1 PRENDRE MON HDR

M2 IMD - MCSD - 3h le 18/10/2022
(2022-23)

Inria
INVENTEURS DU MONDE NUMÉRIQUE

COMPLEXITÉ ALGORITHMIQUE DES RÉSEAUX D'AUTOMATES (BOOLÉENS).

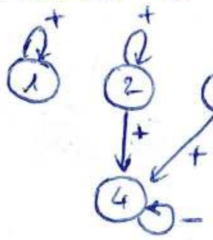
- MON H.D.R. ! (KESAKO ?) IDÉE : ÉTUDIER FORMELLEMENT LA COMPLEXITÉ DE CES "SYSTÈMES COMPLEXES".

REMARQUE : ON EXPLIQUE COMMENT EMBARQUER DU CALCUL CAR LES RÉDUCTIONS POLYNOMIALES SONT TRANSITIVES / STABLES PAR COMPOSITION.

[PERIFEL, PROPOSITION 3.11] ET $A = \{(\langle N \rangle, x, 1^t) \mid N(x) \text{ ACCEPTE EN TEMPS } \leq t\}$
OÙ N EST UNE M.T. NON-DET, x UN MOT, t UN ENTIER,
EST TRIVIALEMENT NP-COMPLET.
PAR EXEMPLE LE THÉORÈME DE COOK-LEVIN !

- EXEMPLES DE R.A. : $\forall x \in \{0,1\}^4$

BOOLÉEN : $n = 4$



AVEC
$f_1(x) = x_1$
$f_2(x) = x_2$
$f_3(x) = x_3$
$f_4(x) = \varphi(x_1, x_2, x_3) \vee \neg x_4$
$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \neg[(x_1 \vee x_2) \rightarrow \neg(x_2 \wedge x_3)]$ $(\equiv x_2 \wedge x_3)$

À VOUS ! (PAGE 41).

GRAPHE D'INTERACTION
DEF ? SIGNES ?

FONCTION LOCALES
$f_i : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$

DYNAMIQUE PARALLÈLE
$f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^n$

⚠ TOUT PARALLÈLE AUJOURD'HUI.

UNIFORME : $n = 1$

⚠ SIGNE PAS CLAIR... $\forall a \in Q$:

$$g_1(a) = \begin{cases} \bot' & \text{si } a = \bot \\ \bot & \text{si } a = \bot' \\ a & \text{si } a = x_1 x_2 x_3 \text{ ET } \varphi(x_1, x_2, x_3) = \top \\ \bot & \text{si } a = x_1 x_2 x_3 \text{ ET } \varphi(x_1, x_2, x_3) = \bot \end{cases}$$

$Q = \{000, 100, \dots, 111, \bot, \bot'\}$

À VOUS ! (PAGE 42)
DYNAMIQUE PARALLÈLE
$g : Q^1 \rightarrow Q^1$

OBSERVATION : LA DYNAMIQUE POSSÈDE UN POINT FIXE SSI φ EST SATISFAISABLE !

- THEOREM [ALON, 1985] : "WE OMIT THE DETAILS"
ÉTANT DONNÉ UN R.A.B. $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^n$, DÉCIDER S'IL POSSÈDE AU MOINS UN POINT FIXE $(x \in \{0,1\}^n : f(x) = x)$ EST NP-COMPLET.

ENCODAGE DE f ? CIRCUITS DES FONCTIONS LOCALES : À VOUS !

REMARQUE : TOUJOURS NP-C AVEC LA PROMESSE $\Delta(G) \leq 2$
TOUJOURS NP-C POUR LES RÉSEAUX ET/OU (AVEC SIGNES)
NB : DANS CE CAS LE GRAPHE D'INTERACTION AVEC $\wedge / \vee$ SUR LES SOMMETS ENCODE f.

COROLLAIRE : COMPTER LE NOMBRE DE POINTS FIXES EST #P-COMPLET (#3-SAT, $\leq$ POLY PARCI, ⚠ #2-SAT)

- THÉORÈME [BRIDOUX ET AL. 2021] : ÉTANT DONNÉ UN R.A.B. $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$, DÉCIDER S'IL POSSÈDE UN CYCLE LIMITE DE LONGUEUR k (FIXÉ) EST NP-C, MÊME AVEC LA PROMESSE $\Delta(G) \leq 2$.

