TD 01 – Ensembles dénombrables et indénombrables

Exercice 1. *Notations*

Lire chacune des phrases suivantes, et donner un élément de chaque ensemble si possible.

1. $\{x$ tels que $x \in \mathbb{N}$ et $x > 2$ et $x < \pi\}$.

2. $\{w \in \{a, b\}^* : |w| = 6\}$.

3. $\{X \subseteq \{a\}^* \mid |X| = 3\}$.

4. $\{2k \mid k \in \mathbb{N}\} \cap \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 2. *Appartenance versus inclusion*

Mettre le symbole correct ($\in$ ou $\subseteq$) à la place du « ? ».

1. $\{1\}$? $\{1, 3\}$.

2. 1 ? $\{1, 3\}$.

3. $\{1\}$? $\{\{1\}, \{3\}\}$.

4. $\emptyset$? $\{1, 3\}$.

Exercice 3. *Ensembles ?*

1. Peut-on parler de l'ensemble $\{\{1, abba\}, \{\{42\}\}, 2\}$? Si oui, quels sont ses éléments ?

2. Combien d'éléments comporte chacun de ensembles suivants ?

$$\{1, 2, 3\} \qquad \{1, 2, \{3\}\} \qquad \{1, \{2, 3\}\} \qquad \{\{1, 2, 3\}\} \qquad \emptyset \qquad \{\emptyset\} \qquad \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

Exercice 4. *Parties*

Pour un ensemble X, on note $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble des sous-ensembles (parties) de X.

1. Soit $X = \{0, 1, 2\}$. Lister les éléments de $\mathcal{P}(X)$.

2. Calculer $\mathcal{P}(\emptyset)$, puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$, et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

Exercice 5. *Diagramme de Venn, double inclusion*

Soient A, B, C, D quatre sous-ensembles de E. On note $A^c = E \setminus A$ le complémentaire de A.

1. Montrer que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ et que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

2. Montrer que si (i) $A \subseteq C$ (ii) $B \subseteq D$ (iii) $A \cup B = C \cup D$ (iv) $C \cap D = \emptyset$ alors $A = C$ et $B = D$.

3. Montrer que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

4. Montrer que $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

5. Montrer que si $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$ alors $B = C$.

Rappel : soient A et B deux ensembles, une fonction $f : A \to B$ est
- — injective ssi $\forall\, a, a' \in A : f(a) = f(a') \implies a = a'$ (ou la contraposée),
- — surjective ssi $\forall\, b \in B : \exists\, a \in A : b = f(a)$,
- — bijective ssi elle est à la fois injective et surjective.

Utile : Théorème de Cantor-Schröder-Bernstein : soient A et B deux ensembles, si il existe une fonction injective de A vers B (intuitivement $|A| \leq |B|$), et une fonction injective de B vers A (intuitivement $|B| \leq |A|$), alors il existe une bijection entre A et B (intuitivement $|A| = |B|$).

Exercice 6. *Ensembles infinis dénombrables*

1. Donner cinq éléments de l'ensemble $\mathbb{N} \times \{0, 1, a\}$.
2. Donner une bijection de $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ dans $2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, \ldots\}$.
3. Donner une bijection de $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ dans $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
4. Donner une bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
5. En déduire que $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$?
6. Donner un bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
7. Pour un alphabet fini Σ fixé, donner une bijection de Σ^* dans $\mathbb{N}$.

Exercice 7. *Ensembles infinis indénombrables*

1. Donner une bijection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$) dans $[0, 1]$.
2. Donner une bijection de l'ensemble des langages sur un alphabet fini Σ dans $[0, 1]$.
3. Donner une fonction injective de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Donner une fonction injective de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$. Que dit alors le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein ?