# TD 01 – Machines de Turing (non-déterministes)

**Exercice 1.** *MTD*

✎ Sans utiliser un diagramme, définir une MT déterministe reconnaissant sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ tous les palindromes[1] de taille au plus 6, en au plus 7 étapes de calcul.

**Exercice 2.** *MTND*

Soient deux langages $A, B \subseteq \Sigma^*$ appartenant à la classe $\mathsf{NP}$.

**1.** Montrer que $A \cap B \in \mathsf{NP}$.

**2.** Montrer que $A \cup B \in \mathsf{NP}$.

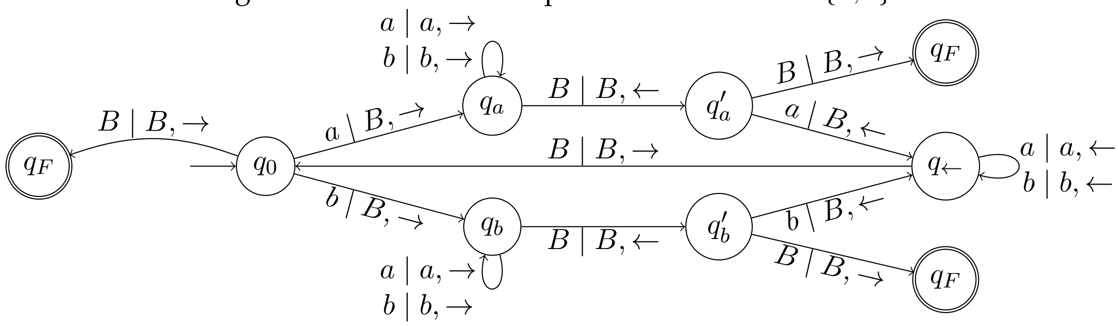
**3.** Montrer que $\mathsf{P} = \mathsf{coP}$.

**4.** Pourquoi ne peut-on pas utiliser la même idée pour montrer que $\Sigma^* \setminus A \in \mathsf{NP}$ ?

La clôture de $\mathsf{NP}$ par complémentaire est ouverte (est-ce que $\mathsf{NP} = \mathsf{coNP}$ ?).

**Exercice 3.** *Accélération*

La machine de Turing suivante reconnaît les palindromes sur $\Sigma = \{a, b\}$.




**1.** Quel est le temps de calcul exact de cette machine sur un palindrome de taille $n$ pair ?

**2.** Proposer une idée pour diviser ce temps de calcul par 2 (environ).

**3.** Proposer une idée pour diviser ce temps de calcul par 42 (environ).

1. Un *palindrome* $w_1 w_2 \ldots w_{n-1} w_n$ est un mot égal à son miroir $w_n w_{n-1} \ldots w_2 w_1$.

**Exercice 4.** *Trous*

Dans cet exercice, nous allons démontrer le « gap theorem » [Perifel 2-L] :

**Théorème.** Il existe une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f(n) \geq n$ et $\mathsf{DTIME}(f(n)) = \mathsf{DTIME}(2^{f(n)})$.

1. Pourquoi ce résultat n'est-il pas en contradiction avec le théorème de hiérarchie ?

Pour une MT $M$, on note $\Sigma_M$ son alphabet d'entrée, $\langle M \rangle$ son code, et $t_M(x)$ son temps de calcul sur l'entrée $x \in \Sigma_M^*$. Pour chaque entier $n > 0$, on divise $\mathbb{N}$ en intervalles :

$$[0, n]\ [n+1, n2^n]\ [n2^n + 1, n2^{n2^n}]\ [n2^{n2^n} + 1, n2^{n2^{n2^n}}] \ldots [m+1, n2^m] \ldots$$

2. Montrer que pour chaque entier $n > 0$, il existe un intervalle $I_n = [m+1, n2^m]$, $m \geq n$, tel que si une MT $M$ vérifie $|\langle M \rangle| \leq n$ et $|\Sigma_M| \leq n$ alors pour tout $x \in \Sigma_M^n$ on a $t_M(x) \notin I_n$.

Pour démontrer le théorème, on pose $f(0) = 0$, et pour chaque $n > 0$ on pose $f(n) = m$ avec la valeur donnée par l'intervalle $I_n$ obtenu par le raisonnement ci-dessus.

On montre maintenant que $\mathsf{DTIME}(2^{f(n)}) \subseteq \mathsf{DTIME}(f(n))$. Soit $L \in \mathsf{DTIME}(2^{f(n)})$.

3. Que nous donne la définition de $\mathsf{DTIME}$ pour $L$ ? Qu'il existe une MT $M_L$ telle que...

Soit $n_L = \max\{|\langle M_L \rangle|, |\Sigma_{M_L}|, \alpha\}$.

4. Pour tout $n \geq n_L$ et toute entrée $x \in \Sigma_{M_L}^n$ de taille $n$, que peut-on dire sur $t_{M_L}(x)$ ?
5. Conclure la démonstration du théorème.