TD 04 – Goldbach, Collatz, ni r.e. ni co-r.e.

Exercice 1. *Arrêt et conjectures mathématiques*

La conjecture de Goldbach, formulée en 1742 et toujours ouverte, énonce que tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers.

1. Donner un programme qui s'arrête si et seulement si la conjecture de Goldbach est fausse (ce programme n'a pas d'entrée).

On peut déduire de votre réponse précédente que si l'on savait décider le problème de l'arrêt, alors on saurait décider si la conjecture de Goldbach est vraie ou fausse.

2. Peut-on néanmoins semi-décider si cette conjecture est vraie ? ou bien si elle est fausse ?

La suite de Collatz (ou suite de Syracuse) d'un entier $n > 0$ est la suite infinie $(f^i(n))_{i\in\mathbb{N}}$ avec

$$\begin{aligned} f :\ & \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ & n \mapsto \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3n+1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

La conjecture de Collatz, formulée en 1937 et toujours ouverte, énonce que $\forall\, n > 0 : \exists\, i \geq 0 : f^i(n) = 1$, c'est-à-dire que la suite de Collatz de tout entier converge vers la boucle $1, 4, 2$.

3. Proposer un algorithme liant le problème de l'arrêt et la conjecture de Collatz.

Exercice 2. *Réductions ?*

✎ Comparer à l'aide de réductions (si possible) les quatre langages suivants :

$$L_{\exists\downarrow} = \{\langle M\rangle \mid \exists w : M(w)\downarrow\} \qquad L_{\forall\downarrow} = \{\langle M\rangle \mid \forall w : M(w)\downarrow\}$$
$$L_{\exists\uparrow} = \{\langle M\rangle \mid \exists w : M(w)\uparrow\} \qquad L_{\forall\uparrow} = \{\langle M\rangle \mid \forall w : M(w)\uparrow\}$$