AVEC ETIENNE MOUTOT : DES JEUX DE TUILES APÉRIODIQUES ?
L'INDÉCIDABILITÉ DU "DOMINO PROBLEM" ?
DES AC AVEC DES PROBLÈMES INDÉCIDABLES ?

ENSEMBLE : DES SYSTÈMES DYNAMIQUES FINIS.

RÉSEAUX D'AUTOMATES

MODÈLES D'ENTITÉS EN INTERACTION.

Q : COMMENT GÉNÉRALISER / ASSOUPLIR LES AC ?

- RÈGLE NON-HOMOGÈNE SPATIALEMENT
- VOISINAGES NON-HOMOGÈNES : $\mathbb{Z}^d$ RAYON r $\longrightarrow$ GRAPHE DE COMMUNICATION.
- MODE DE MISE À JOUR.

DEF : $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. AUTOMATES

$n \in \mathbb{N}_+$ TAILLE

$X = \prod_{i \in [n]} A_i$ AVEC $A_i = \{0, 1, \dots, a_i - 1\}$ CONFIGURATIONS (ALPHABETS FINIS)

$(f_i : X \to A_i)_{i \in [n]}$ FONCTIONS LOCALES

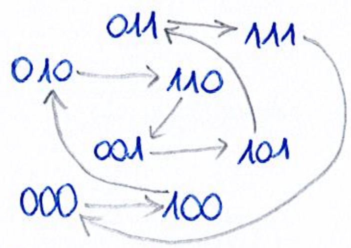
$f : X \to X$ AVEC $\forall x \in X : f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ FONCTION GLOBALE / "DYNAMIQUE"

$\hookrightarrow$ R.A. DÉTERMINISTE AVEC MODE DE MISE À JOUR PARALLÈLE / SYNCHRONE.

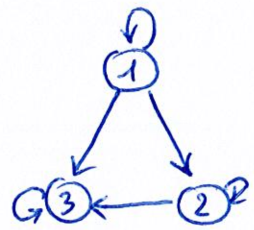
EXEMPLE : $n = 3$, BOOLÉEN ($a_i = 2$)

$f_1(x) = \neg x_1$
$f_2(x) = x_1 \oplus x_2$
$f_3(x) = x_3 \oplus (x_1 \wedge x_2)$

FONCTIONS LOCALES



FONCTION GLOBALE



GRAPHE D'INTERACTION.
⚠ $\subseteq$ GRAPHE DE COMMUNICATION

DEF : LE GRAPHE DE COMMUNICATION $G_f^C = (V^C, A^C)$ D'UN R.A. f AVEC
$V^C = [n]$ ET $(i, j) \in A^C \Leftrightarrow i$ APPARAÎT DANS LA DÉFINITION DE f_j.

LE GRAPHE D'INTERACTION EST $G_f = (V, A)$ AVEC
$V = [n]$ ET $(i,j) \in A \Leftrightarrow i$ INFLUENCE EFFECTIVEMENT j
$\Leftrightarrow \exists x \in X : f_j(x) \neq f_j(x + e_i)$ OÙ e_i EST LE $i^{ème}$ VECTEUR DE BASE ET $+$ MODULO a_i.

MODES DE MISE À JOUR.

UN VASTE PAYSAGE, DONT LES ÉLÉMENTS IMPORTANTS SONT :

NOTATION : POUR $f : X \to X$ ET $B \subseteq [n]$ ON NOTE $f_B : X \to X$ T.Q. $\forall i \in [n] : f_B(x)_i = \begin{cases} f_i(x) & \text{si } i \in B \\ x_i & \text{sinon.} \end{cases}$

ET POUR $\mu = (B_1, \dots, B_p)$ UNE SÉQUENCE DE BLOCS $B_i \subseteq [n]$ ON NOTE $f_\mu = f_{B_p} \circ \dots \circ f_{B_1} : X \to X$.

DÉTERMINISTES $X \to X$:

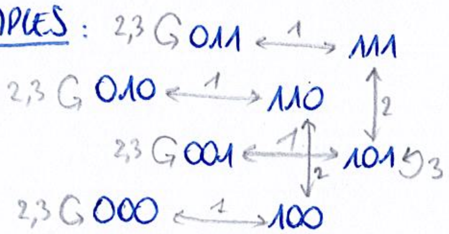
- PARALLÈLE : $([n])$
- SÉQUENTIEL : $(\{\pi(i)\})_{i \in [n]}$ AVEC $\pi : [n] \to [n]$ UNE PERMUTATION.
- BLOC SÉQUENTIEL : $(B_1, \dots, B_p)$ UNE PARTITION ORDONNÉE $\left(\forall i \neq j : B_i \cap B_j = \emptyset \text{ ET } \bigcup_{i \in [n]} B_i = [n]\right)$.
- PÉRIODIQUE : μ UNE SÉQUENCE DE BLOCS QUELCONQUE.

NON-DÉTERMINISTES $X \to \mathcal{P}(X)$:

- ASYNCHRONE PARFAIT α : $f_\alpha(x) = \left\{ f_{\{i\}}(x) \mid i \in [n] \right\}$.
- ASYNCHRONE GÉNÉRAL $\hat{\alpha}$: $f_{\hat{\alpha}}(x) = \left\{ f_B(x) \mid B \subseteq [n] \right\}$.
- NON-DÉTERMINISTE : RELATIONS LOCALES $(r_i : X \to \mathcal{P}(A_i))_{i \in [n]}$ OU $(r_i \subseteq X \times A_i)_{i \in [n]}$

  ET RELATION GLOBALE $r : X \to \mathcal{P}(X)$ AVEC $y \in r(x) \Leftrightarrow \forall i \in [n] : y_i \in r_i(x)$.

EXEMPLES :



ASYNC. PARFAIT

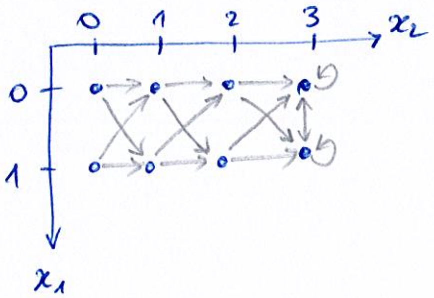
$n = 2$

$A_1 = \{0,1\}$

$A_2 = \{0,1,2,3\}$

$r_1(x) = \{0,1\}$

$r_2(x) = \begin{cases} \{3\} & \text{si } x_2 = 3 \\ \{x_2 + 1\} & \text{sinon} \end{cases}$



NON-DET.

DÉFINITIONS :

DET : POINT FIXE $x \in X$ T.Q. $f(x) = x$

CYCLE LIMITE $(x^0, \dots, x^{\ell-1})$ T.Q. $f(x^i) = x^{i+1 \text{ modulo } \ell}$ ET $\forall i \neq j : x^i \neq x^j$

ℓ EST LA PÉRIODE.

NON-DET : POINT FIXE $x \in X$ T.Q. $x \in f(x)$.

POINT FIXE FORT $x \in X$ T.Q. $f(x) = \{x\}$.

ATTRACTEUR : COMPOSANTE FORTEMENT CONNEXE TERMINALE (BASSIN $\neq \emptyset$).

THÉORÈME : TOUT GRAPHE ORIENTÉ EST LA DYNAMIQUE D'UN R.A. NON-DÉTERMINISTE.
——— DE DEGRÉ SORTANT 1 ——— DÉTERMINISTE.

PREUVE : EN DM. $\square$

REMARQUE : DYNAMIQUE DÉTERMINISTE = GRAPHE DE DEGRÉ SORTANT 1
= CHAQUE COMPOSANTE CONNEXE EST 1 CYCLE + DES ARBRES.

PLAN :
(I). HISTOIRE ET APPLICATIONS
(II). RELATIONS STRUCTURELLES ENTRE G_f ET f_u.
(III). COMPLEXITÉ ALGORITHMIQUE DES R.A.

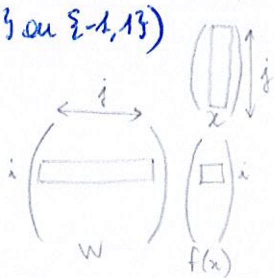
(I). HISTOIRE ET APPLICATIONS.

- RÉSEAUX DE NEURONES : McCulloch et Pitts 1943 (voir)

  RÉSULTAT : UN RÉSEAU DE NEURONES FINI (RA BOOLÉEN À SEUIL) PEUT CALCULER N'IMPORTE QUELLE FONCTION LOGIQUE.

  \+ THÈSE DE CHURCH-TURING.

FONCTION BOOLÉENNE À SEUIL : $\forall i \in [n] : f_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{j\in[n]} w_{ij} \cdot x_j > \theta_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
($\{0,1\}$ ou $\{-1,1\}$)



$$= \underset{\substack{\text{HEAVISIDE} \\ 1 \text{ si } >0 \\ 0 \text{ si } \leq 0}}{H}\Big(\sum_{j\in[n]} w_{ij} \cdot x_j - \theta_i\Big)$$

AVEC $w_{ij} \in \mathbb{R}$ (MATRICE $n \times n$) ET $\theta_i \in \mathbb{R}$ (VECTEUR n).

- APPLICATION À LA RÉGULATION GÉNÉTIQUE : KAUFFMAN 1969 (SYNC.), THOMAS 1973 (ASYNC.) 1981 (±FEEDBACK CYCLES).

  AUTOMATE $\longrightarrow$ GÈNE
  0 $\longrightarrow$ INEXPRIMÉ
  1 $\longrightarrow$ EXPRIMÉ (PRODUCTION DE PROTÉINES OU ARN)
  POINT FIXE $\longrightarrow$ TYPE CELLULAIRE (PHÉNOTYPE)

EXEMPLE FAMEUX : ARABIDOPSIS THALIANA, MENDOZA ET ALVAREZ-BUYLLA 1998 (VOIR)
$n = 12$ GÈNES, 6 POINTS FIXES = 6 TYPES DE CELLULES (?!)
(FIG 12 + 1 AUTOMATE POUR AP3-PI, EQ 1, MATRICE w ET VECTEUR θ, FIG 4 POINTS FIXES)

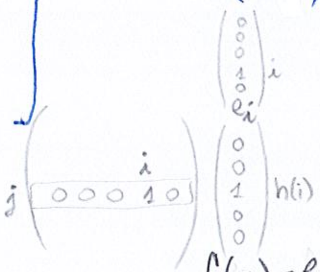
THÉORÈME [GOLES, MARTINEZ, 1990] SOIT D UN ENSEMBLE FINI ET $h : D \to D$.
IL EXISTE UN RABS f ET $\phi : D \to \{0,1\}^n$ INJECTIVE T.Q. $\phi \circ h = f \circ \phi$
(ENCODAGE) (SIMULATION)

PREUVE : $n = |D|$ $\phi^{-1} \circ f \circ \phi = h$

$\phi : i \mapsto e_i$ VECTEUR DE BASE

$w_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si } h(i) = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ALORS $f(\phi(i)) = H(W.e_i - \theta) = e_{h(i)} = \phi(h(i))$.

$\theta_i = \frac{1}{2}$.



$f(e_i) = e_{h(i)}$

⚠ RABS AVEC $2^{|D|}$ CONFIGURATIONS ...

□

(II). RELATIONS STRUCTURELLES ENTRE G_f ET f_μ

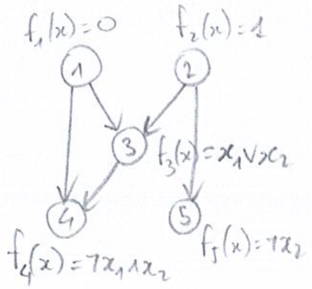
LES CYCLES SONT LES MOTEURS DE LA COMPLEXITÉ COMPORTEMENTALE (DE LA DYNAMIQUE).

