# Complexité : modèle RAM et analyse des algorithmes

M1 Informatique Luminy 2024-25


| | |
|---|---|
| Kévin Perrot | <kevin.perrot@univ-amu.fr> |
| Pablo Concha-Vega | <pablo.concha-vega@lis-lab.fr> |
| Antonio E. Porreca | <antonio.porreca@univ-amu.fr> |
| Mathieu Roget | <mathieu.roget@univ-amu.fr> |


9hCM 9hTD 9hTP

NF=MAX(ET ; 0.3*CC+0.7*ET)

# Qu'est ce qu'une opération élémentaire ?

Jeu d'instructions :
`https://en.wikipedia.org/wiki/X86_instruction_listings`

Problèmes :

- c'est long
- valable seulement pour les processeurs x86

# Machine à mémoire adressable

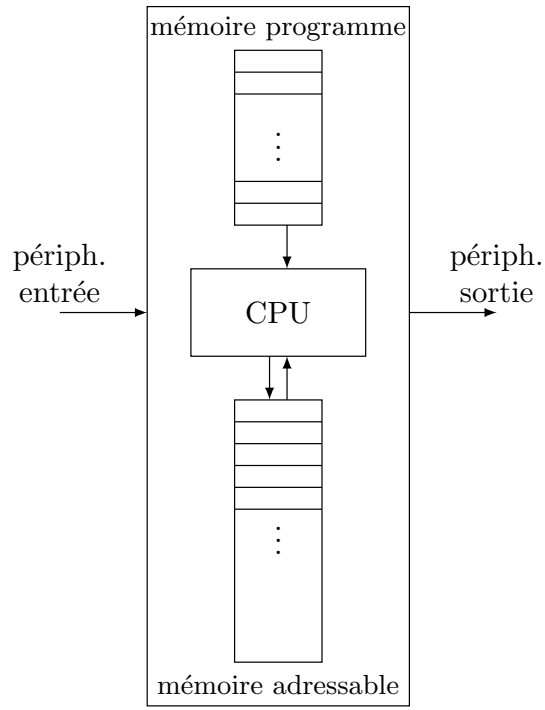
Le modèle RAM (Random Access Machine) est une version simplifiée d'architecture von Neumann.

[Cook Reckhow 1973]

Un programme opère avec un nombre potentiellement infini de registres $X_0, X_1, X_2 \ldots$ pouvant chacun contenir un entier arbitraire.

adresses

| Instructions ($i, j, k \in \mathbb{N}$) | Temps d'exécution | |
|---|---|---|
| | constant | logarithmique |
| $X_i \leftarrow C$ avec $C \in \mathbb{Z}$ | 1 | 1 |
| $X_i \leftarrow X_j + X_k$ | 1 | $\log \lvert X_j \rvert + \log \lvert X_k \rvert$ |
| $X_i \leftarrow X_j - X_k$ | 1 | $\log \lvert X_j \rvert + \log \lvert X_k \rvert$ |
| $X_i \leftarrow X_{X_j}$ | 1 | $\log \lvert X_j \rvert + \log \lvert X_{X_j} \rvert$ |
| $X_{X_i} \leftarrow X_j$ | 1 | $\log \lvert X_i \rvert + \log \lvert X_j \rvert$ |
| `TRA` $m$ si $X_j > 0$ | 1 | $\log \lvert X_j \rvert$ |
| `READ` $X_i$ | 1 | $\log \lvert$entrée$\rvert$ |
| `PRINT` $X_i$ | 1 | $\log \lvert X_i \rvert$ |




Adressages indirects nécessaires pour qu'un programme fixé puisse accéder à un nombre non borné de registres (en fonction de l'entrée).

# Universalité du modèle RAM

**Théorème** [Cook Reckhow 1973]**.**
Le modèle RAM est équivalent aux machines de Turing.

- Une MTD qui s'exécute en temps $\mathcal{O}(T(n))$
  peut être simulée par une RAM en temps $\mathcal{O}(T(n)\log T(n))$.
- Une RAM qui s'exécute en temps $\mathcal{O}(T(n))$
  peut être simulée par une MTD en temps $\mathcal{O}(T(n)^2)$.

**Thèse d'invariance** [van Emde Boas 1990]**.**
Les modèles « raisonnables » de machines peuvent se simuler les uns les autres avec :

- un surcoût en temps polynomial, et
- un surcoût en espace qui est un facteur constant.

