérations pour $p = 2$ et $N = 24$ . . . . .	42
2.3	KSPM. Le treillis $KSPM(2, 24)$ . . . . .	49
2.4	KSPM. Trois représentations d'une configuration : $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en hauteurs, $(b_i)$ en pentes, et $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en actions . . . . .	50
2.5	KSPM. Illustration de la <i>complexité</i> de la dynamique . . . . .	52
2.6	KSPM. Configurations initiales représentée sous forme de Chip Firing Games, pour $p = 1, 2, 3$ . . . . .	53
2.7	KSPM. Application de la règle d'itération vue comme un Chip Firing Game . . . . .	54
2.8	KSPM. Encadrement de la taille du support d'un point fixe $\pi(N)$ , en $\Theta(\sqrt{N})$ . . . . .	56
2.9	KSPM. $\pi(2000)$ pour $p = 1, 2, 3, 4$ . . . . .	59
2.10	KSPM. Taille relative de la séquence de vagues sur les points fixes . . . . .	61
2.11	KSPM. Vague . . . . .	62

2.12	KSPM. Illustration du Théorème 2.11 . . . . .	62
3.1	KSPM. Procédure inductive pour calculer les points fixes . . .	67
3.2	KSPM. Récursivité des treillis . . . . .	68
3.3	KSPM. Avalanche . . . . .	70
3.4	KSPM. Pics, cols, trainée . . . . .	73
3.5	KSPM. Illustration du Théorème 3.6. . . . .	75
3.6	KSPM. Colonne de plénitude globale $\mathcal{L}(2, N)$ . . . . .	79
3.7	KSPM. Invariabilité des points fixes . . . . .	81
3.8	KSPM. Colonne de plénitude globale $\mathcal{L}(3, N)$ . . . . .	85
4.1	KSPM. Traces et transducteur . . . . .	89
4.2	KSPM. Itérations du transducteur . . . . .	90
4.3	KSPM. Définition de la trace . . . . .	94
4.4	KSPM. Exemple de transition du transducteur . . . . .	97
4.5	KSPM. Transducteur pour $p = 2$ . . . . .	102
4.6	KSPM. Bilan de l'étude de la plénitude des avalanches et des traces . . . . .	109
5.1	KSPM. Système dynamique moyennant . . . . .	113
5.2	KSPM. Emergence de motifs de vague faibles . . . . .	128
5.3	KSPM. Représentations de $\pi(2000)$ pour $p = 4$ . . . . .	132
6.1	BTW. Configuration stable obtenue par l'ajout de $4.10^6$ grains au centre d'une grille infinie . . . . .	138

---

## INDEX I – NOTATIONS

* de Kleene, 60	$h$ , 43
$\rightarrow$ , 45	$I_i$ , 92
$\xrightarrow{*}$ , 45	$KSPM(p, N)$ , 48
$\xrightarrow{i}$ , 44	$\mathcal{L}'(p, k)$ , 78
$\vdash$ , 127	$\mathcal{L}(p, N)$ , 78
$0^\omega$ , 48	$m_n, \bar{m}_n, \underline{m}_n$ , 121
$\emptyset$ , 115	$N$ , 48
$\downarrow^0$ , 66	$p$ , 42
$\alpha(i, k)$ , 93	$\widehat{q}$ , 72
$\mu^k$ , 91	$R(x)$ , 116
$\Phi(p, N)$ , 91	$s^k$ , 69
$\phi$ , 116	$\mathcal{S}$ (transduction), 92
$\pi(N)$ , 48	$\mathcal{T}$ (transduction), 93
$a$ , 48	$t$ , 115
$b$ , 44	$t$ , 100
$b_{\llbracket n; \infty \rrbracket}$ , 45	$t_{21}$ , 102
	$\mathfrak{T}$ , 100
	$X_n$ , 115
	$Y_n$ , 118



---

## INDEX II – TERMES

- accessible, 45
- action, 48
- ASM, 12
- atteignable, 45
- auto-organisation critique, 8–9
- avalanche, 69
  
- BSPM, 33
- BTW, 9
  
- CFG, 34
- col, 71
- colonne, 42, 43
- configuration, 44
- convergence, 46
  
- dynamique interne, 115
  
- ébouler, 42
- élément identité, 16
- étape, 42
- états critiques, 15
- extrême gauche, 69
  
- falaise, 28
  
- hauteur, 43
  
- i-redondance, 95
- i-similarité, 93
- indice, 42
- instable, 45
  
- intervalle, 92
  - état d'un intervalle, 92
- IPM, 28
- itération, 42
  
- KBTW, 40
- KSPM, 41
  
- LCFG, 50
- longues avalanches, 91
  
- mot basique, 102
- mot d'entrée, 102
  
- penne, 44
- pic, 71
- plénitude, 78
  - colonne de plénitude
    - globale, 78
- plateau, 28, 53
- point fixe, 45
- problème de l'avalanche, 57
- propriété du diamant, 30, 45
- PSPM, 31
- PSSPM, 33
  