LOI

THÉORÈME [ROBERT 1976]. SOIT f_μ UN R.A. DÉTERMINISTE ÉQUITABLE ($\bigcup_{k \in [p]} B_k = [n]$).
SI LE GRAPHE D'INTERACTION G_f EST ACYCLIQUE ALORS f_μ^n EST CONSTANTE.
(IL EXISTE UN UNIQUE ATTRACTEUR POINT FIXE).

PREUVE : TRI TOPOLOGIQUE DE G_f.
PAR INDUCTION SUR t DE 1 À n : APRÈS t ÉTAPES LES AUTOMATES À DISTANCE $t-1$ DES SOURCES SONT CONSTANTS (CAR μ ÉQUITABLE).

EXEMPLE :
$n=5$
BOOLÉEN
MAJ PARALLÈLE



$f^1(x) = y$ $y_1 = 0$ $y_2 = 1$

$f^2(x) = y$ $y_3 = 1$

$f^3(x) = y$ $y_4 = 1$ $y_5 = 0$. □

SIGNES DES ARCS ET CYCLES DU GRAPHE D'INTERACTION (BOOLÉEN).

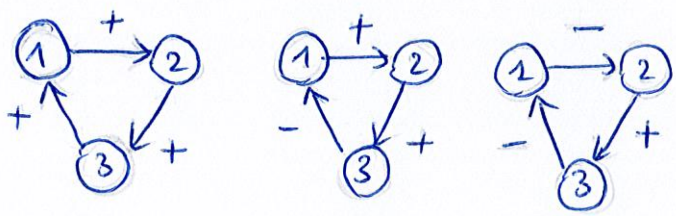
DEF : (i,j) POSITIF LORSQUE $\exists\, x \in \{0,1\}^n$: $x_i = 0$ ET $f_j(x) = 0 < 1 = f_j(x + e_i)$.
(i,j) NÉGATIF ——————— $x_i = 1$ ———————.

UN CYCLE DE G_f EST POSITIF S'IL CONTIENT UN NOMBRE PAIR D'ARCS NÉGATIFS, ET NÉGATIF SINON (IMPAIR).

⚠ LES SIGNES D'UN ARC SONT NON-EXCLUSIFS.

SIGNES SIMPLES : FONCTION LOCALE MONOTONE, F.A. MONOTONE (UNATE).

EXEMPLES :



INTUITION :
POSITIF = PAIR
= L'INFORMATION REVIENT À L'IDENTIQUE (- FLIP LE BIT)
= BON POUR LES POINTS FIXES

1 2 3			
000	000	100	110
100	010	110	100
010	001	101	111
110	011	111	101
001	100	000	010
101	110	010	000
011	101	001	011
111	111	011	001

2 POINTS FIXES — 1 CYCLE DE PÉRIODE 6 ET ——— 2 — IDEM +++
2 CYCLES DE PÉRIODE 3

↳ GÉNÉRALISATION À TOUTE TAILLE n EN LIEN AVEC LES DIVISEURS DE n (INDICATRICE D'EULER ET FORMULE D'INVERSION DE MÖBIUS)
VOIR [SENE 2012 (HDR)].

⚠ $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ MONOTONE POUR $\leqslant$ (ORDRE PARTIEL ÉQUIVALENT À L'INCLUSION POUR L'ENSEMBLE DES PARTIES DE $[n]$)
EST UNE NOTION PLUS FORTE ($\forall x, y$: $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$).

DANS CE CAS : THÉORÈME DE KNASTER-TARSKI : L'ENSEMBLE DES POINTS FIXES EST UN SOUS-TREILLIS COMPLET.

LOI

THÉORÈME [THOMAS 1981 (CONJECTURE), RICHARD COMET 2007 (ASYNCHRONE), NOUAL SENÉ 2012 (TOUT MMJ)]

SI f_μ ADMET AU MOINS DEUX CONFIGURATIONS STABLES = POINTS FIXES (MULTISTATIONNARITÉ)

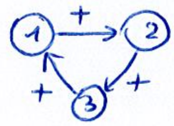
ALORS G_f CONTIENT UN CYCLE POSITIF.