# Analyse haut-niveau du pseudo-code

## Algorithmes itératifs

Instructions élémentaires en temps $\mathcal{O}(1)$

- Déclarations de variable, affectations `int x, x=10`
- Accès à la valeur stockée dans une case de tableau `t[5]`
- Comparaison de variables de types simples `x==y, x<y`
- Opérations logiques `&&, ||, !`
- Opérations arithmétiques `+, *, /, %`

pour des entiers pas trop grands

Branchements conditionnels : `if-then-else`

- Temps maximum des deux branches (pire cas)

Un algorithme sans boucle s'éxécute en temps $\mathcal{O}(1)$.

# Analyse haut-niveau du pseudo-code

## **Algorithmes itératifs** (suite)

Boucles : `for, while`

- Avec quels outils théoriques analyse-t-on les boucles ?
  Invariant de boucle (correction)
  Variant de boucle (terminaison)

- Somme des temps de chaque itération, test inclus $(+1)$.

$\rightsquigarrow$ Produit si le temps de passage est le même pour chaque itération.

$\Rightarrow$ Il faut tâcher d'identifier le nombre d'itérations de chaque boucle.

$\Rightarrow$ Privilégier les boucles `for` plutôt que `while`.

Attention à la modification des itérateurs dans les boucles : c'est obscur !

Code C :

```c
for(int i=0; i<100; i=i+1){
    printf("%d\n",i);
    i=i*2;
}
```

Code Python :

```python
for i in range(100):
    print(i)
    i=i*2
```

Réfléchir avant de coder :

```
int res=0; for(int i=1; i<=n; i++){ res += i; }   ≡   int res = n*(n+1)/2;
int res=0; for(int i=0; i<n; i++){ res += 2*i+1; }   ≡   int res = n*n;
```

# Analyse haut-niveau du pseudo-code

## **Algorithmes itératifs** (exemples de boucles)

```
pour i de 1 à n faire:
    pour j de 1 à n faire:
        O(1)
```

↪ Complexité ? $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} n = n\sum_{i=1}^{n} 1 = n^2$

```
pour i de 1 à n faire:
    pour j de 1 à i faire:
        O(1)
```

↪ Complexité ? $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \in \Theta(n^2)$

```
pour i de 1 à n faire:
    pour j de 1 à i*i faire:
        O(1)
```

↪ Complexité ? $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6} \in \Theta(n^3)$

```
pour i de 1 à n faire:
    pour j de 1 à i faire:
        pour k de 1 à j faire:
            O(1)
```

↪ Complexité ? $\sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} \in \Theta(n^3)$

```
pour tout nombre sur n bits faire:
    O(1)
```

↪ Complexité ? $2^n$

```
pour tout S' ⊆ S faire:
    O(1)
```

↪ Complexité ? $2^n$ avec $n = |S|$

```
pour tout S' ⊆ S avec |S'| = k faire:
    O(1)
```

↪ Complexité ? $\binom{n}{k}$ avec $n = |S|$

$(\frac{n}{k})^k \leq \binom{n}{k} \leq (\frac{ne}{k})^k < 2^n$

```
pour toute permutation L de S faire:
    O(1)
```

↪ Complexité ? $n!$ avec $n = |S|$

```
pour i de 1 à n faire:
    pour j de 1 à log2(i) faire:
        O(1)
```

↪ Complexité ? $\sum_{i=1}^{n} \log(i) = \log(\prod_{i=1}^{n} i) = \log(n!)$

$\in \Theta(n \log n)$ par la formule de Stirling :
$\log_2(n!) = n\log_2 n - n\log_2 e + \mathcal{O}(\log_2 n)$

*Concrete Mathematics*, Graham, Knuth, Patashnik, 1994

# Analyse haut-niveau du pseudo-code

## **Algorithmes itératifs** (exemple d'algorithme)

```
entrée : n un entier positif
res = 0
si n%2 == 0 alors:
    pour i de 1 à n faire:
        B = nouveau tableau de taille i
        pour j de 1 à i faire:
            B[j] = 0
        j = 1
        res++
        tant que j <= i faire:
            si B[j] == 0 alors:
                B[j] = 1
                j = 1
                res++
            sinon:
                B[j] = 0
                j++
sinon:
    P = nouveau tableau de taille n
    q = 1
    pour i de 1 à n faire:
        P[i] = i
        q = q*i
    pour i de 1 à q faire:
        res++
        j = n-1
        tant que P[j] > P[j+1] faire:
            j--
        m = j+1
        pour k de j+2 à n faire:
            si P[m] > P[k] > P[j] alors:
                m = k
        échanger P[j] et P[m]
        pour k de 0 à (n-j+1)/2 faire:
            échanger P[j+1+k] et P[n-k]
retourne res
```

↪ Complexité ? $\mathcal{O}((n+1)!)$ et $\Omega(n!)$ car $2^n < n!$ quand $n \geq 4$.

- $n$ pair ou impair ? maximum dans le pire cas.
- `alors` ? `B` compte sur $i$ bits : $\sum_{i=1}^{n} \Theta(i) + \Theta(2^i) = \Theta(n^2) + \Theta(2^{n+1}) \in \Theta(2^n)$.
- `sinon` ? `P` énumère les permutations de $\{1, \ldots, n\}$ : $\Theta(n) + \Theta(n!) \cdot \mathcal{O}(n) \in \mathcal{O}((n+1)!)$ et $\Omega(n!)$.

Remarque : quand vous écrivez le code, vous savez ce que vous faites, commentez !

# Analyse haut-niveau du pseudo-code

## Algorithmes récursifs

Somme des temps de chaque appel récursif.

On doit résoudre une relation de récurrence.

Deux exemples :

```
let rec factorial n = match n with
| 0 -> 1
| 1 -> 1
| _ -> n * (factorial (n - 1));;
```

↪ Complexité ? $T(n) = T(n-1) + \mathcal{O}(1)$ avec $T(1) = 1$ $\quad 1, 2, 3, 4, \ldots$ deviner $T(n) = n$
et vérifier par induction : $T(1) = 1$, $T(n) = T(n-1) + 1 = n - 1 + 1 = n$ ✓ donc $\mathcal{O}(n)$.

```
let rec fibonacci n = match n with
| 0 -> 0
| 1 -> 1
| _ -> (fibonacci (n-1)) + (fibonacci (n-2));;
```

↪ Complexité ? $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + \mathcal{O}(1)$ avec $T(0) = T(1) = 1$ $\quad 1, 1, 3, 5, 9, 15, \ldots$
$\leq 2\,T(n-1) + \mathcal{O}(1)$ avec $T(1) = 1$ $\quad (1), 1, 3, 7, 15, \ldots$ deviner $T(n) = 2^n - 1$ ✓ donc $\mathcal{O}(2^n)$.
$\geq 2\,T(n-2) + \mathcal{O}(1)$ avec $T(0) = 1$ $\quad 1, ?, 3, ?, 7, ?, 15, \ldots$
$= 4\,T(n-4) + 2 + 1 = 8\,T(n-6) + 4 + 2 + 1 = 16\,T(n-8) + 8 + 4 + 2 + 1$
deviner $T(n) = 2^k\,T(n-2k) + 2^k - 1$
vérifier $\quad = 2^k(2T(n-2k-2)+1) + 2^k - 1 = 2^{k+1}\,T(n-2(k+1)) + 2^{k+1} - 1$ ✓
$T(0)$ atteint quand $k = \frac{n}{2}$ donc $T(n) \geq 2^{\frac{n}{2}} \underbrace{T(0)}_{1} + 2^{\frac{n}{2}} - 1$ donc $\Omega(2^{\frac{n}{2}}) = \Omega(\sqrt{2}^n)$.

# Analyse haut-niveau du pseudo-code

## **Algorithmes récursifs** (suite)

### Deviner et Vérifier :

`https://oeis.org/` ♡

- à partir des valeurs numériques, ou
- à partir des expressions substituées.

Récurrences linéaires :

$$T(n) = a_1\, T(n-1) + a_2\, T(n-2) + \ldots + a_k\, T(n-k) + f(n)$$

(avec conditions initiales) si $f(n) = 0$ alors homogène sinon hétérogène

Suite arithmétique : $T(n) = a + T(n-1)$ donne $T(n) = a\,n + T(0) \in \Theta(n)$.

Linéaire simple : $T(n) = T(n-1) + f(n)$ donne $T(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i)$.

Suite géométrique : $T(n) = a\,T(n-1)$ avec $a > 1$ donne $T(n) = a^n\,T(0) \in \Theta(a^n)$.

Linéaire homogène : $T(n) = a_1\,T(n-1) + a_2\,T(n-2) + \ldots + a_k\,T(n-k)$ méthode :

- deviner $x^n$ donne $x^n = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_k x^{n-k}$ ;
- diviser par $x^{n-k}$ donne $x^k = a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \cdots + a_{k-1} x + a_k$ ;

↪ équation caractéristique de la récurrence, ses solutions sont des valeurs possibles pour $x$ ;

- une racine $r$ de multiplicité $m$ donne les solutions $x \in \{r^n, n\,r^n, n^2 r^n, \ldots, n^{m-1} r^n\}$ ;

**Théorème.** Si $f(n)$ et $g(n)$ sont solutions d'une récurrence linéaire homogène,
alors $h(n) = s\,f(n) + t\,g(n)$ est également solution pour tous $s, t \in \mathbb{R}$.