- règle d'itération, 44
  
- séquentiel, 44
- SPM, 26
- SSPM, 32
- stable, 45

stratégie, 68  
successeur, 45  
support, 55  
système moyennant, 118  
terminus, 73  
tirer, 42, 43  
tomber, 42  
trace, 95  
trainée, 72

transducteur, 100  
    état récurrent, 102  
    état transient, 102  
transition, 42  
treillis, 51  
trou, 78  
type, 93  
  
vague, 60



---

## BIBLIOGRAPHIE

- [ALS+89] R. ANDERSON, L. LOVÁSZ, P. SHOR, J. SPENCER, É. TARDOS et S. WINOGRAD. Disks, balls, and walls : analysis of a combinatorial game. *American Mathematical Monthly*, 96(6) :481–493, 1989.
- [BC94] P. BAK et M. CREUTZ. Fractals and self-organized criticality. *Fractals in science* :26–47, 1994. Armin BUNDE et Shlomo Havlin EDS., éditeurs.
- [BG92] J. BITAR et E. GOLES. Parallel chip firing games on graphs. *Theor. Comput. Sci.*, 92(2) :291–300, 1992.
- [Big99] N. L. BIGGS. Chip-firing and the critical group of a graph. English. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 9 :25–45, 1, 1999. ISSN : 0925-9899.
- [BL92] A. BJÖRNER et L. LOVÁSZ. Chip-firing games on directed graphs. English. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 1 :305–328, 4, 1992. ISSN : 0925-9899.
- [BLS91] A. BJÖRNER, L. LOVÁSZ et P. W. SHOR. Chip-firing games on graphs. *Eur. J. Comb.*, 12(4) :283–291, 1991. ISSN : 0195-6698.
- [BN98] F. BAADER et T. NIPKOW. *Term rewriting and all that*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1998. ISBN : 0-521-45520-0.
- [BR02] Y. Le BORGNE et D. ROSSIN. On the identity of the sandpile group. *Discrete Mathematics*, 256(3) :775–790, 2002. LaCIM 2000 Conference on Combinatorics, Computer Science and Applications.
- [Bra12] D. BRAHA. Global civil unrest : contagion, self-organization, and prediction. *PLoS ONE*, 7(10) : e48596, 2012.
- [Bry73] T. BRYLAWSKI. The lattice of integer partitions. *Discrete Mathematics*, 6(3) :201–219, 1973. ISSN : 0012-365X.

- [BT88] P. BAK et K. TANG C. WIESENFELD. Self-organized criticality. *Phys. Rev. A*, 38(1) :364–374, 1988.
- [BTW87] P. BAK, C. TANG et K. WIESENFELD. Self-organized criticality : an explanation of the  $1/f$  noise. *Phys. Rev. Lett.*, 59 :381–384, 4, 1987.
- [Cre96] M. CREUTZ. Cellular automata and self-organized criticality. In *Some New Directions in Science on Computers*, 1996.
- [Dha06] D. DHAR. Theoretical studies of self-organized criticality. *Physica A : Statistical and Theoretical Physics*, 369(1) :29–70, 2006.
- [Dha90] D. DHAR. Self-organized critical state of sandpile automaton models. *Phys. Rev. Lett.*, 64 :1613–1616, 14, 1990.
- [DL98] J. O. DURAND-LOSE. Parallel transient time of one-dimensional sand pile. *Theor. Comput. Sci.*, 205(1-2) :183–193, 1998.
- [DM03] A. DARTOIS et C. MAGNIEN. Results and conjectures on the sandpile identity on a lattice. In M. MORVAN et É. RÉMILA, éditeurs, *DMCS, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science Proceedings*, pages 89–102, 2003. DMTCS.
- [DMP+06] E. DUCHI, R. MANTACI, H. D. PHAN et D. ROSSIN. Bidimensional Sand Pile and Ice Pile Models. *Pure Mathematics and Applications, GASCom 2006.*, 2006.
- [DP02] B. A. DAVEY et H. A. PRIESTLEY. *Introduction to Lattices and Order (2. ed.)* Cambridge University Press, 2002, pages I–XII, 1–298. ISBN : 978-0-521-78451-1.
- [DR89] D. DHAR et R. RAMASWAMY. Exactly solved model of self-organized critical phenomena. *Phys. Rev. Lett.*, 63 :1659–1662, 16, 1989.
- [DSC09] D. DHAR, T. SADHU et S. CHANDRA. Pattern formation in growing sandpiles. *EPL (Europhysics Letters)*, 85(4) :48002, 2009.
- [Eneoc] G. ENESTRÖM. Härledning af en allmän formel för antalet pensionärer... *Öfv. af. Kungl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar*, 6, (Stockholm, 1893).
- [Eri91] K. ERIKSSON. No polynomial bound for the chip firing game on directed graphs. English. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 112(4) :1203–1205, 1991. ISSN : 00029939.
- [Eri93] K. ERIKSSON. Strongly Convergent Games and Coxeter Groups. Thèse de doctorat. KTH Stockholm, 1993.

