M2 IND : MOCANA 2023 - 2024 ①

ÉVALUATION = PRÉSENTATIONS D'ARTICLES.

11" KEVIN , 1" GIUSEPPE , 8" ENRICO .

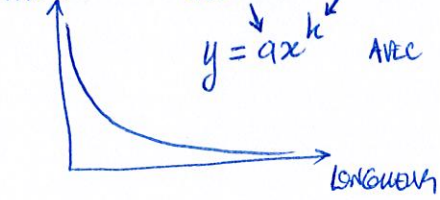
PILES DE SABLE

PARADIGME : $\underset{\text{" SIMPLE "}}{\overset{\text{RÈGLE}}{\text{LOCALE}}} \longrightarrow \underset{\text{" COMPLEXE "}}{\overset{\text{COMPORTEMENT}}{\text{GLOBAL}}}$.

- BAK, TANG, WIESENFELD : " SELF-ORGANIZED CRITICALITY : AN EXPLANATION OF $1/f$ NOISE " 1987.
- DHAR : " SELF-ORGANIZED CRITICAL STATE OF SANDPILE AUTOMATON MODELS " 1990.

JS - SANDPILE : 100 × 100 .
COULEURS, RÈGLE, BORDS.
+4 +4 +4 +4 .
ALL-4 ?
ALL-5 ?
ALL-6 ?

SOC : L'AJOUT DE GRAINS À DES POSITIONS ALÉATOIRES AMÈNE LE SYSTÈME DANS UN ÉTAT CRITIQUE OÙ LA DISTRIBUTION DES LONGUEURS DES AVALANCHES SUIT UNE LOI DE PUISSANCE



$y = \overset{\text{CONSTANTE DE PROPORTIONNALITÉ}}{\overset{\downarrow}{a}} x^{\overset{\text{EXPOSANT}}{\overset{\swarrow}{k}}}$ AVEC $a > 0$ ET $k < 0$.

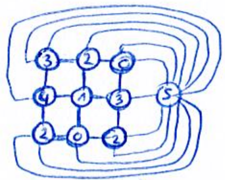
- INVARIANCE D'ÉCHELLE :

$$f(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{CHANGEMENT} \\ \text{D'ÉCHELLE}}}{cx}) = a(cx)^k = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{COEFFICIENT}}}{c^k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{MÊME} \\ \text{EXPOSANT.}}}{f(x)}$$

- LOG-LOG PLOT = DROITE : $\log(y) = k.\log(x) + \log(a)$ AFFINE.

DEF : GRAPHE ORIENTÉ $G = (V, A)$ AVEC $s \in V$ UN PUITS GLOBAL : SOMMET ACCESSIBLE DEPUIS TOUT AUTRE SOMMET.

$\tilde{V} = V \setminus \{s\}$. $d^+(v), d^-(v), N^+(v), N^-(v)$.



CONFIGURATION $c : \tilde{V} \to \mathbb{N}$.

DYNAMIQUE

$$F : \mathbb{N}^{\tilde{V}} \to \mathbb{N}^{\tilde{V}} \text{ TELLE QUE } F(c)(v) = c(v) - d^+(v).H(c(v) - d^+(v)) + \sum_{u \in N^-(v)} H(c(u) - d^+(u))$$

AVEC $H(x) = 1$ SI $x \geqslant 0$ ET 0 SINON.

c EST STABLE LORSQUE $\forall v \in \tilde{V} : c(v) < d^+(v)$.

UN SOMMET TEL QUE $c(v) \geqslant d^+(v)$ EST ÉBOULÉ / TIRÉ.

CHIP-FIRING GAME.

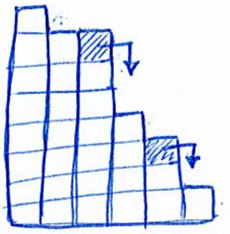
Q: EST-CE UN AUTOMATE CELLULAIRE ? ⚠ SUPPORT FINI ⚠ NOMBRE D'ÉTAT.

<u>REMARQUE</u> : INCOHÉRENCE PHYSIQUE : LA QUANTITÉ $c(v)$ EST UN MÉLANGE DE :

- HAUTEUR (NOMBRE DE GRAINS) QUAND ON DONNE AUX VOISINS
- PENTE (DÉRIVÉE DU NOMBRE DE GRAINS) QUAND ON TESTE LA STABILITÉ.

LES GRAINS PEUVENT " SAUTER ".

MAIS SUR $\mathbb{Z}$ ON A UNE INTERPRÉTATION EN 2D :



$\mathbb{Z}$

1	0	3	1	2	1

DIFFÉRENCES DE HAUTEUR.

<u>TERMINAISON</u> :

<u>THM</u> : $\forall c \in \mathbb{N}^{\tilde{V}} : \exists t \in \mathbb{N} : F^t(c) = F^{t+1}(c)$ (ET ALORS $\forall t' \in \mathbb{N} ; t' \geq t : F^t(c) = F^{t'}(c)$)

<u>PREUVE</u> : PAR L'ABSURDE, SI $\exists c \in \mathbb{N}^{\tilde{V}}$ QUI NE DEVIENT JAMAIS STABLE ALORS À CHAQUE $t \in \mathbb{N}$ IL EXISTE AU MOINS UN SOMMET DE $\tilde{V}$ INSTABLE.
$|\tilde{V}|$ FINI DONC $\exists v \in \tilde{V}$ QUI EST INSTABLE INFINIMENT SOUVENT.
LA QUANTITÉ DE GRAINS $\sum_{u \in \tilde{V}} c(u)$ EST FINIE, NE PEUT QUE DÉCROÎTRE, DÉCROÎT STRICTEMENT QUANT UN VOISIN DE s (DANS $\mathcal{N}^-(s)$) EST ÉBOULÉ, ET DOIT RESTER POSITIVE (≥ 0). DONC v NE PEUT PAS ÊTRE DANS $\mathcal{N}^-(s)$, NI DANS $\mathcal{N}^-(\mathcal{N}^-(s))$, ETC... ET COMME s EST UN PUITS GLOBAL, AUCUN $v \in \tilde{V}$ NE CONVIENT ↯. $\square$

ON NOTE c° LA CONFIGURATION STABLE OBTENUE À PARTIR DE c.

$$c^\circ = \lim_{t \to \infty} F^t(c) = F^{T(c)}(c)$$ AVEC $T(c)$ DONT ON PARLERA PLUS TARD.

