
TD/TP 02 – Automates cellulaires élémentaires

Exercice 1.

ECA

Un automate cellulaire élémentaire (*elementary cellular automata*, ECA) a dimension $d = 1$, états $\{0, 1\}$ et voisinage $(-1, 0, 1)$.

1. Combien y a-t-il de fonctions locales d'ECA différentes ?

On numérote la règle f par $\sum_{x \in \{0,1\}^3} 2^{(x)_2} f(x)$ où $(x)_2$ est l'entier x en base 2.

2. Quelle est la fonction locale de la règle numéro 170 appelée *left shift* ?
3. Dessiner le diagramme espace-temps de la règle 170 à partir de la configuration spatialement périodique $(10110)^\omega$, pour 5 étapes. Que peut-on observer ?
Conseil : utiliser une feuille cadrillée.
4. Comment décrire la dynamique de 170 ? En français, puis en langage mathématique.
5. Quelle est la fonction locale de la règle numéro 240 appelée *right shift* ?
6. Dessiner le diagramme espace-temps de la règle 240 à partir de la configuration spatialement périodique $(10110)^\omega$, pour 5 étapes. Que peut-on observer ?
7. Comment décrire la dynamique de 240 ?

Deux règles locales d'ECA f, g dont les fonctions globales sont respectivement F, G sont *topologiquement conjuguées* lorsqu'il existe une fonction bijective $\varphi : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ telle que $\varphi \circ F = G \circ \varphi$.

8. Montrer que si $\forall x \in \{0, 1\}^3 : f(x_1, x_2, x_3) = g(x_3, x_2, x_1)$ alors F et G sont conjuguées.
9. Montrer que si $\forall x \in \{0, 1\}^3 : f(x_1, x_2, x_3) = \neg g(\neg x_1, \neg x_2, \neg x_3)$ alors F et G sont conjuguées.

Ces deux types de conjugaison donnent 88 classes d'équivalences d'ECA.

10. Quelles sont les éléments de la classe d'équivalence de 204 ?
11. Quelles sont les éléments de la classe d'équivalence de 152 ?

Il y a 83 classes d'équivalence d'ECA à conjugaison près (Epperlein, 2015).

http://doi.org/10.1007/978-3-662-47221-7_8

Exercice 2.

Simulateur

Dans le langage de programmation de votre choix, écrire le code d'un simulateur d'ECA.

-  Sur des configurations finies (spatialement périodiques ou ultimement périodiques).
-  Séparer la vue (l'affichage) du modèle (le calcul des étapes à partir de la règle locale).
-  Pour commencer, utiliser un affichage simple dans le terminal.
-  L'efficacité n'est pas importante, vous pouvez avoir une fonction `step(rule, n, x)` qui retourne l'image de x (un tableau de n bits) pour la règle `rule` (un tableau de 8 bits).
-  Ajouter une fonctionnalité de génération aléatoire de configuration.

Exercice 3.

60, 90

1. Lancer la règle 60 depuis le motif 0^*10^* , que peut-on observer? Le démontrer.
2. Lancer la règle 90 depuis le motif 0^*10^* , que peut-on observer? Le démontrer.
3. Montrer que la règle 90 est surjective (n'a pas de jardin d'Éden).

Du théorème de Moore-Myhill (*Garden of Eden theorem*), on déduit que la règle 90 est injective sur les configurations finies.

4. Montrer que la règle 90 n'est pas injective.

Le ou exclusif (xor, somme modulo 2) en dimension 1 peut se généraliser en B_{1357}/S_{1357} en dimension 2. Il s'agit d'un automate cellulaire dont tout motif est un *réplicateur*.

Exercice 4.

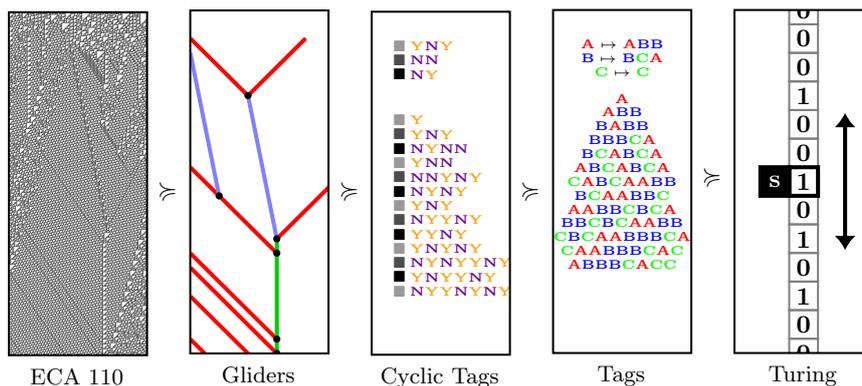
54,110

1. Lancer la règle 54 depuis le motif 0^*10^* , que peut-on observer?
2. Lancer la règle 54 depuis le motif $(0001)^*$, que peut-on observer?
3. Lancer la règle 54 depuis une grande configuration aléatoire, que peut-on observer?
4. Lancer la règle 110 depuis le motif 0^*10^* , que peut-on observer?
5. Lancer la règle 110 depuis une grande configuration aléatoire, que peut-on observer?

Matthew Cook a démontré en 2004 que la règle 110 est Turing-complète.

<https://doi.org/10.25088/ComplexSystems.15.1.1>

Figure Pacôme Perrotin



6. La règle 54 est-elle Turing-complète? (Ne pas passer trop de temps sur cette question.)

Exercice 5.

184

1. Lancer la règle 184 depuis la configuration 0^*10^* , que peut-on observer?
2. Lancer la règle 184 depuis la configuration 1^*01^* , que peut-on observer?
3. Lancer 184 depuis les configurations $0^*1^n0^*$ pour n croissant, que peut-on observer?
4. Lancer la règle 184 depuis une grande configuration aléatoire, que peut-on observer?
5. Expliquer pourquoi 184 est appelée *règle du trafic auto* et *règle particule-antiparticule*.

Exercice 6.

30

1. Lancer la règle 30 depuis la configuration 0^*10^* , que peut-on observer?
2. Lancer la règle 30 depuis une grande configuration aléatoire, que peut-on observer?
3. Essayer de gagner \$10 000. <https://www.rule30prize.org/>