- [FGM12] E. FORMENTI, E. GOLES et B. MARTIN. Computational complexity of avalanches in the kadanoff sandpile model. *Fundam. Inform.*, 115(1) :107–124, 2012.
- [FMP07] E. FORMENTI, B. MASSON et T. PISOKAS. Advances in symmetric sandpiles. *Fundam. Inform.*, 76(1-2) :91–112, 2007.
- [FPP+11] E. FORMENTI, T. Van PHAM, H. D. PHAN et T. H. TRAN. Fixed point forms of the parallel symmetric sandpile model. *CoRR*, abs/1109.0825, 2011.
- [GG06] A. GAJARDO et E. GOLES. Crossing information in two-dimensional sandpiles. *Theor. Comput. Sci.*, 369(1-3) :463–469, 2006.
- [GK91] E. GOLES et M. KIWI. One-dimensional sand piles, cellular automata and related models. In P. CORDERO et B. NACHTERGAELE, éditeurs, *Nonlinear Phenomena in Fluids, Solids and Other Complex Systems*, pages 169 –185. Elsevier, Amsterdam, 1991. ISBN : 978-0-444-88791-7.
- [GK93a] E. GOLES et M. KIWI. Games on line graphs and sand piles. *Theor. Comput. Sci.*, 115(2) :321–349, 1993. ISSN : 0304-3975.
- [GK93b] Eric GOLES et Marcosa. KIWI. Sand-pile dynamics in a one-dimensional bounded lattice. *NATO ASI Series*, 396 :211–225, 1993.
- [GLM+04] E. GOLES, M. LATAPY, C. MAGNIEN, M. MORVAN et H. D. PHAN. Sandpile models and lattices : a comprehensive survey. *Theor. Comput. Sci.*, 322(2) :383–407, 2004.
- [GM97] E. GOLES et M. MARGENSTERN. Universality of the chip-firing game. *Theor. Comput. Sci.*, 172(1-2) :121–134, 1997.
- [GMG02] A. GAJARDO, A. MOREIRA et E. GOLES. Complexity of Langton’s ant. *Discrete Applied Mathematics*, 117(1-3) :41–50, 2002.
- [GMP02a] E. GOLES, M. MORVAN et H. D. PHAN. Sandpiles and order structure of integer partitions. *Discrete Applied Mathematics*, 117(1-3) :51 –64, 2002. ISSN : 0166-218X.
- [GMP02b] E. GOLES, M. MORVAN et H. D. PHAN. The structure of a linear chip firing game and related models. *Theor. Comput. Sci.*, 270(1-2) :827–841, 2002.
- [Gol92] E. GOLES. Sand pile automata. eng. *Annales de l’institut Henri Poincaré (A) Physique théorique*, 56(1) :75–90, 1992.
- [Hal63] P. R. HALMOS. What does the spectral theorem say? *Amer. Math. Monthly*, 70 :241–247, 1963.
- [HJ90] R.A. HORN et C.R. JOHNSON. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1990. ISBN : 9780521386326.

- [HPS11] G. HANROT, X. PUJOL et D. STEHLÉ. Terminating BKZ. *IACR Cryptology ePrint Archive*, 2011 :198, 2011.
- [Jen98] H. J. JENSEN. *Self-Organized Criticality : Emergent Complex Behavior in Physical and Biological Systems*. Cambridge Lecture Notes in Physics. Cambridge University Press, 1998. ISBN : 978-0-521-48371-1.
- [Kak12] S. KAKIYA. On the limits of the roots of an algebraic equation with positive coefficients. *Tôhoku Math. J.*, 2 :140–142, 1912–13.
- [KH96] A. KATOK et B. HASSELBLATT. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. Cambridge University Press, 1996. ISBN : 978-0-521-57557-7.
- [KNW+89] L. P. KADANOFF, S. R. NAGEL, L. WU et S. ZHOU. Scaling and universality in avalanches. *Phys. Rev. A*, 39(12) :6524–6537, 1989.
- [Lago03] J.-C. LAGARIAS. The  $3x+1$  problem : An annotated bibliography (1963–1999) (sorted by author). *ArXiv Mathematics e-prints*, septembre 2003.
- [Lago06] J.-C. LAGARIAS. The  $3x+1$  Problem : An Annotated Bibliography, II (2000-2009). *ArXiv Mathematics e-prints*, août 2006.
- [Lan86] C. G. LANGTON. Studying artificial life with cellular automata. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 22(1–3) :120–149, 1986. Proceedings of the Fifth Annual International Conference.
- [Lev04] L. LEVINE. The Rotor-Router Model. *ArXiv Mathematics e-prints*, septembre 2004.
- [LG65] Diogène LAËRCE et R. GENAILLE. *Vie, doctrine et sentences des philosophes illustres*, tome 1. Garnier-Flammarion, 1965. ISBN : 9782080700568.
- [Liu06] H. LIU. Sandpile and Anti-sandpile models. Mémoire de master. Universiteit Leiden, 2006.
- [LMM+98] M. LATAPY, R. MANTACI, M. MORVAN et H. D. PHAN. Structure of some sand piles model. *Theoretical Computer Science*, 262, 1998.
- [LP00] M. LATAPY et H. D. PHAN. The lattice structure of chip firing games. *Physica D*, 115, 2000.
- [LP08] L. LEVINE et Y. PERES. Spherical asymptotics for the rotor-router model in  $z$  d. *Indiana Univ. Math. J* :431–450, 2008.