↪ donc on doit trouver la bonne combinaison linéaire correspondant à nos conditions initiales.

On peut montrer que `fibonacci` est en $\Theta(\varphi^n)$ avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

# Analyse haut-niveau du pseudo-code

## **Algorithmes récursifs** (suite)

OpenMIT cours "Maths for CS" chap. 10 "Recurrences"

### Résoudre une relation de récurrence peut être complexe :

```
int bibi(int n, int k){
    if(k==0 || k==n){ return 1; }
    else{ return bibi(n-1,k-1) + bibi(n-1,k); }
```

$T(n,k) = T(n-1,k-1) + T(n-1,k) + \mathcal{O}(1)$ donne $T(n,k) \in \Theta(\binom{n}{k})$

### Résoudre une relation de récurrence peut être très très complexe :

$T(n+1) = (\frac{7}{4}T(n) + \frac{1}{2}) - (\frac{5}{4}T(n) + \frac{1}{2})(-1)^{T(n)}$ itère Collatz de $T(0)$

### Algorithmes basés sur le principe *diviser-pour-régner* :

$$T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$$

La récursion s'arrête quand $n$ est très petit, où l'instance est résolue en temps constant.

Deux exemples :

Recherche dichotomique : $T(n) = ?1\ T(n/2) + \mathcal{O}(1)$ donc $\mathcal{O}(\log n)$.

Tri fusion : $T(n) = ?2\ T(n/2) + \Theta(n)$ donc...

# Analyse haut-niveau du pseudo-code

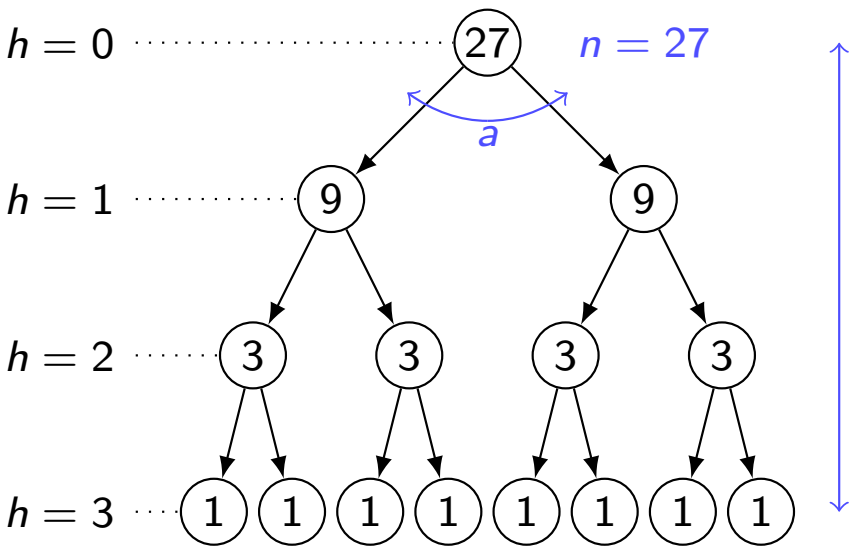
**Algorithmes récursifs** (suite) : *diviser-pour-régner*

**Master théorème.** Soit $a \geq 1$, $b > 1$, $c = \log_b a$, $T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$.

1. Si $f(n) \in \mathcal{O}(n^{c-\epsilon})$ pour un certain $\epsilon > 0$, alors $T(n) \in \Theta(n^c)$.
2. Si $f(n) \in \Theta(n^c)$, alors $T(n) \in \Theta(n^c \log_b n)$.
3. Si $f(n) \in \Omega(n^{c+\epsilon})$ pour un certain $\epsilon > 0$, et si $a\,f(n/b) \leq d\,f(n)$ pour $d < 1$ et $n$ suffisamment grand, alors $T(n) \in \Theta(f(n))$.

Remarque : dans certains cas le théorème ne permet pas de conclure.