THÉORÈME [THOMAS 1981, RICHARD 2010]. ASYNCHRONE α.

SI f_α ADMET UNE OSCILLATION STABLE = ATTRACTEUR DE TAILLE AU MOINS DEUX

ALORS G_f CONTIENT UN CYCLE NÉGATIF.

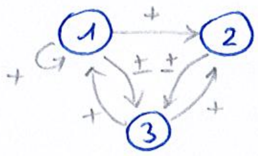
FAUX EN PARALLÈLE :



A 2 POINTS FIXES ET 2 CYCLES LIMITES DE PÉRIODE 3.

INFLUENCE DES MODES DE MISE À JOUR

EXEMPLE :

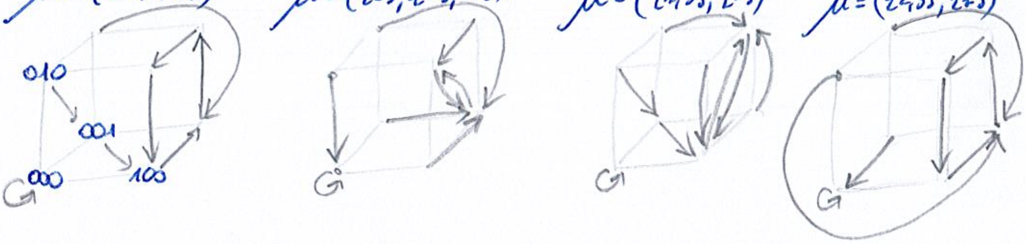


$f_1(x) = x_1 \vee x_3$

$f_2(x) = x_1 \wedge x_3$

$f_3(x) = x_1 \oplus x_2$.

BLOC-SÉQUENTIELS : $\mu = (\{1,2,3\})$ $\mu = (\{2\},\{1\},\{3\})$ $\mu = (\{1,3\},\{2\})$ $\mu = (\{2,3\},\{1\})$



THÉORÈME [ROBERT 1986] SOIT f UN R.A.. POUR TOUT μ BLOC-SÉQUENTIEL,

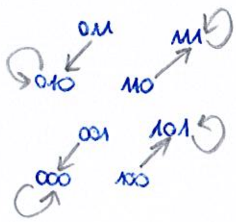
$f_\mu(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$ C'EST-À-DIRE f_μ AURA TOUJOURS LE MÊME ENSEMBLE DE POINTS FIXES (QUE LE PARALLÈLE).

PREUVE : $f(x) = x \Rightarrow \forall i \in [n] : f_i(x) = x_i \xrightarrow[\text{TAILLE DE } \mu]{\text{INDUCTION SUR LA}} f_\mu(x) = x$.

$f_\mu(x) = x \xrightarrow[\text{CAR PARTITION (TOUS UNE ET UNE SEULE FOIS)}]{\text{INDUCTION SUR LA TAILLE DE } \mu} \forall i \in [n] : f_i(x) = x_i \Longrightarrow f(x) = x$. $\square$

FAUX AU DELÀ DE BLOC-SÉQUENTIEL :

- LE CYCLE NÉGATIF DE TAILLE n A 0 POINT FIXE EN BLOC-SÉQ., MAIS POUR $\mu = (\underbrace{[n],[n],\dots,[n]}_{2n \text{ FOIS}})$ IL A 2^n POINTS FIXES.
- LE CYCLE POSITIF DE TAILLE 3 AVEC $\mu = (\{2,3\},\{1,3\},\{1,2\})$:



ON PEUT AVOIR DE NOUVEAUX POINTS FIXES, MAIS LES POINTS FIXES PARALLÈLES (BLOC-SÉQ) RESTENT.

THÉORÈME [Riis 2007, Aracena 2008, Aracena Richard Salinas 2017] Booléen :

Soit $\max PF(G)$ le nombre maximum de points fixes de f tel que $G_f = G$.