- [LP09] M. LATAPY et H. D. PHAN. The lattice of integer partitions and its infinite extension. *Discrete Mathematics*, 309(6) :1357–1367, 2009. ISSN : 0012-365X.
- [LP10] L. LEVINE et J. PROPP. What is a sandpile ? 2010.
- [LS96] M. LEVY et S. SOLOMON. Dynamical explanation for the emergence of power law in a stock market model. *International Journal of Modern Physics C*, 7 :65–72, 1996.
- [Lóp97] M. LÓPEZ. Chip firing and the tutte polynomial. English. *Annals of Combinatorics*, 1 :253–259, 1, 1997. ISSN : 0218-0006.
- [MN99] C. MOORE et M. NILSSON. The computational complexity of sandpiles. *Journal of Statistical Physics*, 96 :205–224, 1, 1999. 10.1023/A :1004524500416. ISSN : 0022-4715.
- [MV10] M. G. MADRITSCH et B. VALLÉE. Modelling the Ill algorithm by sandpiles. In A. LÓPEZ-ORTIZ, éditeur, *LATIN*, tome 6034 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 267–281, 2010. Springer. ISBN : 978-3-642-12199-9.
- [Nou12] M. NOUAL. Mises à jour de réseaux d’automates. Thèse de doctorat. Ecole normale supérieure de lyon, Laboratoire de l’Informatique du Parallélisme, 2012.
- [NRS12] M. NOUAL, D. REGNAULT et S. SENÉ. Boolean networks synchronism sensitivity and XOR circulant networks convergence time. In *Full Papers AUTOMATA & JAC 2012*, tome 90 de *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, pages 37–52, 2012. Open Publishing Association.
- [Osto3] S. OSTOJIC. Patterns formed by addition of grains to only one site of an abelian sandpile. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 318(1–2) :187–199, 2003. ISSN : 0378-4371.
- [Pha08] H. D. PHAN. Two sided sand piles model and unimodal sequences. *ITA*, 42(3) :631–646, 2008.
- [Pha99] H. D. PHAN. Structures ordonnées et dynamiques de piles de sable. Thèse de doctorat. Paris 7, 1999.
- [Pra04] V. V. PRASOLOV. *Polynomials*, numéro 13 in *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer, 2004. ISBN : 978-3-540-40714-0.
- [SBF+95] K. SNEPPEN, P. BAK, H. FLYVBJERG et M. H. JENSEN. Evolution as a self-organized critical phenomenon. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 92(11) :5209–5213, 1995.

- [Sip97] M. SIPSER. *Introduction to the theory of computation*. PWS Publishing Company, 1997, pages I–XV, 1–396. ISBN : 978-0-534-94728-6.
- [Spe86] J. SPENCER. Balancing vectors in the max norm. English. *Combinatorica*, 6 :55–65, 1, 1986. ISSN : 0209-9683.
- [Tar88] G. TARDOS. Polynomial bound for a chip firing game on graphs. *SIAM J. Discret. Math.*, 1(3) :397–398, 1988. ISSN : 0895-4801.
- [VPP13] T. VAN PHAM et H. D. PHAN. Lattices generated by chip firing game models : criteria and recognition algorithms. *Eur. J. Comb.*, 34(5) :812–832, 2013. ISSN : 0195-6698.
- [Wea48] W. WEAVER. Science and Complexity. *American Scientist*, 36 (536), 1948.

---

## BIBLIOGRAPHIE PERSONNELLE

- [PPP11] K. PERROT, H. D. PHAN et T. Van PHAM. On the set of Fixed Points of the Parallel Symmetric Sand Pile Model. *Full Papers AUTOMATA 2011*. DMTCS proceedings :17–28, 2011.
- [PR11a] K. PERROT et É. RÉMILA. Avalanche Structure in the Kadanoff Sand Pile Model. *LATA 2011, LNCS 6638 proceedings* :427–439, 2011.
- [PR11b] K. PERROT et É. RÉMILA. Transduction on Kadanoff Sand Pile Model Avalanches, Application to Wave Pattern Emergence. *MFCS 2011, LNCS 6907 proceedings* :508–519, 2011.
- [PR12] K. PERROT et É. RÉMILA. Kadanoff sand piles, following the snowball. *Rapport de recherches, disponible sur arXiv (abs :1201.0997)*, 2012.
- [PR13] K. PERROT et É. RÉMILA. Kadanoff sand pile model. Avalanche structure and wave shape. *Theoretical Computer Science*, 2013. ISSN : 0304-3975.





---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Généalogie</b>	<b>7</b>
1.1 Modèle de tas de sable Bak-Tang-Wiesenfeld BTW . . . . .	8
1.1.1 Nature et auto-organisation critique . . . . .	8
1.1.2 Définition . . . . .	9
1.1.3 BTW et criticalité . . . . .	11
1.1.4 BTW et auto-organisation . . . . .	12
1.2 Modèle de tas de sable abélien ASM . . . . .	12
1.2.1 Définition . . . . .	12
1.2.2 Groupe abélien . . . . .	15
1.3 Modèle de pile de sable SPM . . . . .	23
1.3.1 BTW unidimensionnel . . . . .	23
1.3.2 Définition . . . . .	26
1.3.3 Résultats . . . . .	28
1.3.4 Progéniture . . . . .	31
1.4 Chip Firing Game CFG . . . . .	34
<b>2 Introduction aux piles de sable Kadanoff</b>	<b>39</b>
2.1 Définition originale . . . . .	40
2.2 Définition et état de l'art . . . . .	41
2.2.1 Configurations et règle d'itération . . . . .	42
2.2.2 Notations . . . . .	44
2.2.3 Structure de treillis . . . . .	45
2.2.4 Aperçu . . . . .	51
2.2.5 $KSPM(p)$ et Chip Firing Game . . . . .	51
2.2.6 Plateau et Support . . . . .	53
2.2.7 Problème de l'avalanche . . . . .	57
2.3 Problématique . . . . .	58