MODE SÉQUENTIEL :

$$c \xrightarrow{v} c' \quad \text{ssi} \quad c(v) \geqslant d^+(v) \quad \text{ET} \quad c'(u) = \begin{cases} c(u) - d^+(u) & \text{si } u = v \\ c(u) + 1 & \text{si } u \in \mathcal{N}^+(v) \\ c(u) & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\to^*$ LA CLÔTURE RÉFLEXIVE ET TRANSITIVE DE $\to$.

$\equiv$ LA CLÔTURE SYMÉTRIQUE RÉFLEXIVE ET TRANSITIVE DE $\to$ (RELATION D'ÉQUIVALENCE).

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, "*"] & \\ c' \arrow[dr, dotted, "*"'] & & c'' \arrow[dl, dotted, "*"] \\ & c''' & \end{tikzcd}$$

THM : LA DYNAMIQUE SÉQUENTIELLE EST CONVERGENTE :

si $c \to^* c'$ ET $c \to^* c''$ ALORS $\exists c''' : c' \to^* c'''$ ET $c'' \to^* c'''$

COROLLAIRE : ON ATTEINT TOUJOURS LA MÊME CONFIGURATION STABLE c^0.

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ c' \arrow[dr, dotted] & & c'' \arrow[dl, dotted] \\ & c''' & \end{tikzcd}$$

PREUVE : ①. TERMINAISON : IDEM.

②. PROPRIÉTÉ DU DIAMANT : si $c \to c'$ ET $c \to c''$ ALORS $\exists c''' : c' \to c'''$ ET $c'' \to c'''$.

SOIT $u \neq v$ TELLES QUE $c \xrightarrow{u} c'$ ET $c \xrightarrow{v} c''$.

ALORS $c(u) \geqslant d^+(u)$ ET $c(v) \geqslant d^+(v)$

DONC $c''(u) \geqslant d^+(u)$ ET $c'(v) \geqslant d^+(v)$.

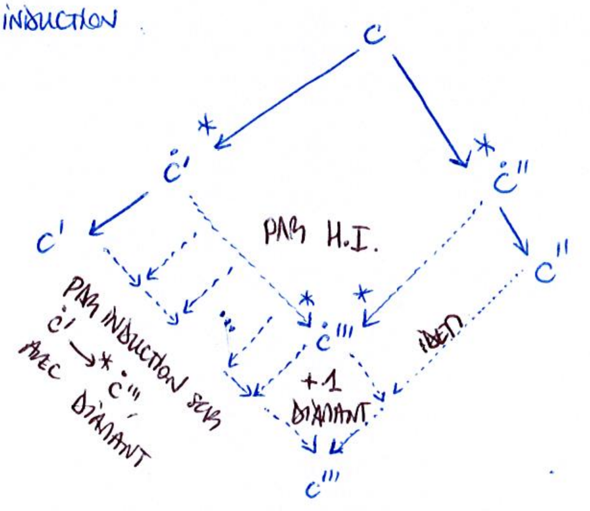
AINSI $c' \xrightarrow{v} c'''$ ET $c'' \xrightarrow{u} c'''$.

③. TERMINAISON ET DIAMANT $\Longrightarrow$ CONVERGENCE.

SOIENT c, c', c'' AVEC $c \to^* c'$ ET $c \to^* c''$.

PAR INDUCTION SUR LA PLUS LONGUE DES DEUX ÉVOLUTIONS :

- si $\emptyset$ ALORS $c = c' = c''$.
- INDUCTION



□

(PLUS TARD?) **HOURGLASS** : ⚠ SUPPORT INFINI : 1D ET 2D : DIAPOS + JS-SANDPILE (2D) + WIKIPEDIA 3e7

RMK : MATRICE LAPLACIENNE Δ DE $\tilde{G} = (\tilde{V}, A)$: $\underset{\text{(DIAGONAL)}}{\text{DEGRÉS}}$ − ADJACENCES ALORS $c \xrightarrow{v} c'$

$\Leftrightarrow c' = c - \underset{\text{(LIGNE)}}{\Delta_v}$.

<u>THM</u> : SOIT $G=(V,E)$ À n SOMMETS, m ARÊTES, ET DIAMÈTRE d. SOIT c ET $N=\sum_{v\in V} c(v)$.
NON ORIENTÉ ET SANS PUITS

[LOVÁSZ 1991] 1. SI $N > 2m-n$ ALORS c NE CONVERGE PAS VERS UNE CONFIGURATION STABLE.

2. SI $m \leqslant N \leqslant 2m-1$ ALORS IL EXISTE c QUI CONVERGE ET c QUI NE CONVERGE PAS.

3. SI $N<m$ ALORS c CONVERGE VERS UNE CONFIGURATION STABLE.

[TARDOS 1988] 4. SI c CONVERGE ALORS ELLE CONVERGE EN AU PLUS $\underset{O(n^4)}{2nmd}$ ÉTAPES SÉQUENTIELLES.

5. IL EXISTE G ET c TELS QUE c CONVERGE EN $\Theta(n^4)$ ÉTAPES.

<u>PREUVE</u> :

1. & 2. $\sum_{v\in V}(d(v)-1) = 2m-n$ EST LE NOMBRE MAXIMUM DE GRAINS SUR CHAQUE SOMMET DANS UNE CONFIGURATION STABLE.

POUR $N>2m-n$ IL EXISTERA TOUJOURS UN SOMMET INSTABLE.

