
TD 06 – Révisions

Durée : 2 heures.

Documents : non-autorisés.

Exercice 1.*Définitions*

- Rappeler les sept éléments qui constituent une machine de Turing.
- Pour une machine de Turing M , que signifie $L(M)$?
- Pour une machine de Turing M et un mot w , que signifie $M(w) \uparrow$?
- Qu'est-ce qu'un langage non décidable?
- Qu'est-ce qu'un langage non semi-décidable?
- Donner la définition de $L_1 \leq_m^T L_2$ avec $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ et $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$.
- Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux, en justifiant.
 - La famille des langages décidables est close par complémentation.
 - La famille des langages semi-décidables est close par complémentation.
- Au théorème de Rice, qu'est-ce qu'une propriété? Donner un exemple de propriété triviale.

Exercice 2.*Machines de Turing*

Donner l'automate d'une machine de Turing qui décide chacun des langages suivants.

- $L_1 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \exists w' \in \{b\}^* : w = aaw'cc \text{ et } |w'| \equiv 1 \pmod{2}\}$
- $L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w_1w_2 \dots w_k \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k-2 : w_iw_{i+1}w_{i+2} \neq aab\}$

Exercice 3.*Réductions*

Rappels :

- $L_u = \{\langle M, w \rangle \mid w \in L(M)\}$ et $L_{\bar{u}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \notin L(M)\}$
- $L_{\text{halt}\epsilon} = \{\langle M \rangle \mid M(\epsilon) \downarrow\}$ et $L_{\overline{\text{halt}\epsilon}} = \{\langle M \rangle \mid M(\epsilon) \uparrow\}$, avec ϵ le mot vide

- Pour chacun de ces quatre langages, indiquer s'il est :

décidable non décidable semi-décidable non semi-décidable
- Soit $L_1 = \{\langle M \rangle \mid M(aab) \uparrow\}$, démontrer que $L_{\overline{\text{halt}\epsilon}} \leq_m^T L_1$. Que peut-on en déduire?
- Soit $L_2 = \{\langle M, w \rangle \mid ww \in L(M)\}$, démontrer que $L_u \leq_m^T L_2$. Que peut-on en déduire?
- Soit $L'_2 = \{\langle M, ww \rangle \mid w \in L(M)\}$, démontrer que $L_u \leq_m^T L'_2$. Que peut-on en déduire?
- Soit $L_3 = \{\langle M, w \rangle \mid aw \in L(M) \text{ et } bw \notin L(M)\}$. Conjecturez-vous que le langage L_3 est décidable ou non? semi-décidable ou non? Proposer une réduction pour le démontrer.

Exercice 4.*Réductions?*

Rappel : le langage $L_{\bar{u}} = \{\langle M, w \rangle \mid w \notin L(M)\}$ n'est pas semi-décidable.

- Est-ce que $L_{\bar{u}} \leq_m^T L^- = \{\langle M \rangle \mid aaa \notin L(M) \text{ et } aab \notin L(M)\}$?
Si oui, proposer une telle réduction. Justifier.
- Est-ce que $L_{\bar{u}} \leq_m^T L^+ = \{\langle M \rangle \mid bab \in L(M) \text{ et } bba \in L(M)\}$?
Si oui, proposer une telle réduction. Justifier.