<b>3</b>	<b>Plénitude des avalanches</b>	<b>65</b>
3.1	Construction inductive des points fixes . . . . .	66
3.1.1	Relation de récurrence . . . . .	66
3.1.2	Stratégies et avalanches . . . . .	68
3.2	Quasi-linearité des avalanches . . . . .	71
3.2.1	Pics et cols . . . . .	71
3.2.2	Localité des avalanches . . . . .	73
3.2.3	Description <i>à priori</i> des avalanches . . . . .	74
3.3	Plénitude des avalanches et invariabilité des points fixes .	77
3.3.1	Plénitude des avalanches . . . . .	78
3.3.2	Invariabilité des points fixes . . . . .	80
3.3.3	Colonne de plénitude globale pour KSPM(2) . . . .	81
<b>4</b>	<b>Trace des avalanches</b>	<b>87</b>
4.1	Construction des traces . . . . .	88
4.1.1	Invariabilité des avalanches . . . . .	88
4.1.2	Définition . . . . .	92
4.2	Transduction des traces . . . . .	96
4.2.1	Calcul . . . . .	96
4.2.2	Algorithme . . . . .	99
4.2.3	Définition . . . . .	100
4.2.4	Analyse du transducteur pour KSPM(2) . . . . .	101
4.3	Des traces aux vagues . . . . .	106
4.4	Conclusion pour KSPM(2) . . . . .	108
<b>5</b>	<b>Dynamique interne des points fixes</b>	<b>111</b>
5.1	Construction de la dynamique interne des points fixes . .	114
5.1.1	Pentes et actions . . . . .	114
5.1.2	Dynamique interne des points fixes . . . . .	115
5.2	Harmonisation des termes continu et discret . . . . .	117
5.2.1	Changement de base et projection . . . . .	117
5.2.2	Intuition . . . . .	119
5.3	Convergence du système moyennant . . . . .	120
5.3.1	Convergence linéaire . . . . .	121
5.3.2	Convergence exponentielle faible . . . . .	122
5.3.3	Convergence exponentielle forte . . . . .	125
5.4	Emergence des vagues . . . . .	126
5.4.1	Emergence faible . . . . .	126
5.4.2	Raffinement . . . . .	128
<b>6</b>	<b>Discussion</b>	<b>133</b>
6.1	Description asymptotique . . . . .	133
6.2	Précision du résultat . . . . .	134
6.2.1	Borne inférieure . . . . .	134

<i>Table des matières</i>	157
6.2.2 Formule close . . . . .	134
6.2.3 Configurations atteignables . . . . .	135
6.3 Emergence, discrétude et continuité . . . . .	136
6.4 Vers le modèle de tas de sable BTW . . . . .	137
6.5 Paradoxe sorite . . . . .	138
<b>Table des figures</b>	<b>141</b>
<b>Index I - II</b>	<b>143</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>147</b>
<b>Bibliographie personnelle</b>	<b>153</b>
<b>Table des matières</b>	<b>155</b>
<b>Le Domosogène</b>	<b>159</b>



---

# LE DOMOSOGÈNE

Platon, *Le Domosogène*

Imaginé par Oscar GNOUROS, 2008

SOCRATE – Dis-moi, Ô Etranger, ton talent est-il à la hauteur de ta réputation, et de ton nom même ?

DOMOSOGÈNE – Socrate, j'ose le dire. Domosogène, « le constructeur de maison », est le plus grand maçon de tous les Grecs. Oui Socrate, j'ose le dire. Phidias lui-même n'égale pas mon talent. Le Parthénon que tu vois n'aurait pas été construit sans les conseils avisés que je donnais à lui, à Callicratès et à Ictinos. C'est moi qui conseillais Périclès pour l'approvisionnement du ciment.

SOCRATE – C'est vrai que moi-même j'ai pu voir de mes yeux ton grand talent lorsque nous deux nous sculptions peu avant la bataille de ... [le manuscrit est ici illisible]. Toi tu étais venu vendre ta science en notre école et je me souviens que tu étais arrivé dans notre Cité en même temps que Protagoras, qui est ce maître pour les choses de l'esprit.

DOMOSOGÈNE – Tu dis bien, Socrate. Sauf que je suis bien supérieur à tous ces sophistes. Hippias lui-même n'a jamais construit de maison et n'en est resté qu'à des vêtements !

SOCRATE – C'est vrai. Je doute même que Hippias n'en soit jamais resté qu'à de belles marmites [allusion au dialogue Hippias majeur]. Mais dis-moi, Ô Domosogène, le plus grand maçon de tous les Grecs, pour construire une maison, il faut des matériaux ?

DOMOSOGÈNE – Oui, Socrate. Toutes sortes de matériaux. Et pour construire une belle maison, il faut de beaux matériaux.

SOCRATE – Donc, un bon maçon sera celui qui construira une bonne maison, et qui choisira les bons matériaux.