POUR $N \leqslant 2m-n$ ON PEUT ENLEVER DES GRAINS À LA CONFIG. STABLE MAXIMUM.

2. CONSIDÉRONS UNE ORIENTATION ACYCLIQUE A DE G,

ET PLAÇONS $d_A^+(v)$ GRAINS SUR CHAQUE SOMMET POUR OBTENIR c. ON A $N=m$.

ALORS IL EXISTE UNE SOURCE s QUI PEUT ÊTRE TIRÉE ET $c \xrightarrow{s} c'$.

DE PLUS, INVERSER L'ORIENTATION DES ARÊTES DE s À $\mathcal{N}^+(s)$

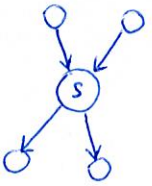
DONNE UNE ORIENTATION ACYCLIQUE A' TELLE QUE $c'(v)=d_{A'}^+(v)$ SUR CHAQUE SOMMET :

- $c'(s) = c(s) - d_A^+(s) = 0 = d_{A'}^+(v)$.
- $\forall v \in \mathcal{N}^+(s)$: $c'(v) = c(v)+1 = d_A^+(v)+1 = d_{A'}^+(v)$.
- POUR LES AUTRES SOMMETS ON A $c'(v)=c(v)=d_A^+(v)=d_{A'}^+(v)$.

ALORS ...

3. SOIT c AVEC $N<m$.

ON CONSIDÈRE UNE ORIENTATION ACYCLIQUE A ARBITRAIRE,



ET $$T = \sum_{v\in V} \max\{0, c(v)-d_A^+(v)\} \in \mathbb{N}.$$

SOIT $c \xrightarrow{s} c'$ ET L'ORIENTATION ACYCLIQUE A' OBTENUE EN INVERSANT L'ORIENTATION DES ARÊTES DE s À $\mathcal{N}_A^+(s)$. ON A $d_{A'}^+(s)=0$ DONC AUCUN CYCLE (ORIENTÉ) N'EST CRÉÉ.

DE PLUS $T \geqslant T'$ CAR :

$$c'(v) - d_{A'}^+(v) = \begin{cases} c(s)-d(s) = (c(s)-d_A^+(s)) \underbrace{-d(s)+d_A^+(s)}_{\text{DIMINUTION}} & \text{si } v=s \\ c(v)+1-d_A^+(v)-1 & \text{si } v\in\mathcal{N}_A^+(s) \\ c(v)\underbrace{+1}_{\text{AUGMENTATION}}-d_A^+(v) \quad \text{pour } |\mathcal{N}_A^-(s)| = d(s)-d_A^+(s) \text{ sommets} & \text{si } v\in\mathcal{N}_A^-(s) \\ c(v)-d_A^+(v) & \text{sinon.} \end{cases}$$

LA DIMINUTION EST TOUJOURS EFFECTIVE MAIS L'AUGMENTATION PEUT ÊTRE ABSORBÉE PAR LE max.

ON A a. $T > T' \Leftrightarrow \exists v \in N_A^-(s) : c(v) - d_A^+(v) < 0$ (+1 MANGÉ PAR max) [PAS UTILE]

b. $T = T' \Rightarrow \{v \mid c(v) - d_A^+(v) < 0\} = \{v \mid c'(v) - d_{A'}^+(v) < 0\}$

SI L'ÉVOLUTION EST ∞ ALORS $\exists v$ ÉBOULÉE ∞ SOUVENT, ET COMME IL N'Y A PAS DE PUITS, TOUT v EST ÉBOULÉ ∞ SOUVENT. PUISQUE $\{v \mid c(v) - d_A^+(v) < 0\}$ SONT DES SOMMETS STABLES DANS c, IL DOIT CHANGER ET ON NE PEUT PAS ÊTRE ∞ SOUVENT DANS LE CAS b. MAIS $(\mathbb{N}, \geqslant)$ EST UN ORDRE BIEN FONDÉ.

4. FAIT 1 : LES NOMBRES DE FOIS QUE SONT TIRÉS DEUX SOMMETS ADJACENT DIFFÈRENT D'AU PLUS N.

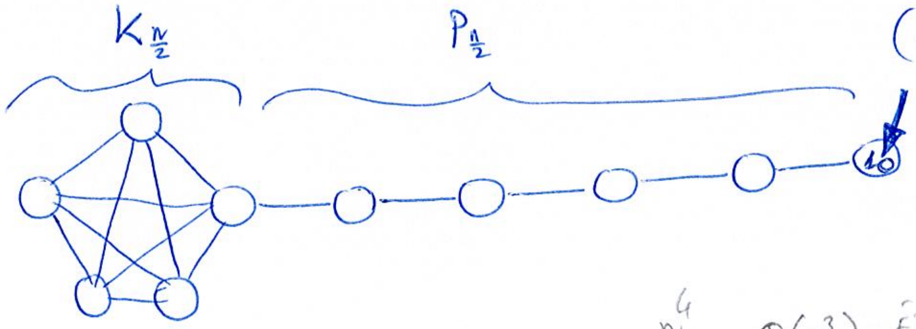
PREUVE : SOIT $\{u, v\} \in E$ AVEC u TIRÉ i FOIS ET v TIRÉ j FOIS, $i < j$. SOIT $U \subseteq V$ LES SOMMETS TIRÉS AU PLUS i FOIS : $u \in U$ ET $v \notin U$. POUR TOUTE ARÊTE ENTRE U ET $V \setminus U$, PLUS DE GRAINS ONT ÉTÉ DÉPLACÉS DE $V \setminus U$ VERS U QUE DE U VERS $V \setminus U$ (LES $\neq$ SONT TOUTES $\geqslant 0$ ET $\Sigma \leqslant N$). CETTE QUANTITÉ EST $j - i$ POUR $\{u, v\}$, ET ELLE NE PEUT PAS EXCÉDER N. ◆

FAIT 2 : SI C CONVERGE ALORS IL EXISTE UN SOMMET QUI N'EST PAS TIRÉ.

