TD 04 – Réductions

Rappel : pour $A \subseteq \Sigma_A^*$ et $B \subseteq \Sigma_B^*$ deux langages, $A \leq_m^T B$ signifie que A se réduit à B, c'est-à-dire qu'il existe $f : \Sigma_A^* \to \Sigma_B^*$ calculable telle que $\forall w \in \Sigma_A^* : w \in A \iff f(w) \in B$.

Rappel : $L_u = \{(\langle M \rangle, w) \mid w \in L(M)\}$ n'est pas décidable.

Exercice 1. *Utilité des réductions*

Démontrer les quatre énoncés suivants.

1. Si $A \leq_m^T B$ et B est décidable alors A est décidable.
2. Si $A \leq_m^T B$ et B est semi-décidable alors A est semi-décidable.
3. Si $A \leq_m^T B$ et A n'est pas décidable alors B n'est pas décidable.
4. Si $A \leq_m^T B$ et A n'est semi-décidable alors B n'est pas semi-décidable.

Exercice 2. *Mes premières réductions Turing many-one*

Soit $L_{abba} = \{\langle M \rangle \mid abba \in L(M)\}$.

1. Montrer que $L_{abba} \leq_m^T L_u$. Que peut-on en déduire sur la (semi-)décidabilité de L_{abba} ?
2. Montrer que $L_u \leq_m^T L_{abba}$. Que peut-on en déduire sur la (semi-)décidabilité de L_{abba} ?
3. Montrer que $L_{pal} = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ est un palindrome }\} \leq_m^T L_{anbn} = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. Pour tous langages L et L' tels que L est décidable et $L' \notin \{\emptyset, \Sigma^*\}$, montrer que $L \leq_m^T L'$.

Soit Σ un ensemble fini.
Étant donné un mot $w \in \Sigma^*$, on définit les langages

$$W(w) = \{\langle M \rangle \mid w \in L(M)\} \quad \text{et} \quad \overline{W(w)} = \{\langle M \rangle \mid w \notin L(M)\}$$

contenant respectivement les codes des machines de Turing qui acceptent w, et les codes des machines de Turing qui rejettent w. Remarquons que $L_{abba} = W(abba)$.

Exercice 3. *L'ensemble des codes de machines de Turing*

1. Est-ce que le langage $W(w) \cup \overline{W(w)}$ est égal à Σ^* ou à $\{0,1\}^*$ ou à L_{enc} ?
2. Est-ce que le langage $W(w) \cup \overline{W(w)}$ est décidable ? semi-décidable ?
3. Montrer que pour tous langages A, B sur l'alphabet Σ, si B est décidable et $A \neq \emptyset$ et $A \cap B = \emptyset$ alors $A \cup B \leq_m^T A$.

Exercice 4. *Accepter/rejeter un mot donné*

1. Montrer que pour tous $u, v \in \Sigma^*$, on a $W(u) \leq_m^T W(v)$.
2. Sachant que L_u est semi-décidable mais non décidable, en déduire que pour tout $w \in \Sigma^*$ le langage $W(w)$ est semi-décidable mais non décidable.
3. En déduire que pour tout $w \in \Sigma^*$ le langage $\overline{W(w)}$ n'est pas semi-décidable (utiliser 3.3).

Exercice 5. *Accepter et s'arrêter*

On rappelle que $M(w)\uparrow$ signifie que le calcul de M sur l'entrée w ne s'arrête pas.

1. Montrer que pour toute machine de Turing M il existe une machine de Turing M' telle que $L(M') = L(M)$ et pour tout $w \in \Sigma^*$ on a soit $w \in L(M')$ soit $M'(w)\uparrow$.

Étant donné un mot $w \in \Sigma^*$, on définit les langages

$$H(w) = \{\langle M\rangle \mid M(w)\downarrow\} \quad \text{et} \quad \overline{H(w)} = \{\langle M\rangle \mid M(w)\uparrow\}$$

contenant respectivement les codes des machines de Turing qui ne s'arrêtent pas sur l'entrée w, et les codes des machines de Turing qui s'arrêtent sur l'entrée w.

2. Déduire de l'exercice 4, que pour tout $u \in \Sigma^*$, le langage $\overline{H(w)}$ n'est pas semi-décidable.
3. Pour tout $u \in \Sigma^*$, le langage $H(w)$ est-il semi-décidable ? décidable ?

Exercice 6. *Avec des réductions Turing many-one…*

Démontrer les réductions suivantes.

1. $L_{halt\epsilon} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ s'arrête sur } \epsilon\} \quad \leq_m^T \quad A = \{\langle M\rangle \mid aaa \in L(M)\}$.
2. Pour tout langage $L \subseteq \{a,b\}^*$, $\quad L \quad \leq_m^T \quad aL = \{aw \mid w \in L\}$.
3. Pour tout langage $L \subsetneq \{a,b\}^*$, $\quad aL \quad \leq_m^T \quad L$.
4. $L_{stupide} = \{a\} \quad \leq_m^T \quad L_u$.

Montrer que les langages suivants ne sont pas décidables.

5. $A \times A$.
6. $A \times B$ avec $B = \{\langle M\rangle \mid bb \in L(M)\}$.

Montrer que les langages suivants ne sont pas semi-décidables.

7. $L_\emptyset = \{\langle M\rangle \mid L(M) = \emptyset\}$.
8. $L_= = \{(\langle M_1\rangle, \langle M_2\rangle) \mid L(M_1) = L(M_2)\}$.

Montrer que les langages suivants sont semi-décidables.

9. L_u et $L_{halt\epsilon}$.
10. Pour toute machine de Turing M, $\quad L_M = \{w \mid w \in L(M)\}$.

Montrer que le langage suivant est décidable.

11. $I = \{\langle M\rangle \mid L(M) = \{a\} \text{ et } |\langle M\rangle| < 2^{2^{1024}}\}$.

✎ Du plus « simple » au plus « difficile » à décider, ordonner les langages de cet exercice.