DOMOSOGÈNE – C'est cela même. Et je me vente d'être le meilleur maçon de tous les

Grecs, c'est-à-dire celui capable de construire les meilleures maisons en choisissant les meilleurs matériaux.

SOCRATE – Ce n'est pas une tâche facile que de choisir ces matériaux. Car ces matériaux, certains sont simples, et d'autres sont complexes, n'est-ce pas ?

DOMOSOGÈNE – Complexes, tu veux dire composés ?

SOCRATE – Absolument. Tes maisons, tu les construis avec des éléments simples, comme cette poutre que je vois là, mais aussi avec des éléments complexes – ou composés si tu préfères – comme ce sable qui est ici.

DOMOSOGÈNE – Précisément, Socrate. Et tu n'imagines pas combien cette tâche est difficile. Certains maçons ne parviennent jamais à sélectionner les meilleurs éléments et construisent des maisons qui n'ont pas besoin de Poséidon pour branler. Pour ma part, je ne connais pas ce malheur. Je suis toujours parvenu à trouver les meilleures pièces et l'ébranleur des terres est bien en peine d'en venir à bout !

SOCRATE – Par Zeus, méfie-toi de ne pas t'attirer ses foudres à parler de son frère ainsi ! Mais de grâce, Domosogène, réponds-moi. De ces deux types de matériaux, les simples et les composés, quels sont les plus difficiles à se procurer ?

DOMOSOGÈNE – Ils sont tous deux difficiles. Trouver un bon élément simple, une bonne poutre, c'est comme trouver le meilleur nom pour Zeus. La tâche, tu t'en doutes, n'est pas facile.

SOCRATE – Mais les éléments composés ne sont-ils pas encore plus difficiles à trouver ? Ce sable, par exemple.

DOMOSOGÈNE – Tu dis bien, Socrate. Ces

éléments composés sont constitués d'éléments simples. Trouver un bon élément simple n'est pas simple, trouver plusieurs bons éléments simples est encore moins simple. Et quand bien même, Socrate, tu aurais trouvé tous ces bons éléments simples, encore te faudrait-il parvenir à réussir un bon mélange de ceux-là.

SOCRATE – Si trouver le meilleur élément simple est trouver le meilleur nom pour un Dieu, si trouver les meilleurs éléments simples est trouver les meilleurs noms pour les Dieux, alors il faut être Homère pour accomplir la tâche qui est de tous les rassembler au mieux. Finalement, DOMOSOGÈNE, tu es un poète, un poète du tas de sable !

DOMOSOGÈNE – Parfaitement.

SOCRATE – Mais dis-moi, Domosogène, qu'est-ce qu'un tas de sable ?

DOMOSOGÈNE – Je te l'ai dit, Socrate. Un rassemblement de grains de sable.

SOCRATE – Un grain de sable suffit-il à lui seul à constituer un tas de sable ?

DOMOSOGÈNE – Certes non, Socrate. Il en faut plusieurs.

SOCRATE – Il en faut plusieurs, donc. Peut-être deux ?

DOMOSOGÈNE – Je ne pense pas. Il en faut beaucoup d'autres.

SOCRATE – Alors combien ? Trois grains de sable ?

DOMOSOGÈNE – Trois sûrement pas.

SOCRATE – Il est vrai. Trois n'est pas assez. Peut-être quatre ? Combien te faut-il de grains de sable pour constituer ton tas ?

DOMOSOGÈNE – À vrai dire, Socrate, tu poses là une question embarrassante. Je suis bien en peine de te dire à partir de combien de grains de sable un tas peut se constituer.

SOCRATE – Pourtant, il existe bien des tas de sable ?

DOMOSOGÈNE – Sans contredit. En voilà un derrière nous.

SOCRATE – Voici ce que je te propose. Si nous ne pouvons pas déterminer combien de grains de sable il nous faut pour constituer un tas, prenons ce tas de sable, comptons ses grains, et nous saurons que lorsque nous avons tant de grains, nous avons un tas.

DOMOSOGÈNE – Ce tas de sable est constitué de 12 960 000 grains de sable [ce qui correspond au nombre nuptial évoqué dans la République et calculé par Diels, ce que ni ce dernier, ni Mattéi n'ont jamais pris la peine de souligner].

SOCRATE – Mais que se passe-t-il, Ô sage Domosogène, si nous décidons d'enlever un grain de sable de ce tas ? Aurions-nous toujours un tas ?

DOMOSOGÈNE – Sans aucun doute.

SOCRATE – Et si nous en enlevions un autre ? Et encore un autre ?

DOMOSOGÈNE – Ce serait encore un tas.

SOCRATE – Pourtant, si l'on suit ton raisonnement, cela signifierait que même si notre tas n'est plus constitué que d'un seul grain de sable, il est toujours un tas. Ou même : que s'il n'y a plus de tas, nous avons un tas.

DOMOSOGÈNE – C'est vrai, Socrate. Voilà qui ajoute à mon embarras précédent.

SOCRATE – Et au mien également. Avant nous ne savions pas comment constituer un tas de sable. Maintenant, nous ne savons pas comment le défaire. En effet, Domosogène, c'est un dur métier que celui de maçon. Il lui faut constituer et défaire des tas, mais cela est d'une difficulté qui semble ici nous dépasser.