PREUVE : PAR L'ABSURDE, SOIT v LE SOMMET QUI N'A PAS ÉTÉ TIRÉ DEPUIS LE PLUS LONG TEMPS AVANT LA TERMINAISON. TOUS SES VOISINS ONT ÉTÉ TIRÉS, DONC IL A REÇU $d(v)$ GRAINS ET EST INSTABLE $\lightning$ ◆.

SOIT $v \in V$ DONNÉ PAR LE FAIT 2 (TIRÉ 0 FOIS). PAR APPLICATION ITÉRÉE DU FAIT 1, UN SOMMET À DISTANCE d' EST TIRÉ AU PLUS Nd' FOIS. DONC TOUT SOMMET EST TIRÉ AU PLUS Nd FOIS, ET ON A AU PLUS nNd ÉTAPES SÉQUENTIELLES. ENFIN, D'APRÈS 2. ON A $N < 2m$.

5. $(n = 10)$



$\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 2n$ GRAINS.

$\frac{n^4}{32} + O(n^3)$ ÉTAPES.

☐

(LÀ ?) HOURGLASS

STRUCTURE ALGÉBRIQUE.

OPÉRATION (LOI DE COMPOSITION INTERNE) : $c \oplus c' = (c+c')^\circ$

AVEC $\forall v \in \tilde{V} : (c+c')(v) = c(v) + c'(v)$.

$$\mathcal{C}_{STAB} = \{ c \in \mathbb{N}^{\tilde{V}} \mid \forall v \in \tilde{V} : c(v) < d^+(v) \}.$$

DEF :

- GROUPE
  - MONOÏDE
    - SEMI-GROUPE
      - CLÔTURE
      - ASSOCIATIVITÉ
    - IDENTITÉ
  - INVERSE
- COMMUTATIVITÉ

THM : $(\mathcal{C}_{STAB}, \oplus)$ EST UN MONOÏDE COMMUTATIF

PREUVE : CLÔTURE PAR DÉFINITION DE $\oplus$.

ASSOCIATIVITÉ : $(c \oplus c') \oplus c'' = (c+c'+c'')^\circ = c \oplus (c' \oplus c'')$

IDÉE : L'AJOUT DE GRAINS N'EMPÊCHE PAS DE FAIRE DES ÉBOULEMENTS (VOIR SÉQUENTIEL).

IDENTITÉ : $\forall c \in \mathcal{C}_{STAB} : c \oplus ALL0 = c$.

COMMUTATIVITÉ : PAR LA COMMUTATIVITÉ DE +.

JS-SANDPILE : ON CONTINUE À AJOUTER ... ON A :

1. DES CONFIGURATIONS QUE L'ON NE PEUT PLUS ATTEINDRE.
2. DES CONFIGURATIONS QUE L'ON PEUT TOUJOURS ATTEINDRE.

↳ CONFIGURATIONS RÉCURRENTES.

$$\mathcal{C}_{REC} = \{ c \in \mathcal{C}_{STAB} \mid \underbrace{\forall c' \in \mathbb{N}^{\tilde{V}}}_{\text{DEPUIS N'IMPORTE QUELLE CONFIGURATION...}} : \underbrace{\exists c'' \in \mathbb{N}^{\tilde{V}}}_{\text{ON PEUT AJOUTER DES GRAINS...}} : \underbrace{c' \oplus c'' = c}_{\text{POUR ATTEINDRE } c.} \}.$$

Q : UNE CONFIG. NON RÉCURRENTE ? ALL0

UNE CONFIG. RÉCURRENTE ? ALL3.

UNE CONFIG RÉCURRENTE TYPIQUE : AJOUTER DES GRAINS ALÉATOIREMENT ET STABILISER.

EST-CE QUE ALL4 EST RÉCURRENTE ?

THM : $(\mathcal{C}_{REC}, \oplus)$ EST UN GROUPE ABÉLIEN (COMMUTATIF).

PREUVE :

ASSOCIATIVITÉ : IDEM.

COMMUTATIVITÉ : IDEM.

CLÔTURE : À PARTIR D'UNE CONFIG DE $\mathcal{C}_{REC}$, ON NE PEUT ATTEINDRE QUE DES CONFIGS DE $\mathcal{C}_{REC}$ EN AJOUTANT DES GRAINS.

SOIT $c \in \mathcal{C}_{REC}$. $\forall \tilde{c} \in \underbrace{\mathbb{N}^{\tilde{V}}}_{\supseteq \mathcal{C}_{REC}}$ ON VA MONTRER QUE $c \oplus \tilde{c} \in \mathcal{C}_{REC}$.

$c \in \mathcal{C}_{\mathrm{REC}} \Rightarrow \forall c' : \exists c'' : c' \oplus c'' = c .$

$$\Rightarrow (c' \oplus c'') \oplus \dot{c} = c \oplus \dot{c}$$

$$\| \text{(ASSOCIATIVITÉ)}$$

$$c' \oplus (c'' \oplus \dot{c})$$

DONC $\forall c' : \exists (c'' \oplus \dot{c}) : c' \oplus (c'' \oplus \dot{c}) = c \oplus \dot{c}$, C'EST-À-DIRE $(c \oplus \dot{c}) \in \mathcal{C}_{\mathrm{REC}}$

IL NOUS RESTE À VOIR :

IDENTITÉ : $\exists e \in \mathcal{C}_{\mathrm{REC}}$ TELLE QUE $\forall c \in \mathcal{C}_{\mathrm{REC}} : c \oplus e = c$.

INVERSE : $\forall c \in \mathcal{C}_{\mathrm{REC}} : \exists c^{-1} \in \mathcal{C}_{\mathrm{REC}} : c \oplus c^{-1} = e$.

