# DM 02 – Turing-complétude des automates cellulaires 1D

**Consignes :**
Travail individuel.
À rendre le mardi 15 avril 2025.

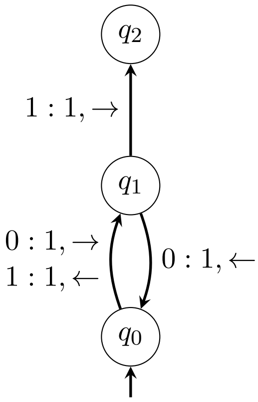
**Exercice 1.** *Simulation*

En dimension $d = 1$, avec états $Q$ et voisinage $N \subset \mathbb{Z}$, un automate cellulaire de règle locale $f : Q^N \to Q$ et règle globale $F : Q^{\mathbb{Z}} \to Q^{\mathbb{Z}}$ est dit *quiescent* lorsqu'il existe un état $q \in Q$ tel que $f(q, q, \ldots, q) = q$. On dit alors qu'une configuration $c \in Q$ est *finie* lorsqu'elle contient un nombre fini de cellules qui ne sont pas dans l'état $q$. On peut ainsi avoir une déscription finie de $c$ en donnant ses états sur un intervalle fini $I \subset \mathbb{Z}$, et en considérant que toutes les autres cellules sont dans l'état $q$.

On dit qu'un système dynamique $G : Y \to Y$ simule un système dynamique $F : X \to X$ lorsqu'il existe une transformation injective $\varphi : X \to Y$ telle que $G \circ \varphi = \varphi \circ F$ sur $X$.

**1.** En vous inspirant des deux diagrammes espace-temps ci-dessous, montrer formellement que toute machine de Turing déterministe peut être simulée par un automate cellulaire quiescent en dimension $d = 1$.

Indication : une machine de Turing déterministe $M$ est définie par un alphabet de ruban $\Gamma$ dont un symbole blanc $0 \in \Gamma$, un ensemble d'états $Q$ dont un état initial $q_0 \in Q$, et une fonction de transition $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$. On lui associe un système dynamique $M : Q \times \Gamma^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z} \to Q \times \Gamma^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}$ sur l'espace de ses configurations. Le calcul de la machine de Turing s'arrête quand aucune transition n'est définie dans $\delta$. Dans le systèmes dynamiques $M$, on considère que toute configuration d'arrêt est un point fixe.




temps

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | $q_2$ |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | $q_1$ |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | $q_0$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | $q_1$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | $q_0$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | $q_1$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $q_0$ |

temps

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(0,*)$ | $(0,*)$ | $(1,*)$ | $(1,*)$ | $(1,q_2)$ | $(1,*)$ | $(0,*)$ | $(0,*)$ |
| $(0,*)$ | $(0,*)$ | $(1,*)$ | $(1,*)$ | $(1,q_2)$ | $(1,*)$ | $(0,*)$ | $(0,*)$ |
| $(0,*)$ | $(0,*)$ | $(1,*)$ | $(1,q_1)$ | $(1,*)$ | $(1,*)$ | $(0,*)$ | $(0,*)$ |
| $(0,*)$ | $(0,*)$ | $(0,q_0)$ | $(1,*)$ | $(1,*)$ | $(1,*)$ | $(0,*)$ | $(0,*)$ |
| $(0,*)$ | $(0,*)$ | $(0,*)$ | $(0,q_1)$ | $(1,*)$ | $(1,*)$ | $(0,*)$ | $(0,*)$ |
| $(0,*)$ | $(0,*)$ | $(0,*)$ | $(0,*)$ | $(1,q_0)$ | $(1,*)$ | $(0,*)$ | $(0,*)$ |
| $(0,*)$ | $(0,*)$ | $(0,*)$ | $(0,*)$ | $(1,*)$ | $(0,q_1)$ | $(0,*)$ | $(0,*)$ |
| $(0,*)$ | $(0,*)$ | $(0,*)$ | $(0,*)$ | $(0,q_0)$ | $(0,*)$ | $(0,*)$ | $(0,*)$ |

Gauche : une machine de Turing dont les transitions sont étiquetées
« symbole lu : symbole à écrire, déplacement ».
Centre : portion du diagramme espace-temps de cette machine de Turing sur l'entrée vide.
Droite : portion du diagramme espace-temps d'un automate cellulaire en dimension $d = 1$ sur les états $\Gamma \times (Q \cup \{*\})$.