G non signé : $\nu(G)+1 \leqslant \max PF(G) \leqslant 2^{\tau(G)}$

G signé : $2^{\nu^*(G)} \leqslant \max PF(G) \leqslant 2^{\tau^+(G)}$

pour les R.A. monotones (signes simples).

avec $\tau(G)$ le transversal number (minimum FVS)
$\tau^+(G)$ le positive transversal number (minimum FVS+ pour cycles positifs)
$\nu(G)$ le packing number (max cycles disjoints)
$\nu^*(G)$ le special packing number.

(vrai pour tout bloc-séquentiel, et aussi en asynchrone).

PREUVE : de $\max PF(G) \leqslant 2^{\tau^+(G)}$ [Aracena 2008]

Soient f un R.A.B. tel que $G_f = G$ et $V \subseteq [n]$ un FVS+.

On montre que $g : \{x \mid f(x) = x\} \longrightarrow \{0,1\}^V$ est injective.
$x \longmapsto x_V$

Soient $x \neq y$ deux points fixes de f.
On montre qu'ils diffèrent sur tout un cycle positif, donc $g(x) \neq g(y)$.
Soit $i \in [n]$ avec $x_i = 0 < 1 = y_i$.
idée : ce passage de $f_i(x) = 0$ à $f_i(y) = 1$ doit avoir une explication.
On montre qu'il existe soit $j \xrightarrow{+} i$ avec $x_j = 0 < 1 = y_j$,
soit $j \xrightarrow{-} i$ avec $x_j = 1 > 0 = y_j$.

Par l'absurde si $\forall j \in N^+_{in}(i) : x_j \geqslant y_j$ et $\forall j \in N^-_{in}(i) : x_j \leqslant y_j$ } NB : $j \in N^+ \cap N^- : x_j = y_j$
alors en faisant se rapprocher (distance de Hamming) x de y
sur $N^+_{in}(i) \,\Delta\, N^-_{in}(i)$ on va obtenir une variation de f_i (de 0 à 1)
pour un $+e_j$ en contradiction avec l'unique signe de l'arc (j,i) :
soit $j \in N^+_{in}(i)$ avec $x_j = 1$ et $y_j = 0$,
soit $j \in N^-_{in}(i)$ avec $x_j = 0$ et $y_j = 1$.

On peut donc parcourir les arcs à l'envers, en inversant (flip) le bit de x et y à chaque arc négatif. En retombant sur un sommet déjà visité (G fini) on devra avoir réalisé un nombre pair de flips $\Rightarrow$ cycle positif. □
(bornes atteintes).

(III). COMPLEXITÉ ALGORITHMIQUE (MOD. PARALLÈLE)

ENTRÉE : GRAPHE D'INTERACTION G.

PROPOSITION : G EST LE GRAPHE D'INTERACTION SIGNÉ D'UN R.A.B SI ET SEULEMENT SI $|\mathcal{N}^{\pm}_{IN}(i)| \neq 1$ OU $|\mathcal{N}_{IN}(i)| \geq 3$ POUR TOUT $i \in [n]$.

(EX: $\bigcirc \xrightarrow{\pm} \bigcirc$ IMPOSSIBLE)

SUR n AUTOMATES, IL Y A 2^{n2^n} R.A.B ET 4^{n^2} G.I. SIGNÉS.
$\{\emptyset, +, -, \pm\}$

POUR UN SOMMET DE DEGRÉ ENTRANT d DONT LES ARCS SONT SIMPLEMENT SIGNÉS, IL Y A

d	0	1	2	3	4	5	6
#	2	1	2	9	114	6894	7.785.062

FONCTIONS LOCALES MONOTONES POSSIBLES

[OEIS:A006126]

⚠ ICI EFFECTIVE ≠ DEDEKIND NUMBERS [OEIS:A000372].

