Corrections TD 01 – Ensembles dénombrables et indénombrables

Remarques générales : Bien souvent il n'y a pas une seule bonne réponse possible aux questions posées. Pensez à expliquer vos idées et raisonnements dans vos rendus, cela nous aide à comprendre votre démarche dans le cas où vos réponses ne sont pas tout à fait correctes.

Rappel : soient A et B deux ensembles, une fonction $f : A \to B$ est

— injective ssi $\forall\, a, a' \in A : f(a) = f(a') \implies a = a'$ (ou la contraposée),

— surjective ssi $\forall\, b \in B : \exists\, a \in A : b = f(a)$,

— bijective ssi elle est à la fois injective et surjective.

Utile : Théorème de Cantor-Schröder-Bernstein : soient A et B deux ensembles, si il existe une fonction injective de A vers B (intuitivement $|A| \leq |B|$), et une fonction injective de B vers A (intuitivement $|B| \leq |A|$), alors il existe une bijection entre A et B (intuitivement $|A| = |B|$).

Exercice 6. *Ensembles infinis dénombrables*

4. Donner une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Remarquons que toute bijection f possède une inverse f^{-1} qui est également une bijection, on peut donc donner une bijection entre deux ensembles dans n'importe laquelle des deux directions.
Nous allons démontrer que $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)(x + y + 1) + x$ est bijective. Si l'on dessine une grille bidimensionnelle indexée par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, alors f attribue un entier naturel à chaque point de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, selon un ordre qui suit les diagonales successives de pente -1. La formule définissant f est obtenue en remarquant que (x, y) est sur une diagonale comportant $x + y + 1$ élements, en utilisant la formule $\frac{n(n-1)}{2}$ pour compter la somme des entiers de 1 à n déjà utilisés sur les diagonales précédentes, et en ajoutant $+x$ pour assigner des nombres successifs sur une même diagonale.
Surjectivité de f : il suffit de remarquer que $\forall n \in \mathbb{N} : \exists (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n = j + \sum_{i=1}^{k} i$ et $0 \leq j \leq k$. En prenant $x = j$ et $y = k - j$ on obtient $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que

$$f(x, y) = x + \frac{1}{2}(x + y)(x + y + 1) = x + \sum_{i=1}^{x+y} i = j + \sum_{i=1}^{j+k-j} i = n.$$

Injectivité de f : on démontre la contraposée. $\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On procède par disjonction de cas, suivant si les deux points sur la même diagonale ou non :

— si $x + y = x' + y'$ (hyp.1) alors $f(x, y) - f(x', y') = x - x'$ (hyp.2) et l'on en déduit que

$$f(x, y) = f(x', y') \overset{\text{(hyp.2)}}{\iff} x = x' \overset{\text{(hyp.1)}}{\iff} (x, y) = (x', y').$$

Donc en particulier $(x, y) \neq (x', y') \implies f(x, y) \neq f(x', y')$.

— si $x + y > x' + y'$ (le cas $x + y < x' + y'$ est symétrique) alors $x + y \geq x' + y' + 1$ et

$$(x + y)(x + y + 1) > (x' + y' + 1)(x' + y' + 1) = (x' + y')(x' + y' + 1) + x' + y'.$$

Donc $(x + y)(x + y + 1) + x > (x' + y')(x' + y' + 1) + x'$, d'où $f(x, y) \neq f(x', y')$.

6. Donner une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Nous allons réutiliser la bijection $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de la question 4. Soit $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $g(x, y, z) = f(f(x, y), z)$.
Injectivité de g : $\forall (x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} g(x,y,z) = g(x',y',z') &\overset{\text{définition de } g}{\Longrightarrow} f(f(x,y),z) = f(f(x',y'),z') \\ &\overset{\text{injectivité de } f}{\Longrightarrow} f(x,y) = f(x',y') \text{ et } z = z' \\ &\overset{\text{injectivité de } f}{\Longrightarrow} x = x' \text{ et } y = y' \text{ et } z = z' \end{aligned}$$

Surjectivité de g : $\forall n \in \mathbb{N}$, par la surjectivité de f il existe $(y', z) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que $n = f(y', z)$, et pour y' par la surjectivité de f il existe $(x, y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que $y' = f(x, y)$. Nous obtenons $(x, y, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $g(x, y, z) = f(f(x, y), z) = f(y', z) = n$.

7. Donner une bijection entre Σ^* et $\mathbb{N}$, pour Σ un alphabet fini.
Notre idée pour mettre en correspondance les entiers et les mots consiste intuitivement à « compter en base $m = |\Sigma|$ ». Soit une bijection $\vartheta : \Sigma \to \{1, \dots, m\}$ (ce sont deux ensembles finis de même taille), qui correspond à attribuer une valeur à chaque lettre. Soit $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ definie pour tout mot $w = w_k \dots w_2 w_1 w_0 \in \Sigma^*$ par

