Examen de substitution – Complexité (SINA09B)

Durée : 2 heures. *(Barème indicatif)*
Documents : non autorisés.

Rappel : **Master théorème.** Soit $a \geq 1$, $b > 1$, $c = \log_b a$, $T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$.

1. Si $f(n) \in \mathcal{O}(n^{c-\epsilon})$ pour un certain $\epsilon > 0$, alors $T(n) \in \Theta(n^c)$.
2. Si $f(n) \in \Theta(n^c)$, alors $T(n) \in \Theta(n^c \log_b n)$.
3. Si $f(n) \in \Omega(n^{c+\epsilon})$ pour un certain $\epsilon > 0$, et si $a\,f(n/b) \leq d\,f(n)$ pour $d < 1$ et n suffisamment grand, alors $T(n) \in \Theta(f(n))$.

Exercice 1. *Complexité des algorithmes (8 points)*
Soit l'algorithme itératif suivant, où `n` est un nombre entier positif :

```
parité(n):
    si n est pair alors:
        pour i de 1 à n faire:
            pour j de 1 à i faire:
                k = n
                tant que k > 1 faire:
                    k = k / 2            /* division entière */
        retourner 0
    sinon:
        retourner 1
```

1. Quelle est la complexité de l'algorithme `parité` ? Justifier brièvement.

2. Cette complexité est-elle polynomiale ou exponentielle ? Justifier.

Soit l'algorithme récursif suivant, où `T` est un tableau indicé de `1` à `n` :

```
maximum(T): retourner maximum4(T,1,n)
maximum4(T,i,j):
    si i == j alors retourner i
    si i+1 == j alors retourner T[i]>T[j] ? i : j
    m1 = maximum4(T,i,i+(j-i)/4)
    m2 = maximum4(T,i+(j-i)/4+1,i+2*(j-i)/4)
    m3 = maximum4(T,i+2*(j-i)/4+1,i+3*(j-i)/4)
    m4 = maximum4(T,i+3*(j-i)/4+1,j)
    si T[m1]>=T[m2] et T[m1]>=T[m3] et T[m1]>=T[m4] alors retourner m1
    si T[m2]>=T[m1] et T[m2]>=T[m3] et T[m2]>=T[m4] alors retourner m2
    si T[m3]>=T[m1] et T[m3]>=T[m2] et T[m3]>=T[m4] alors retourner m3
    si T[m4]>=T[m1] et T[m4]>=T[m2] et T[m4]>=T[m3] alors retourner m4
```

3. Que calcule l'algorithme `maximum` ?

4. Quelle est la complexité de l'algorithme `maximum` ? Justifier.

5. Cette complexité est-elle optimale ? Justifier.

Exercice 2. *SAT et **Stable** (12 points)*

Soit les trois problèmes de décision suivants.

SAT
Entrée : une formule propositionnelle φ en forme normale conjonctive.
Question : est-ce que φ est satisfaisable ?

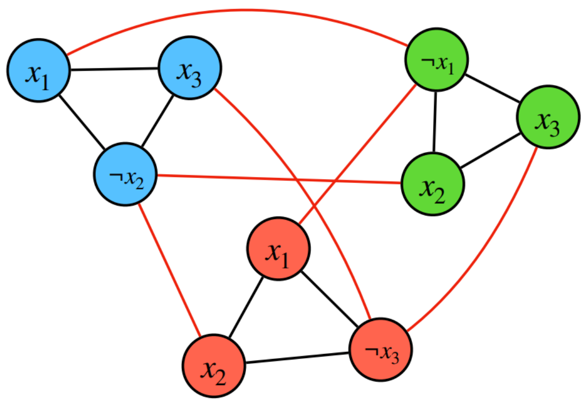
3-SAT
Entrée : une formule propositionnelle φ en forme normale conjonctive, dont toutes les clauses sont de taille trois.
Question : est-ce que φ est satisfaisable ?

Stable
Entrée : un graphe non-orienté $G = (V, E)$ et un entier $k \in \mathbb{N}$.
Question : G contient-il un stable (sous-ensemble de sommets indépendants) de taille k ?

1. Expliquer pourquoi ces trois problèmes appartiennent à la classe NP.
2. Qu'est-ce qu'une réduction polynomiale ?
3. Qu'est-ce qu'un problème NP-difficile ?
4. Soient deux problèmes de décision **A** et **B**. Expliquer pourquoi, si **A** est NP-difficile et **A** se réduit polynomialement à **B**, alors **B** est NP-difficile.

5. En vous inspirant du schéma suivant, décrire la transformation d'une réduction polynomiale de **3-SAT** à **Stable**, et argumenter de l'équivalence des instances.

$$\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$



6. Donner une réduction polynomiale de **Stable** à **SAT** en expliquant, étant donné un graphe $G = (V, E)$ et un entier k, comment construire une formule $\varphi_{G,k}$ qui lui corresponde.

7. Expliquer comment construire une instance négative de **3-SAT** avec 10 variables.
8. L'instance de **SAT** suivante est-elle satisfaisable ?
   $$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)$$

Soit `stable(G,k)` un algorithme de résolution du problème de décision **Stable**.

9. Étant donné un graphe $G = (V, E)$ à n sommets, expliquer comment utiliser au plus $\lceil \log_2(n) \rceil$ appels à l'algorithme `stable` pour calculer la taille maximum d'un stable dans G.
10. Étant donné un graphe $G = (V, E)$ à n sommets, expliquer comment utiliser au plus $\lceil \log_2(n) \rceil + n^2$ appels à l'algorithme `stable` pour trouver un stable de taille maximum dans G.