THÉORÈME [BRIDOUX DURBEC P. RICHARD 2019, 2022].
ÉTANT DONNÉ G SIGNÉ, DÉCIDER SI

ALGO NON-TRIVIAL POUR L'EXISTENCE D'UN CYCLE POSITIF (EXISTENCE DE CYCLE NÉGATIF DANS NL).

- $\mathrm{MaxPF}(G) \geq k$ FIXÉ EST : DANS P POUR $k=1$
  NP-COMPLET POUR $k \geq 2$.
- $\mathrm{MinPF}(G) < k$ FIXÉ EST NEXPTIME-COMPLET POUR TOUT k.

SUR L'INFORMATION CONTENUE DANS LE GRAPHE D'INTERACTION COMPLET (NON SIGNÉ) :

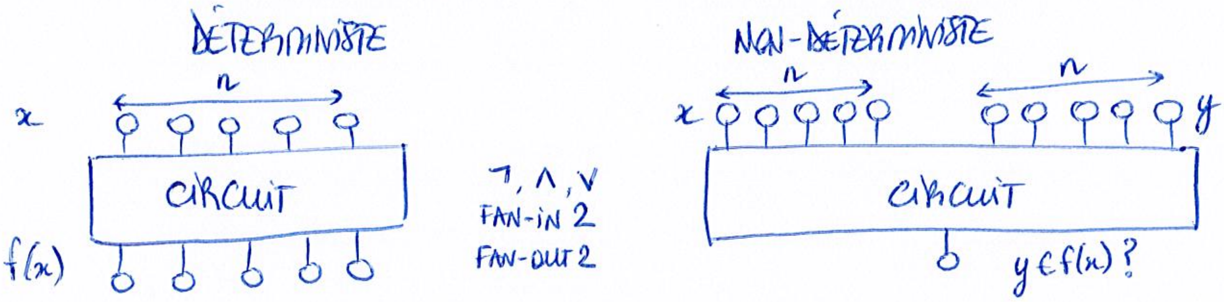
THÉORÈME [PICARD RICHARD 2020]. SOIT K_n LE GRAPHE COMPLET ET $\sim$ L'ISOMORPHISME (RENOMMAGE DES CONFIGS).

$\forall f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$, $\exists g : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$, $g \sim f$ ET $G_g = K_n$, SAUF :

- L'IDENTITÉ ($\forall x : f(x) = x$) DONT LE G.I. A UNIQUEMENT n BOUCLES,
- LA CONSTANTE ($\exists y : \forall x : f(x) = y$) DONT LE G.I. N'A AUCUN ARC.

ENTRÉE : FONCTIONS LOCALES OU DYNAMIQUE REPRÉSENTÉE SUCCINCTEMENT.

FONCTIONS LOCALES ENCODÉES PAR DES CIRCUITS BOOLÉENS.



CAS NON-BOOLÉEN : $n \rightsquigarrow \lceil \log_2 |X| \rceil$ BITS

"SUCCINCT GRAPH REPRESENTATION."

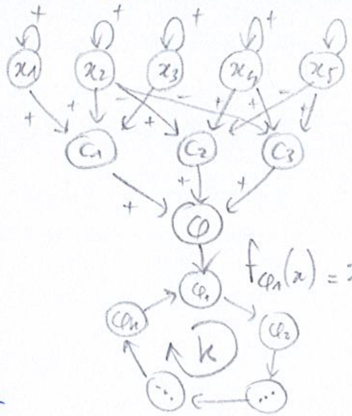
THÉORÈME [ALON 1985] ÉTANT DONNÉ UN R.A.B. f DE TAILLE n, DÉCIDER SI $\exists\, x \in \{0,1\}^n : f(x) = x$ EST NP-COMPLET.

PREUVE : "WE OMIT THE DETAILS".

COROLLAIRES : MÊME AVEC LA RESTRICTION (PROMESSE !) QUE $\Delta(G_f) \leqslant 2$
OU AVEC UN GRAPHE DE COMMUNICATION TEL QUE $\Delta(G_f^c) \leqslant 2$.
RÉDUCTION PARCIMONIEUSE DONC COMPTER LES POINTS-FIXES EST #P-COMPLET.