Arbre des appels récursifs pour $2\,T(n/3) + f(n)$ :




Racine coût : $f(n)$ $\rightsquigarrow$ cas 3

Feuilles quantité : $a^{\log_b n} = \ldots = n^c$
coût : $f(1) \in \Theta(1)$
coût total : $\Theta(n^c)$ $\rightsquigarrow$ cas 1

Noeuds de hauteur $h$ quantité : $a^h$
coût : $f(\frac{n}{b^h})$

coût total de l'arbre :

$$\sum_{h=0}^{\log_b n} a^h\, f(\tfrac{n}{b^h}) = \ldots \in \Theta(n^c \log_b n) \quad \rightsquigarrow \text{cas 2}$$

$\uparrow$ $f(n) \in \Theta(n^c)$

# Analyse haut-niveau du pseudo-code

## **Algorithmes récursifs** (exemples) : *diviser-pour-régner*

**Master théorème.** Soit $a \geq 1$, $b > 1$, $c = \log_b a$, $T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$.

1. Si $f(n) \in \mathcal{O}(n^{c-\epsilon})$ pour un certain $\epsilon > 0$, alors $T(n) \in \Theta(n^c)$.
2. Si $f(n) \in \Theta(n^c)$, alors $T(n) \in \Theta(n^c \log_b n)$.
3. Si $f(n) \in \Omega(n^{c+\epsilon})$ pour un certain $\epsilon > 0$, et si $a\,f(n/b) \leq d\,f(n)$ pour $d < 1$ et $n$ suffisamment grand, alors $T(n) \in \Theta(f(n))$.

Tri fusion : $T(n) = 2\,T(n/2) + \Theta(n)$ donc...
$a = 2$, $b = 2$, $c = \log_2 2 = 1 \implies$ cas 2 $\implies T(n) \in \Theta(n \log n)$.

Recherche *diviser-pour-régner* du maximum d'un tableau $T$ de $n$ éléments :

```
maximum(T): retourner maximum2(T,1,n)
maximum2(T,i,j):
    si i == j alors retourner i
    si i+1 == j alors retourner T[i]>T[j] ? i : j
    m1 = maximum2(T,i,i+(j-i)/2)
    m2 = maximum2(T,i+(j-i)/2+1,j)
    retourner T[m1]>T[m2] ? m1 : m2
```

$T(n) = ?2\,T(n/2) + \mathcal{O}(1)$ donc... $a = 2$, $b = 2$, $c = \log_2 2 = 1$, cas 1, $T(n) \in \Theta(n)$.

Couper en 3 la recherche du maximum ? $a = 3$, $b = 3$, $c = \log_2 2 = 1$, cas 1, $T(n) \in \Theta(n)$.

Théorème de Akra-Bazzi (plus général que le Master théorème).

# Inexistence d'une méthode générale à suivre « bêtement »

Désolé...

Déterminer la complexité d'un algorithme est un problème indécidable.

Par le théorème de Rice car non-trivial (par exemple pour décider si $A$ est $\mathcal{O}(n)$, il existe $A_1$,$A_2$ pour lesquels la réponse est « oui »,« non » respectivement).

Donc il n'existe pas de méthode automatique et toujours correcte pour calculer la complexité d'un programme.

$\Longrightarrow$ En géréral, vous pourrez analyser la complexité de vos programmes.

$\Longrightarrow$ Pour l'analyse de complexité (et de correction) on a intérêt à garder un **code clair, organisé, commenté**.

$\Longrightarrow$ attention aux instructions coûteuses cachées ! à éviter quand on étudie

```
if tab.contains(i) then    tab.sort()    int m = tab.max()
si i appartient à Q alors    si M ne s'arrête pas alors...
```

# Compilateurs, comparatif

Les compilateurs réalisent des optimisations qui peuvent améliorer le temps de calcul plutôt à un facteur multiplicatif près, par exemple :

- Vectorization (plusieurs opérations en une)
- Loop unrolling (économise les manipulations d'indices)
- Loop-invariant code motion (sortir des lignes de code des boucles)

https://en.wikipedia.org/wiki/Optimizing_compiler#Common_themes

**Comparatif des langages de programmation** (temps, énergie, mémoire)

https://haslab.github.io/SAFER/scp21.pdf (page 16)

https://doi.org/10.1016/j.scico.2021.102609

$a^{\log_b n} = (b^{\log_b a})^{\log_b n} = n^{\log_b a} = n^c$

$$\sum_{h=0}^{\log_b n} a^h f(\tfrac{n}{b^h}) = \sum_{h=0}^{\log_b n} a^h \alpha(\tfrac{n}{b^h})^c = n^c \sum_{h=0}^{\log_b n} \alpha(\tfrac{a}{b^c})^h = n^c \sum_{h=0}^{\log_b n} \alpha(\tfrac{a}{a})^h = n^c \alpha \log_b n$$

$\texttt{res}= 2^{n+1} + n!$