Faculté des sciences Aix Marseille Université

Année universitaire 2024/2025

Site : ☒ Luminy ☐ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☒ 1er semestre ☐ 2ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : M2 Nom du diplôme : Master IMD
Code du module : SMACK2A Libellé du module : Modèles de calcul et systèmes dynamiques
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : OUI

Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre.
Nous attendons des réponses justifiées et aussi formelles que possible.

Exercice 1. (Automates cellulaires)

1. Déterminer si les règles globales suivantes sont des automates cellulaires.
   (a) $F_1 : x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \mapsto y \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ avec $y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ contient un nombre fini de } 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$
   (b) $F_2 : x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \mapsto y \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ avec $y_n = x_{-n}$
   (c) $F_3 : x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \mapsto y$ avec $y_n = \begin{cases} 1 \text{ s'il existe } i \neq j \in \{n-10, n-9, \dots, n+10\} \text{ tels que } x_i = x_j = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Un automate cellulaire est *injectif* (rep. *surjectif*) si sa fonction **globale** est une fonction injective (resp. surjective).

2. Les automates cellulaire élémentaires suivants sont-ils injectifs ? Surjectifs ?
   (a) 225
   (b) 142
3. Soit F un automate cellulaire **élémentaire**. Soit $G : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \mapsto \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ la fonction globale telle que : pour tout diagramme espace-temps $D \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}$ de F, il existe un diagramme espace-temps $D' \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}$ de G qui lui est complémentaire (c'est à dire que pour tout $\vec{v} \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}, D'_{\vec{v}} = 1 - D_{\vec{v}}$).
   G est-elle la fonction globale d'un automate cellulaire ? Si oui, donner sa règle locale.

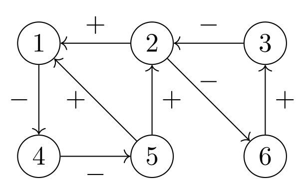
Exercice 2. (Réseaux d'automates)

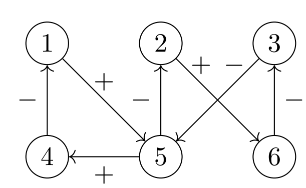
Soit f le réseau d'automates booléens déterministe de taille $n = 4$ défini par les fonctions locales :

$$f_1(x) = x_2 \qquad f_3(x) = x_1 \wedge \neg x_1$$
$$f_2(x) = x_1 \qquad f_4(x) = (\neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge x_4$$

1. Donner le graphe d'interaction signé de f.
2. Lister les points fixes de la dynamique de f suivant le mode de mise à jour parallèle.
3. Lister les cycles limites de la dynamique de f suivant le mode de mise à jour parallèle.
4. Est-il possible d'avoir plus de points fixes pour un autre réseau d'automates booléens (suivant le mode de mise à jour parallèle) ayant le même graphe d'interaction que f ?
5. Lister les points fixes de la dynamique de f suivant le mode de mise à jour correspondant à la séquence de blocs $\mu = (\{1,3\}, \{2\}, \{4\})$.

Soient g et h deux réseaux d'automates booléens dont on connaît seulement les graphes d'interaction signés G_g et G_h :

$G_g =$ 

$G_h =$ 

6. Pour le mode de mise à jour asynchrone parfait (où exactement un automate est mis à jour à chaque itération), l'une des dynamiques de ces deux réseaux d'automates ne contient aucun attracteur de taille 1, et dans l'autre tous les attracteurs sont de taille 1. Lequel est dans quel cas, et pourquoi ?

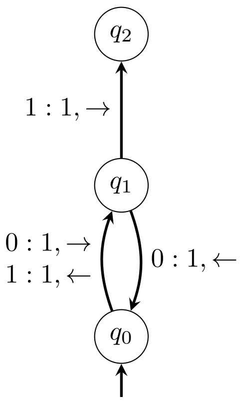
Suite au verso ↪

Exercice 3. (Simulation)
En dimension $d = 1$, avec états Q et voisinage $N \subset \mathbb{Z}$, un automate cellulaire de règle locale $f : Q^N \to Q$ et règle globale $F : Q^{\mathbb{Z}} \to Q^{\mathbb{Z}}$ est dit *quiescent* lorsqu'il existe un état $q \in Q$ tel que $f(q, q, \dots, q) = q$. On dit alors qu'une configuration $c \in Q^{\mathbb{Z}}$ est *finie* lorsqu'elle contient un nombre fini de cellules qui ne sont pas dans l'état q. On peut ainsi avoir une déscription finie de c en donnant ses états sur un intervalle fini $I \subset \mathbb{Z}$, et en considérant que toutes les autres cellules sont dans l'état q.