THÉORÈME [BRIDOUX, GAZE-MAILLOT, P., SENÉ 2021] : DÉCIDER SI $\exists$ UN CYCLE LIMITE DE PÉRIODE k FIXÉ EST NP-COMPLET.

PREUVE :



$\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_2 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_4 \vee x_5)$

$f_{\varphi_1}(x) = x_{\varphi_1} \wedge x_{\varphi}$

$\Delta(G_f) \leqslant 2$ TOUJOURS POSSIBLE. $\square$

EXERCICE : MONTRER QUE L'EXISTENCE D'UNE PRÉIMAGE (ENTRÉE : f, x) EST NP-COMPLET.

$f_i(x) = \varphi(x)$ POUR TOUT $i \in [n]$, ALORS $f^{-1}(1^n)$ = MODÈLES DE φ

THÉORÈME : DÉCIDER SI f EST L'IDENTITÉ / CONSTANTE / BIJECTIVE EST CONP-COMPLET.

PREUVE : DEPUIS UNSAT : $f_i(x) = x_i \oplus \varphi(x)$, $f_i(x) = \varphi(x)$,
ET POUR BIJECTIVITÉ ON PART DE φ TELLE QUE $\varphi(0^n) = 0$ ET IDEM IDENTITÉ. $\square$

THÉORÈME : L'ATTEIGNABILITÉ (ENTRÉE : f, x, y) EST PSPACE-COMPLÈTE.
LA NILPOTENCE ($|\Omega_f| = 1$)

LOGIQUE DE GRAPHES : F.O. AVEC SIGNATURE $\{=, \to\}$.

- $\exists x : x \to x$. NP-COMPLET
- $\forall x : \neg(x \to x)$. CONP-COMPLET
- $\exists x^1, \dots, x^k : x^1 \to x^2 \wedge x^2 \to x^3 \wedge \dots \wedge x^k \to x^1$. NP-COMPLET.
- $\forall x, x', y, y' : (x \to y \wedge x' \to y' \wedge y = y') \Rightarrow (x = x')$. CONP-COMPLET
- $\exists x : \forall y : y \to x \equiv \forall x, x', y, y' : (x \to y \wedge x' \to y') \Rightarrow (y = y')$. CONP-COMPLET.
- $\exists x, y : x \to y$. $O(1)$ ⚠

ψ EST NON-TRIVIALE LORSQU'ELLE A UNE INFINITÉ DE R.A. MODÈLES ET UNE INFINITÉ DE R.A. CONTRE-MODÈLES.

THÉORÈME [GAMARD, GUILLON, P, THEYSSIER, 2021]. POUR TOUTE ψ NON-TRIVIALE (FIXÉE), DÉCIDER SI LA DYNAMIQUE DE f VÉRIFIE ψ EST NP-DUR OU CONP-DUR.

NB : LA PREUVE NÉCESSITE DES ALPHABETS ARBITRAIRES CAR n AUTOMATES BOOLÉENS $\Rightarrow |X| = 2^n$ SOMMETS.
AVENIR GOUBAULT-LARRECQ : BOOLÉEN ET q-UNIFORME OK.

CALCULER G_f.

THÉORÈME : ÉTANT DONNÉS f ET G, DÉCIDER SI $G_f = G$ EST DP-COMPLET.

INTUITION : $(i,j) \in G_f \iff \exists x : f_j(x + e_i) \neq f_j(x)$

- DÉCIDER L'EXISTENCE D'UN ARC EST NP-COMPLET
- DÉCIDER L'ABSENCE D'UN ARC EST CONP-COMPLET.
- DÉCIDER LES DÉPENDANCES EFFECTIVES EST NP-DUR ET CONP-DUR ...

$$DP = \{L_1 \cap L_2 \mid L_1 \in NP \text{ et } L_2 \in coNP\}.$$

RÉDUCTION DEPUIS SAT-UNSAT SUR L'ENTRÉE φ, φ'.