$$f(w_k \dots w_2 w_1 w_0) = \sum_{i=0}^{k} \vartheta(w_i)\, m^i,$$

et avec la convention $f(\epsilon) = 0$. Par exemple pour $\Sigma = \{a, b, c\}$ et $\vartheta(a) = 1$, $\vartheta(b) = 2$, $\vartheta(c) = 3$, on aura $f(\epsilon) = 0$, $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$, $f(aa) = 4$, $f(ab) = 5$, $f(ac) = 6$, $f(ba) = 7$, $f(bb) = 8$, $f(bc) = 9$, $f(ca) = 10$, $f(cb) = 11$, $f(cc) = 12$, $f(aaa) = 13$, etc, $f(acc) = 21$ puis $f(baa) = 22$.
Injectivité de f : $\forall w, w' \in \Sigma^*$, si $f(w) = f(w')$ alors par définition de f nous avons $\sum_{i=0}^{k} \vartheta(w_i)\, m^i = \sum_{i=0}^{k'} \vartheta(w'_i)\, m^i$ et pouvons alors en déduire inductivement que :
- $\left(\sum_{i=0}^{k} \vartheta(w_i)\, m^i\right) \mod m \equiv \left(\sum_{i=0}^{k} \vartheta(w'_i)\, m^i\right) \mod m$, ce qui se réduit à $\vartheta(w_0) = \vartheta(w'_0)$, donc $w_0 = w'_0$ car ϑ est injective.
- Il s'ensuit que $\sum_{i=1}^{k} \vartheta(w_i)\, m^i = \sum_{i=1}^{k} \vartheta(w'_i)\, m^i$ donc $\left(\sum_{i=1}^{k} \vartheta(w_i)\, m^i\right) \mod m^2 \equiv \left(\sum_{i=1}^{k} \vartheta(w'_i)\, m^i\right) \mod m^2$, ce qui se réduit à $\vartheta(w_1) = \vartheta(w'_1)$, donc $w_1 = w'_1$ car ϑ est injective.
- etc jusqu'à $w_k = w'_k$ et $k = k'$ qui épuisent w et w' simultanément (pour qu'il s'ensuive que $0 = 0$).

Surjectivité de f : étant donné $n \in \mathbb{N}$, pour trouver $w \in \Sigma^*$ tel que $f(w) = n$ nous pouvons adapter l'algorithme de calcul de la représentation en base m de l'entier n. L'adaptation consiste à utiliser le symbole $\vartheta^{-1}(m)$ à la place du 0. En reprenant notre exemple de $\Sigma = \{a, b, c\}$ et $m = 3$, pour $n = 1234$ nous aurons :

$$\begin{array}{rrl} & 1234 \mod 3 \equiv 1 & \Longrightarrow w_0 = \vartheta^{-1}(1) = a \\ \frac{1234-1}{3} = 411 & 411 \mod 3 \equiv 0 & \Longrightarrow w_1 = \vartheta^{-1}(3) = c \\ \frac{411-3}{3} = 136 & 136 \mod 3 \equiv 1 & \Longrightarrow w_2 = \vartheta^{-1}(1) = a \\ \frac{136-1}{3} = 45 & 45 \mod 3 \equiv 0 & \Longrightarrow w_3 = \vartheta^{-1}(3) = c \\ \frac{45-3}{3} = 14 & 14 \mod 3 \equiv 2 & \Longrightarrow w_4 = \vartheta^{-1}(2) = b \\ \frac{14-2}{3} = 4 & 4 \mod 3 \equiv 1 & \Longrightarrow w_5 = \vartheta^{-1}(1) = a \\ \frac{4-1}{3} = 1 & & \Longrightarrow w_6 = \vartheta^{-1}(1) = a \end{array}$$

Et l'on peut vérifier que $f(aabcaca) = 1234$.

1. Donner une bijection entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$) et $[0,1]$.
Réels binaires : pour répondre à cette question nous allons écrire tout réel $r \in [0,1]$ en binaire, sous la forme $0.x_0x_1x_2x_3\ldots$ avec $r = \sum_{i\geq 0} x_i\, 2^{-i-1}$ (rappelons que les réels peuvent avoir une infinité de décimales/bits après la virgule, comme par exemple $\frac{1}{3} = 0.33333333\ldots$ en décimal, et $\frac{1}{3} = 0.01010101\ldots$ en binaire). Il y a une petite subtilité : la représentation de certains réels n'est pas unique (comme par exemple en binaire $\frac{1}{2} = 0.10000000\cdots = 0.01111111\ldots$), mais nous allons ignorer cette subtilité et considérer que deux réels x, x' dont les représentations diffèrent sur au moins un $x_i \neq x'_i$ sont différents.

Notre bijection est $f : \begin{array}{ccl} \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \to & [0,1] \\ X & \mapsto & 0.x_0x_1x_2x_3\ldots \text{ avec } x_i = 1 \iff i \in X. \end{array}$

Injectivité de f : $\forall X, X' \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, si $f(X) = 0.x_0x_1x_2x_3\cdots = 0.x'_0x'_1x'_2x'_3 = f(X')$ alors $\forall i \in \mathbb{N} : x_i = x'_i$ donc par définition de f on a $i \in X \iff i' \in X'$, c'est-à-dire $X = X'$.
Surjectivité de f : $\forall r = 0.x_0x_1x_2x_3\cdots \in [0,1]$ on peut construire l'ensemble $X = \{i \in \mathbb{N} \mid x_i = 1\}$ qui nous donne $f(X) = r$ par définition de f.