Q : IDENTITÉ ? MAIS ALLØ $\in \mathcal{C}_{\mathrm{REC}}$! JS-SANDPILE , e POUR DIFFÉRENTES TAILLES , TEST.

<u>LEMME 1</u> : SI M EST UN SEMI-GROUPE COMMUTATIF, ALORS $J = \bigcap_{\substack{I \subseteq M \\ I \text{ IDÉAL}}} I$ EST UN GROUPE ABÉLIEN.

<u>LEMME 2</u> : $\mathcal{C}_{\mathrm{REC}} = \bigcap_{\substack{I \subseteq \mathcal{C}_{\mathrm{STAB}} \\ I \text{ IDÉAL}}} I$.

I EST UN IDÉAL DROIT DE M SSI $I \oplus M \subseteq I$ AVEC $I \oplus M = \{ i \oplus m \mid i \in I \text{ ET } m \in M \}$.
IDÉAL <u>MINIMAL</u> POUR L'INCLUSION.

<u>PREUVE DU LEMME 1</u> :

$j \in J \Rightarrow \forall I : j \in I$
DONC $\forall m \in M : j \oplus m \in I$
CAR I IDÉAL.

- J EST UN IDÉAL : $J \oplus M = \left(\bigcap_{\substack{I \subseteq M \\ I \text{ IDÉAL}}} I \right) \oplus M \overset{\substack{I \text{ IDÉAL :} \\ \downarrow}}{\subseteq} \left(\bigcap_{\substack{I \subseteq M \\ I \text{ IDÉAL}}} I \right) = J$ ET IL EST MINIMAL PAR DÉFINITION.

- SOIT $x \in J$, ALORS $x \oplus J = J$.
  - $\subseteq$: J EST UN IDÉAL ET $x \in J$ DONC $x \oplus J \subseteq J$. J IDÉAL
  - $\supseteq$: $x \oplus J$ EST UN IDÉAL CAR $(x \oplus J) \oplus M = x \oplus (J \oplus M) \overset{\downarrow}{\subseteq} x \oplus J$,
    ET COMME J EST L'IDÉAL MINIMAL, ON A $J \subseteq x \oplus J$.

- EXISTENCE DE L'IDENTITÉ : $x \oplus J = J$ DONC $\Pi_x : \begin{array}{l} J \longrightarrow J \\ y \longmapsto x \oplus y \end{array}$ EST UNE PERMUTATION
  ET $\exists \overset{\substack{\text{PPCM DES CYCLES DE } \Pi_x \\ \downarrow}}{n} \geqslant 1$ TEL QUE $\forall y \in J : \Pi_x^n (y) = y$.

$n.x = \underbrace{x \oplus x \oplus \ldots \oplus x}_{n \text{ FOIS}}$. DONC $n.x \oplus y = y$ POUR TOUT $y \in J$ C'EST-À-DIRE $n.x = e$. ET $n.x \in J$ CAR J IDÉAL.

- UNICITÉ DE L'IDENTITÉ : SI e' EST AUSSI IDENTITÉ ALORS $e = e \oplus e' = e'$.
- EXISTENCE INVERSE : $x^{-1} = (n-1)x$ CAR $x \oplus x^{-1} = n.x = e$
- UNICITÉ DE L'INVERSE : SI $x^{-1\prime}$ AUSSI INVERSE DE x ALORS $x \oplus x^{-1} = e = x \oplus x^{-1\prime}$

$$\Rightarrow x^{-1} \oplus (x \oplus x^{-1}) = x^{-1} \oplus (x \oplus x^{-1\prime})$$

$$\Rightarrow (x^{-1} \oplus x) \oplus x^{-1} = (x^{-1} \oplus x) \oplus x^{-1\prime}$$

$$\Rightarrow e \oplus x^{-1} = e \oplus x^{-1\prime}$$

$$\Rightarrow x^{-1} = x^{-1\prime}$$

◆

PREUVE DU LEMME 2 :

PUISQUE $c' \oplus c'' = c'^{\circ} \oplus c''^{\circ}$, ON PEUT SE RAMENER À :

$$\mathcal{C}_{REC} = \{ c \in \mathcal{C}_{STAB} \mid \forall c' \in \mathcal{C}_{STAB} : \exists c'' \in \mathcal{C}_{STAB} : c' \oplus c'' = c \}.$$

$\supseteq$: $\mathcal{C}_{REC}$ EST UN IDÉAL DE $\mathcal{C}_{STAB}$ (CLÔTURE) . . .

$\neg P$: ET IL NE CONTIENT PAS D'AUTRE IDÉAL (ON SAIT QUE $\bigcap_{\substack{I \subseteq \mathcal{C}_{STAB} \\ I\ \text{IDÉAL}}} I$ EST UN IDÉAL)

$\mathcal{C}' \subsetneq \mathcal{C}_{REC}$ CAR POUR $c \in \mathcal{C}_{REC} \setminus \mathcal{C}'$ ET $c' \in \mathcal{C}'$ ON A $c''_{\in \mathcal{C}_{STAB}}$ TELLE QUE $c' \oplus c'' = c$. ◈

□

(THM GROUPE ABÉLIEN).

REMARQUE : D'APRÈS LA PREUVE DU LEMME 1, ON A $\forall c \in \mathcal{C}_{REC}$: $c \oplus \mathcal{C}_{REC} = \mathcal{C}_{REC}$.

THM FONDAMENTAL DES GROUPES ABÉLIENS FINIS :

$\mathcal{C}_{REC}$ EST ISOMORPHE À UN PRODUIT DE GROUPES CYCLIQUES : $\mathbb{Z}_{d_1} \times \mathbb{Z}_{d_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{d_g}$

[DHAR 1995] :
- $g = L$ POUR LA GRILLE $L \times L$.
- d_i EST UN MULTIPLE DE d_{i+1}.
- $d_i = e_{i-1} / e_i$ AVEC e_i LE PGCD DES DÉTERMINANTS DE TOUTES LES SOUS-MATRICES DE Δ DE TAILLE $(L-i) \times (L-i)$. ET $e_L = 1$.