On dit qu'un système dynamique $G : Y \to Y$ simule un système dynamique $F : X \to X$ lorsqu'il existe une transformation injective $\varphi : X \to Y$ telle que pour toute configuration $c \in X$ on a $(\varphi^{-1} \circ G \circ \varphi)(c) = F(c)$.

1. En vous inspirant des deux diagrammes espace-temps ci-dessous, montrer formellement que toute machine de Turing déterministe peut être simulée par un automate cellulaire quiescent en dimension $d = 1$.

   Indication : une machine de Turing déterministe M est définie par un alphabet de ruban Γ dont un symbole blanc $0 \in \Gamma$, un ensemble d'états Q dont un état initial $q_0 \in Q$, et une fonction de transition $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$. On lui associe un système dynamique $M : Q \times \Gamma^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z} \to Q \times \Gamma^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}$ sur l'espace de ses configurations. Le calcul de la machine de Turing s'arrête quand aucune transition n'est définie dans δ. Dans le systèmes dynamiques M, on considère que toute configuration d'arrêt est un point fixe.



temps

0	0	1	1	1	1	0	0	q_2
0	0	1	1	1	1	0	0	q_1
0	0	0	1	1	1	0	0	q_0
0	0	0	0	1	1	0	0	q_1
0	0	0	0	1	1	0	0	q_0
0	0	0	0	1	0	0	0	q_1
0	0	0	0	0	0	0	0	q_0

temps

$(0,*)$	$(0,*)$	$(1,*)$	$(1,*)$	$(1,q_2)$	$(1,*)$	$(0,*)$	$(0,*)$
$(0,*)$	$(0,*)$	$(1,*)$	$(1,*)$	$(1,q_2)$	$(1,*)$	$(0,*)$	$(0,*)$
$(0,*)$	$(0,*)$	$(1,*)$	$(1,q_1)$	$(1,*)$	$(1,*)$	$(0,*)$	$(0,*)$
$(0,*)$	$(0,*)$	$(0,q_0)$	$(1,*)$	$(1,*)$	$(1,*)$	$(0,*)$	$(0,*)$
$(0,*)$	$(0,*)$	$(0,*)$	$(0,q_1)$	$(1,*)$	$(1,*)$	$(0,*)$	$(0,*)$
$(0,*)$	$(0,*)$	$(0,*)$	$(0,*)$	$(1,q_0)$	$(1,*)$	$(0,*)$	$(0,*)$
$(0,*)$	$(0,*)$	$(0,*)$	$(0,*)$	$(1,*)$	$(0,q_1)$	$(0,*)$	$(0,*)$
$(0,*)$	$(0,*)$	$(0,*)$	$(0,*)$	$(0,q_0)$	$(0,*)$	$(0,*)$	$(0,*)$

   Gauche : une machine de Turing dont les transitions sont étiquetées « symbole lu : symbole à écrire, déplacement ».
   Centre : portion du diagramme espace-temps de cette machine de Turing sur l'entrée vide.
   Droite : portion du diagramme espace-temps d'un automate cellulaire en dimension $d = 1$ sur les états $\Gamma \times (Q \cup \{*\})$.

On considère le problème de l'apparition d'un état particulier dans la dynamique d'un automate cellulaire quiescent depuis une configuration finie (toujours en dimension $d = 1$).

Apparition
Entrée : une règle locale $f : Q^N \to Q$ d'automate cellulaire quiescent, une configuration finie c, et un état $p \in Q$.
Sortie : est-ce qu'il existe $t \in \mathbb{N}$ et $i \in \mathbb{Z}$ tels que $F(c)_i = p$?

2. Montrer que le problème **Apparition** est indécidable.

On considère maintenant une variante du même problème, où l'automate cellulaire quiescent est fixé dans la définition du problème (toujours en dimension $d = 1$).

Apparition pour l'AC quiescent f
Entrée : une configuration finie c, et un état $p \in Q$.
Sortie : est-ce qu'il existe $t \in \mathbb{N}$ et $i \in \mathbb{Z}$ tels que $F(c)_i = p$?

3. Soit g l'automate cellulaire quiescent sur l'ensemble d'états $Q = \{0, 1, 2, 3\}$ avec 0 l'état quiescent, de voisinage $N = \{-1, 0\}$ et de fonction locale $g(c_1, c_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } (c_1, c_2) = (0,0), (0,1), (2,0) \text{ ou } (2,1) \\ 1 & \text{si } (c_1, c_2) = (1,0) \text{ ou } (1,1) \\ 2 & \text{si } (c_1, c_2) = (0,2) \text{ ou } (2,2) \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$.

   Montrer que le problème **Apparition pour l'AC quiescent g** est décidable.

4. Montrer qu'il existe un automate cellulaire quiescent h pour lequel le problème **Apparition pour l'AC quiescent h** est indécidable.