DOMOSOGÈNE – À vrai dire Socrate, tu m'as démontré que j'étais bien incapable de faire ou de défaire des tas. Je pensais être un grand maçon, je n'en suis plus sûr désormais.

SOCRATE – Pourtant, Domosogène, je suis pour ma part convaincu que tu es un grand maçon. Même, on voit tous les jours de grandes et belles maisons, et celles-ci ont nécessairement été construites par de grands maçons. C'est donc qu'il y a des maçons, et qu'il doit par conséquent leur être possible de constituer des tas.

DOMOSOGÈNE – Pour moi, Socrate, je ne suis plus sûr d'être maçon. Je ne peux t'enseigner l'art de faire ces tas. C'est à d'autres qu'il faut demander.

SOCRATE – Courage, Domosogène ! Je suis certain que la solution se trouve sous nos yeux, comme l'est de ce côté ce tas de sable, et de l'autre côté ce grain de sable. Voici ce que je te propose. Prenons un grain de ce tas et ajoutons-le à ce grain qui pour l'instant est solitaire. Arrivera un moment où nous aurons le même nombre de grains aussi bien d'un côté que de l'autre.

DOMOSOGÈNE – Voilà qui est fait, Socrate. À gauche et à droite se trouvent le même nombre de grains de sable. Pourtant, à gauche, j'ai le sentiment qu'il s'agit toujours d'un tas de sable, et qu'à droite, ce n'en est toujours pas un.

SOCRATE – C'est vrai. Voici mon hypothèse. Peut-être que nous nous trompons depuis le début. Nous avons voulu faire du tas quelque chose qui dépendait du nombre de ses éléments. Mais peut-être est-ce là une idée erronée. Peut-être un tas existe-t-il indépendamment du nombre des éléments qui le constituent. Nous en avons la preuve sous les yeux puisqu'un même nombre d'éléments nous donne à la fois un tas et un non-tas.

DOMOSOGÈNE – Voilà une hypothèse que je juge fort plausible et qui me réjouirait si je n'étais pas à ce point meurtri d'avoir perdu aujourd'hui ma condition de maçon que j'estimais tant.

SOCRATE – Quelle énigme ! D'une part compter les grains de sable ne nous est d'aucun recours pour déterminer si un tas en est un ou non. D'autre part, nous savons fort bien distin-

guer ce qu'est un tas de ce qui ne l'est pas. Mais dis-moi, Domosogène, c'est donc que lorsque l'on compte, on peut se tromper ?

DOMOSOGÈNE – Il semblerait.

SOCRATE – Mais que lorsque l'on ne se trompe pas, lorsque l'on connaît avec certitude qu'un tas en est un ou pas, on ne compte pas ?

DOMOSOGÈNE – C'est ce qu'il se passe, en effet.

SOCRATE – Ainsi l'erreur se trouve-t-elle dans le [dé]nombrement. Mais dis-moi encore, DOMOSOGÈNE, comment comptes-tu ?

DOMOSOGÈNE – Comment je compte ? Mais par Zeus ! Je compte avec mes doigts. Je ferme mon poignet, puis à chaque grain, je déplie un doigt et je dis fort, 1, 2, 3, 4, 5. Puis je referme la main et ainsi de suite.

SOCRATE – Se pourrait-il qu'il te manque un doigt ?

DOMOSOGÈNE – Comment donc, Socrate ? Te jouerais-tu de moi ? Par Zeus ! Je connais combien j'ai de doigts, je sais que j'ai le nombre.

SOCRATE – Mais comment le saurais-tu ? Tu viens d'avouer que tu usais tes doigts pour compter. C'est donc que pour compter tes doigts, tu uses de tes doigts. S'il t'en manque un, ou si tu en as en plus, tu serais bien en peine de t'en apercevoir.

DOMOSOGÈNE – Je conviens qu'il y ait là une difficulté. Mais je me sais posséder tous les doigts nécessaires.

SOCRATE – Cela ne peut alors que signifier que tu comptes tes doigts avec autre chose que tes doigts.

DOMOSOGÈNE – C'est exactement cela, Socrate. Lorsque je compte mes doigts, j'ai dans ma tête une main que j'imagine et que j'utilise en lieu et place de ma main réelle.

SOCRATE – Mais se pourrait-il que cette main que tu as dans l'idée ne soit pas complète ? Se pourrait-il qu'elle t'induisse en erreur ?

DOMOSOGÈNE – Je ne pense pas. Je défie quiconque de compter mes doigts avec sa main imaginaire et de trouver un autre nombre que moi.

SOCRATE – Sans aucun doute, chacun trouvera le même nombre. Vois-tu ce que cela signifie ?

DOMOSOGÈNE – Par Zeus, Socrate ! Mais que j'ai 5 doigts !

SOCRATE – Ça signifie surtout que chacun possède en son esprit la même main imaginaire pour compter.

DOMOSOGÈNE – Tu dis vrai.

SOCRATE – Et c'est de cette main, sans doute un héritage d'Héphaïstos, que chacun se sert pour compter les grains de sable.

DOMOSOGÈNE – Sans doute, oui.

SOCRATE – Voilà qui est plus clair. Lorsque nous nous trompons sur la nature du tas après en avoir compté les grains, c'est sans doute que nous les avons comptés avec notre main usuelle. Mais lorsque nous sommes assurés qu'ici se trouve un tas, c'est cette main que nous avons dans l'idée et qui est commune à tous qui nous le fait saisir.

DOMOSOGÈNE – Socrate, c'est pour ces remarques que je suis heureux de t'avoir pour ami. Ton esprit voit tellement plus clair que celui des autres.

SOCRATE – Pourtant, cette vérité, c'est toi et non moi qui la détenait. Je n'ai qu'aidé à la faire sortir. Je suis comme la rhubarbe dont mon père se servait pour produire les laxatifs qui firent sa renommée de médecin [on sait que la mère de Socrate était sage-femme]. Mais pour en revenir à notre problème, il nous reste encore à déterminer où se trouve cette main.

DOMOSOGÈNE – Que veux-tu dire ?

SOCRATE – Cette main existe-t-elle comme celles qui prolongent tes bras ?

DOMOSOGÈNE – Certes non. Ces deux là sont bien réelles. Alors que la main dont tu parles n'existe pour ainsi dire pas et n'est visible que par l'esprit.

SOCRATE – En effet, cette main est invisible dans ce monde là. Serait-ce que cette main existe dans un autre monde qui ne soit accessible qu'à l'âme ?

DOMOSOGÈNE – Je ne vois pas d'autre issue. Cette main doit exister dans un autre monde.

SOCRATE – Par conséquent, le tas réel, celui que nous discernons à chaque fois sans peine doit aussi exister dans cet autre monde.

DOMOSOGÈNE – Sans doute.

SOCRATE – Et donc, le vrai maçon, qui est celui qui reconnaît les vrais tas, est celui qui a accès à ce monde ?

DOMOSOGÈNE – Très certainement. Voilà pourquoi j'étais désemparé tout à l'heure. Compter les grains de sable, c'est ce que font les mauvais maçons, et tu m'as entraîné dans ce piège, moi qui suis un vrai maçon.

SOCRATE – Peut-être, mais tu t'es très bien sorti de ce piège. Tu étais le plus grand maçon des Grecs. Voilà que tu es en plus poète et philosophe.

DOMOSOGÈNE – Philosophe ?

SOCRATE – Car le philosophe est celui qui s'occupe des choses de l'autre monde.

DOMOSOGÈNE – Dans ce cas j'en conviens. Je suis le plus grand maçon de tous les Grecs, et certainement le plus grand philosophe aussi.

(Reproduit avec l'accord de l'auteur)

<http://www.morbleu.com/platon-le-domosogene/>







## Les piles de sable Kadanoff

Les modèles de pile de sable sont une sous-classe d'automates cellulaires. BAK *et al.* les ont introduit en 1987 comme une illustration de la notion intuitive d'*auto-organisation critique*.

Le modèle de pile de sable Kadanoff est un système dynamique discret non-linéaire imagé par des grains cubiques se déplaçant de colonne parfaitement empilée en colonne parfaitement empilée. Pour un paramètre  $p$  fixé, la règle ci-contre est appliquée jusqu'à atteindre une configuration stable, appelée *point fixe*.

À partir d'une règle locale simple, décrire et comprendre le comportement macroscopique des piles de sable s'avère très rapidement compliqué. La difficulté consiste en la prise en compte simultanée des modalités discrète et continue du système : vue de loin, une pile de sable s'écoule comme un liquide ; mais de près, lorsque l'on s'attache à décrire exactement une configuration, les effets de la dynamique discrète doivent être pris en compte. Si par exemple nous ajoutons un unique grain à une configuration stable, celui-ci déclenche une avalanche qui ne modifie que la couche supérieure de la pile, mais dont la taille est très difficile à prédire car sensible au moindre changement sur la configuration.

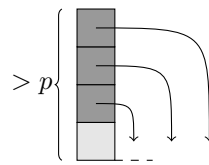
En analogie avec un sablier, nous nous intéressons en particulier à la séquence des points fixes atteints par l'ajout répété d'un nombre fini de grains à une même position, et à l'émergence de structures étonnamment régulières.

**Mots clés :** système dynamique discret, pile de sable, point fixe, structure émergente.

## Kadanoff sandpiles

Sandpile models are a subclass of Cellular Automata. BAK *et al.* introduced them in 1987 for they exemplify the intuitive notion of *Self-Organized Criticality*.

The Kadanoff sandpile model is a non-linear discrete dynamical system illustrating the evolution of cubic sand grains from nicely packed columns to nicely packed columns. For a fixed parameter  $p$ , the rule depicted on the left is applied until reaching a stable configuration, called a *fixed point*.



From a simple local rule, to describe and understand the macroscopic behavior of sandpiles is very quickly challenging. The difficulty consists in the simultaneous study of continuous and discrete aspects of the system: on a large scale, a sandpile flows like a liquid; but on a small scale, when we want to describe exactly the shape of a fixed point, the effects of the discrete dynamic must be taken into account. If for example we add a single grain on a stabilized sandpile, it triggers an *avalanche* that roughly changes only the upper layer of the configuration, but which size is hard to predict because it is sensitive to the tiniest change of the configuration.

In analogy with an hourglass, we are particularly interested in the sequence of fixed points reached after adding a finite number of grains on one position, with the aim of explaining the emergence of surprisingly regular patterns.

**Keywords :** discrete dynamical system, sandpile, fixed point, emergent structure.