REMARQUE : POUR TOUT GRAPHE AVEC PUITS $\overset{\text{GLOBAL}}{\vee}$ ON A UN GROUPE ABÉLIEN DE PILE DE SABLE !

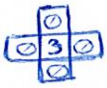
PENROSE : REGULAR DODECAHEDRON

THM : $|\mathcal{C}_{REC}| = \det(\Delta)$.

MOTIFS INTERDITS DANS LES CONFIGURATIONS DE $\mathcal{C}_{REC}$:

: LAQUELLE EST TIRÉE EN DERNIER ?

:  COMME ANTÉCÉDENT ?



: " " ?

PREUVE DU BURNING TEST (NON-ORIENTÉ) : $c \in \mathcal{C}_{REC} \Leftrightarrow c \oplus \beta = c$ (PAGE SUIVANTE)

$\Rightarrow$: CLÔTURE DE $\mathcal{C}_{REC}$ $(c \oplus \beta \in \mathcal{C}_{REC})$ ET UNICITÉ DE LA CONFIG. REC. DANS CHAQUE CLASSE D'ÉQ. (ON A $c \oplus \beta \equiv c$).

$\Leftarrow$: ALORS $\forall n \in \mathbb{N} : c \oplus n\beta = c$ MAIS POUR n ASSEZ GRAND ON A $(c \oplus n\beta) \in \mathcal{C}_{REC}$.
(CAR $n\beta \xrightarrow{}{}^{*} m'$ AVEC $m' \geq m$ OÙ m EST LA CONFIG. STABLE MAXIMALE).

□

BURNING TEST. POUR $c \in \mathcal{C}_{stab}$, SOIT $a_v\, c = (1_v + c)^\circ$ AVEC 1_v LA CONFIG. AYANT UN UNIQUE GRAIN EN $v \in \tilde{V}$.

GRAPHE NON-ORIENTÉ

ON A
$$a_v^{d(v)} = \prod_{u \in \mathcal{N}(v)} a_u$$
(ATTENTION SUR LES BORDS ON A $d(v) > |\mathcal{N}(v)|$)

D'OÙ
$$\prod_{v \in \tilde{V}} a_v^{d(v)} = \prod_{v \in \tilde{V}} a_v^{|\tilde{\mathcal{N}}(v)|}$$
← NOMBRE DE FOIS OÙ v APPARAÎT COMME UN $u \in \mathcal{N}(v)$

ET
$$\prod_{v \in \tilde{V}} a_v^{d(v) - |\tilde{\mathcal{N}}(v)|} = 1$$
EST UN OPÉRATEUR IDENTITÉ.

ATTENTION : L'ANNULATION DES OPÉRATEURS FONCTIONNE SUR LES CONFIGURATIONS RÉCURRENTES, MAIS PAS TOUJOURS SUR LES AUTRES CONFIG.

$(d(v) - |\tilde{\mathcal{N}}(v)|^{\geq 0}$ EST LE NOMBRE D'ARÊTES ENTRE v ET LE PUITS s).

- $\beta = \prod_{v \in \tilde{V}} a_v^{d(v) - |\tilde{\mathcal{N}}(v)|}$ ALLØ

  EST LA BURNING CONFIGURATION QUI CORRESPOND À TIRER TOUS LES SOMMETS -1 FOIS. OU À TIRER LE PUITS s 1 FOIS.

- EN GÉNÉRALISANT LES CLASSES D'ÉQUIVALENCES DE CONFIGURATIONS SUR $\mathbb{Z}^{\tilde{V}}$, ON A $\beta \equiv$ ALLØ $\equiv e$. CAR e CORRESPOND AUSSI À UN OPÉRATEUR IDENTITÉ $\prod_{v \in \tilde{V}} a_v^{e(v)}$.

- CHAQUE CLASSE D'ÉQUIVALENCE POSSÈDE EXACTEMENT UNE CONFIGURATION RÉCURRENTE, CAR SI $c, c' \in \mathcal{C}_{rec}$ ET $c \equiv c'$ ALORS POUR n ASSEZ GRAND ON A $c = n.e \oplus c = n.e \oplus c' = c'$
  ↑ ON PEUT ATTEINDRE c' LÉGALEMENT + CONVERGENCE

THM : (NON-ORIENTÉ) $c \in \mathcal{C}_{rec} \iff c \oplus \beta = c$. (PREUVE PAGE PRÉCÉDENTE).

VRAI SUR LES GRAPHES EULÉRIENS MAIS FAUX SUR LES GRAPHES ORIENTÉS ARBITRAIRES (SCRIPT TEST)

AU COURS DU BURNING TEST, CHAQUE SOMMET TIRÉ EXACTEMENT UNE FOIS. DONC ON PEUT LE PROGRAMMER RELATIVEMENT EFFICACEMENT (TEMPS LINÉAIRE). CEPENDANT, SUR LA GRILLE EN DEUX DIMENSIONS AVEC VOISINAGE DE VON NEUMANN, LE PROBLÈME DE DÉCIDER SI UNE CONFIG. DONNÉE EST RÉCURRENTE EST OUVERT : P-COMPLET ? NC ? NI L'UN NI L'AUTRE ??

CALCULER e :

① POUR TOUTES LES CONFIGURATIONS DE $\mathcal{C}_{rec}$; TESTER.

② POUR TOUTE $c \in \mathcal{C}_{rec}$, $\exists\, n \in \mathbb{N} : n.c = e$ (PREUVE M.I EST UN GROUPE ABÉLIEN)

③ BURNING ALGORITHM : $c_0 =$ ALLØ PUIS $c_{i+1} = c_i \oplus \beta$, QUAND $c_{i+1} = c_i$ C'EST QUE $c_i = e$.

