

DM 02 – Turing-complétude des automates cellulaires 1D

Consignes :

Travail individuel.

À rendre le jeudi 9 avril 2026.

Exercice 1.

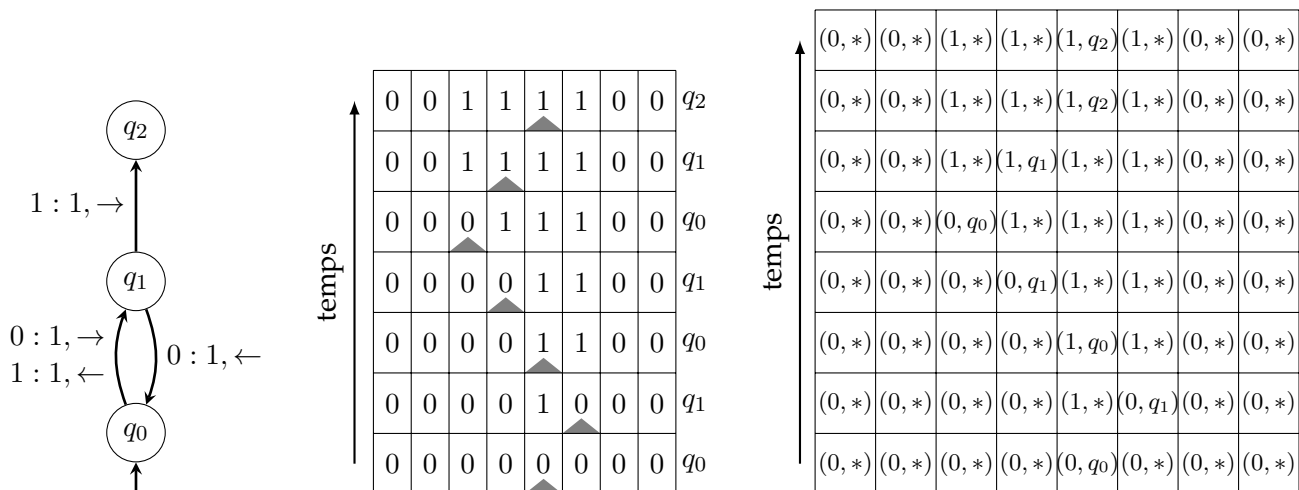
Simulation

En dimension $d = 1$, avec états Q et voisinage $N \subset \mathbb{Z}$, un automate cellulaire de règle locale $f : Q^N \rightarrow Q$ et règle globale $F : Q^{\mathbb{Z}} \rightarrow Q^{\mathbb{Z}}$ est dit *quiescent* lorsqu'il existe un état $q \in Q$ tel que $f(q, q, \dots, q) = q$. On dit alors qu'une configuration $c \in Q^{\mathbb{Z}}$ est *finie* lorsqu'elle contient un nombre fini de cellules qui ne sont pas dans l'état q . On peut ainsi avoir une description finie de c en donnant ses états sur un intervalle fini $I \subset \mathbb{Z}$, et en considérant que toutes les autres cellules sont dans l'état q .

On dit qu'un système dynamique $G : Y \rightarrow Y$ simule un système dynamique $F : X \rightarrow X$ lorsqu'il existe une transformation injective $\varphi : X \rightarrow Y$ telle que $G \circ \varphi = \varphi \circ F$ sur X .

1. En vous inspirant des deux diagrammes espace-temps ci-dessous, montrer formellement que toute machine de Turing déterministe peut être simulée par un automate cellulaire quiescent en dimension $d = 1$.

Indication : une machine de Turing déterministe M est définie par un alphabet de ruban Γ dont un symbole blanc $0 \in \Gamma$, un ensemble d'états Q dont un état initial $q_0 \in Q$, et une fonction de transition $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$. On lui associe un système dynamique $M : Q \times \Gamma^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z} \rightarrow Q \times \Gamma^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}$ sur l'espace de ses configurations. Le calcul de la machine de Turing s'arrête quand aucune transition n'est définie dans δ . Dans les systèmes dynamiques M , on considère que toute configuration d'arrêt est un point fixe.



Gauche : une machine de Turing dont les transitions sont étiquetées « symbole lu : symbole à écrire, déplacement ».

Centre : portion du diagramme espace-temps de cette machine de Turing sur l'entrée vide.

Droite : portion du diagramme espace-temps d'un automate cellulaire en dimension $d = 1$ sur les états $\Gamma \times (Q \cup \{*\})$.