④ m LA CONFIG. STABLE MAXIMALE AVEC $m(v) = d(v) - 1$ POUR TOUT $v \in \tilde{V}$:

$$e = (2.m - (2.m)^\circ)^\circ \quad \text{CAR}$$

$c \equiv c' \Rightarrow \prod a_v^{c(v)}$ ALLØ $\equiv \prod a_v^{c'(v)}$ ALLØ $\Rightarrow \prod a_v^{c(v) - c'(v)}$ ALLØ $\equiv$ ALLØ $\Rightarrow c - c' \equiv$ ALLØ. (LES a_v S'ANNULENT)

(i). SOUSTRAIRE DEUX CONFIG. DE LA MÊME CLASSE DONNE UNE CONFIG. DANS LA CLASSE DE e

(ii). $\forall v \in \tilde{V}$: $(2.m - (2.m)^\circ)(v) \geq d(v) - 1$ DONC AVEC $^\circ$ ON ARRIVE DANS $\mathcal{C}_{rec}$.

PAR UNICITÉ DE LA CONFIG. REC. D'UNE CLASSE D'EQ, ON OBTIENT L'ÉGALITÉ.

COMPLEXITÉ ALGORITHMIQUE

CLASSE NC ET P-COMPLÉTUDE

DÉF : NC^i : PROBLÈME RÉSOLU PAR UNE FAMILLE L-UNIFORME DE CIRCUITS (CALCUL DU CIRCUIT POUR LES ENTRÉES DE TAILLE n EN ESPACE $O(\log n)$) DE TAILLE $O(n^k)$ ET PROFONDEUR $O((\log n)^i)$.

$PRAM^i$: PARALLÈLE RANDOM ACCESS MEMORY EN TEMPS $O((\log n)^i)$ SUR $O(n^k)$ PROCESSEURS.

CREW : CONCURRENT READ EXCLUSIVE WRITE.

$$NC = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} NC^i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} PRAM^i$$

↖ CLASSE "ROBUSTE".

ÉVALUER LE CIRCUIT

$$(NC^1 \subseteq L \subseteq NL \subseteq NC^2)$$

REACHABILITY METHOD [PAPADIMITRIOU 7.3 & 16.1]

ON A $NC^i \subseteq PRAM^i \subseteq NC^{i+1}$.

UTILISER L'UNIFORMITÉ POUR CALCULER LE CIRCUIT, PUIS LE SIMULER AVEC 1 PROCESSEUR PAR PORTE.

DÉROULER LES BOUCLES : $O((\log n)^i)$ ÉTAPES ET $O(\log n)$ PAR ÉTAPE CAR CIRCUIT BINAIRE

[JÁJÁ 1992]

CALCUL DU MAXIMUM D'UN TABLEAU DE n ENTIERS :

CREW : • TEMPS $O(\log n)$ SUR $O(n)$ PROCESSEURS.

CRCW : • TEMPS $O(1)$ SUR $O(n^2)$ PROCESSEURS.

CALCUL DES COMPOSANTES CONNEXES D'UN GRAPHE NON-ORIENTÉ :

CREW : • TEMPS $O((\log n)^2)$ SUR $O(n^2)$ PROCESSEURS. (POINTER JUMPING)

NC = "PARALLÉLISABLE EFFICACEMENT"

P-COMPLET POUR $\leqslant_m^L$ = "INTRINSÈQUEMENT SÉQUENTIEL".

OUVERT. $NC \overset{?}{=} P$, $NC \overset{?}{=} NP$, $NC \overset{?}{=} PH$.

CVP

ENTRÉE : UN CIRCUIT $C : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ ET $x \in \{0,1\}^n$.

QUESTION : $C(x) = 1$?

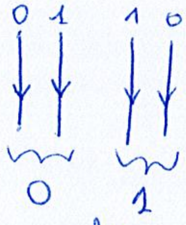
THM [LADNER 1975] CVP EST P-COMPLET. MONOTONE CVP $(\wedge, \vee)$ ET PLANAR CVP SONT P-COMPLETS.

(FAN-IN 2 FAN-OUT 2 ; LAYERED ; GRID LAYOUT)

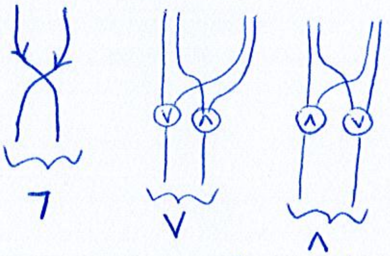
[YANG 1991] MONOTONEPLANARCVP EST DANS NC^3. [GREENLAW, HOOVER, RUZZO, "LIMITS TO PARALLEL COMPUTATION" 1995].

REMARQUE : CROISEMENT ($\neg$ PLANAIRE) $\Longleftrightarrow$ NÉGATION (NON-MONOTONE)

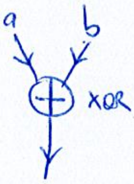
$\boxed{\Rightarrow}$ DOUBLE WIRE LOGIC :



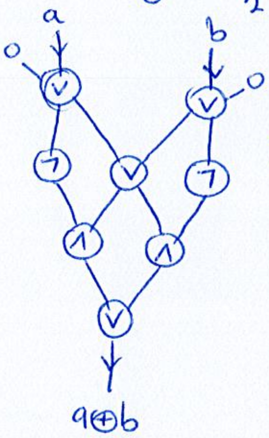
~~XXXXX~~ AVEC



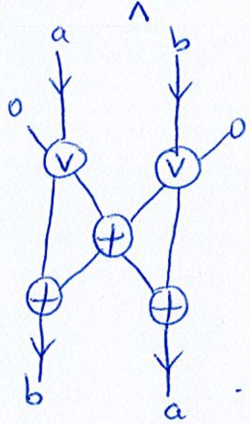
$\boxed{\Leftarrow}$



XOR AVEC



PUIS CROISEMENT AVEC



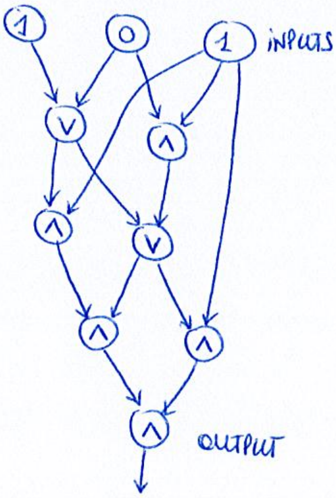
REMARQUE : CVP À ENTRÉE FIXÉE $x = 0^n$ EST ÉGALEMENT P-COMPLET.

THÉORÈME [FOLKLORE] : ÉTANT DONNÉS UN GRAPHE NON-ORIENTÉ ARBITRAIRE $G=(V,E)$, UNE CONFIGURATION STABLE $c : V \to \mathbb{N}$ ET DEUX SOMMETS $p, q \in V$, DÉCIDER SI L'AJOUT D'UN GRAIN À p VA ÉBOULER q (CÀD SI $\exists t \in \mathbb{N} : F^t(c+1_p)(q) \geqslant d_G(q)$) EST P-COMPLET.

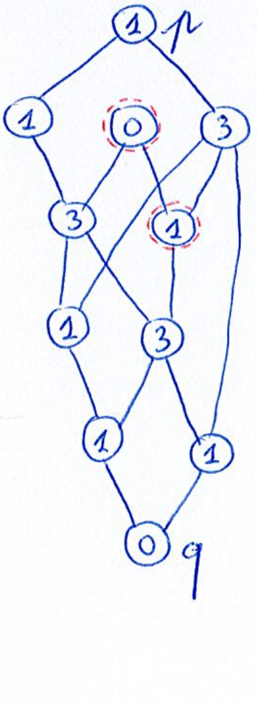
PREUVE : $\in P$ PAR LA BORNE POLYNOMIALE DE [TARDOS 1988].

P-DIFFICULTÉ PAR RÉDUCTION DEPUIS MONOTONE CVP :

IDÉE :

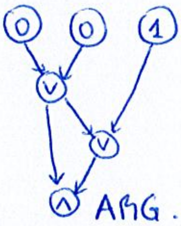


EN ESPACE LOG $\longmapsto$



⚠ TIMÉES ?!

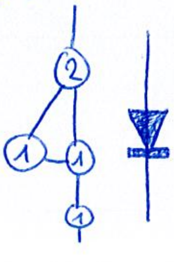
PROBLÈME :



ARG.

SOLUTION :

METTRE DES DIODES PARTOUT



$\square$

SUR LES GRILLES ($\mathbb{Z}^d$).

JS-SANDPILE : FUZE-CIRCUITS, SUBSETS of MOORE POUR JOUER AVEC $\mathcal{N}$, DIAPO MCVP $\leq_m^L$ FUZE CIRCUIT.
(APPROCHE DE BANKS, PhD THESIS 1971 : "INFORMATION PROCESSING AND TRANSMISSION IN C.A.").

POUR UNE DIMENSION d ET UN VOISINAGE $\mathcal{N} \subseteq_{\text{FINI}} \mathbb{Z}^d$ ON DÉFINIT :

> PRED $(d, \mathcal{N})$
> ENTRÉE : UNE CONFIGURATION STABLE FINIE $c : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{N}$ ET $p, q \in \mathbb{Z}^d$.
> QUESTION : $\exists t \in \mathbb{N}$: $F^t(c + 1_p)(q) \geqslant |\mathcal{N}|$?

THÉORÈME : • $\forall d, \mathcal{N}$: PRED $(d, \mathcal{N}) \in P$. [FORMENTI, P., 2019 ; CAS $\mathcal{N}$ SYMÉTRIQUE DANS TARDOS 1988].

- $d = 1$: VON NEUMANN PRED $\in$ NP [MOORE, NILSSON 1999 ; $NC^2 \geqq AC^2$ DANS MILTERSEN 2005].
  ~~$\forall \mathcal{N}$: $\mathcal{N}$-PRED $\in$ NC~~
- $d \geqslant 3$ ($\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1, 2\}$) : VON NEUMANN PRED P-COMPLET [MOORE, NILSSON 1999].
  $\uparrow$ POUR CROISEMENT.

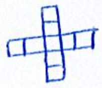
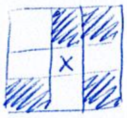
OUVERT : $d = 2$ VON NEUMANN PRED EST DANS NC ? EST P-COMPLET ?

⚠ THÉORÈME [VOLLMER, 1991] : SI $NC \neq P$ ALORS IL EXISTE DES PROBLÈMES P-INTERMÉDIAIRES.

THÉORÈME : CROISEMENT DE SIGNAUX ÉLÉMENTAIRES IMPOSSIBLE SUR :

- VON NEUMANN ET MOORE EN DIMENSION $d = 2$. [GOLES, GAJARDO 2006]
- TOUT GRAPHE EULÉRIEN PLANAIRE. [NGUYEN, P., 2018]

THÉORÈME : PRED EN $d = 2$ EST P-COMPLET POUR :

- VON NEUMANN DE RAYON $\geqslant 2$  . [GOLES, GAJARDO, 2006]
- TOUTE FORME "SUFFISAMMENT GRANDE". [NGUYEN, P., 2018].
- $\mathcal{N}$ =  $= \{(0,1), (1,1), (-1,-1), (1,-1)\}$. [CONCHA, P., 2024+] JS-SANDPILE.

OUVERT : EXISTE-T-IL UN ALGORITHME POUR DÉCIDER,
ÉTANT DONNÉ $\mathcal{N} \subseteq_{\text{FINI}} \mathbb{Z}^2$, SI IL EXISTE UNE PORTE DE CROISEMENT ?

CALCULER AVEC DES PILES DE SABLE : DIAPO.

TUTTE : SLIDES LABO DAVID 2021/11/25.