  PREUVE : À VOUS ! (PAGE 62).

- THÉORÈME [MON HDR, 2022] : ÉTANT DONNÉ UN R.A.B. $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$, DÉCIDER S'IL EST BIJECTIF ($\Leftrightarrow$ INJECTIF) EST CONP-COMPLET.

  PREUVE : À VOUS ! (PAGE 69)

- POINT FIXE : $\exists x : x \to x$

  CYCLE LIMITE DE LONGUEUR k : $\exists x^1, \dots, x^k : (x^1 \to x^2 \to x^3 \to \dots \to x^k \to x^1) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{i,j \in [k] \\ i \neq j}} x^i \neq x^j \right)$

  INJECTIF : $\forall x, y, x', y' : (x \to x' \wedge y \to y' \wedge x \neq y) \Rightarrow x' \neq y'$

  LOGIQUE DE GRAPHE AU PREMIER ORDRE : $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \exists, \forall$ SUR LA SIGNATURE $\{=, \to\}$ EN QUANTIFIANT SUR LES CONFIGURATIONS.

  FORMULE NON-TRIVIALE : UNE INFINITÉ DE MODÈLES ET DE CONTRE-MODÈLES. EXEMPLE TRIVIAL ?

(MÉTA)THÉORÈME [GAMARD ET AL. 2021] : SI ψ EST NON-TRIVIALE ALORS ÉTANT DONNÉ UN R.A. $f : X \to X$ (AVEC $X = \prod_{i \in [n]} Q_i$)
"À LA RICE"
DÉCIDER SI $G_f \models \psi$ EST NP-DIFFICILE OU CONP-DIFFICILE, SINON C'EST $O(1)$.

DE PLUS, POUR TOUT $i \in \mathbb{N}_+$, IL EXISTE ψ_i TELLE QUE LE PB EST Σ_i^P-COMPLET. (ET DONC POUR $\neg\psi_i$ IL EST Π_i^P-COMPLET).

TODO : NON-DÉT, MSO, ALPHABET BORNÉ (BOOLÉEN).
↳ REPRÉSENTATION SUCCINCTE DE GRAPHE.

- ON RENCONTRE AUSSI DES PB PLUS DURS :

THEOREM [GADARD ET AL. 2021] : ÉTANT DONNÉ UN R.A. UNIFORME $f : [\![q]\!]^n \to [\![q]\!]^n$, DÉCIDER SI $|\Omega_f| = 1$ EST PSPACE-COMPLET.

AVEC $\Omega_f = \bigcap_{t \in \mathbb{N}} f^t([\![q]\!]^n)$ L'ENSEMBLE LIMITE

OÙ $f(X) = \bigcup_{x \in X} \{f(x)\}$.

- ON PEUT AUSSI POSER D'AUTRES TYPES DE QUESTIONS :

1. ÉTANT DONNÉ f, EST-CE QUE G_f ... ?
2. ÉTANT DONNÉ f, CALCULER SON GRAPHE D'INTERACTION ? PB DÉCISION, DP-COMPLET !
3. ÉTANT DONNÉ UN GRAPHE D'INTERACTION SIGNÉ, EST-CE QU'IL EXISTE UN R.A.B. DONT C'EST LE G.I., ET QUI POSSÈDE AU MOINS k (FIXÉ) POINTS FIXES ?

   THEOREM [BRIDOUX ET AL, 2019] : DANS P POUR $k = 1$ (⚠ ROBERTSON, SEYMOUR)
   NP-COMPLET POUR $k \geq 2$.

   AU PLUS k (FIXÉ) POINTS FIXES ? NEXPTIME-COMPLET POUR TOUT k !

4. ÉTANT DONNÉ f (FONCTIONS LOCALES), EST-CE QU'IL EXISTE UN MODE BLOC-SÉQUENTIEL μ TEL QUE (f, μ) ...
   - A UN POINT FIXE ? ⚠ INVARIANCE
   - A UN CYCLE LIMITE DE LONGUEUR k (FIXÉ) ? ⚠ $\exists\exists$: NP-COMPLET
   - N'A PAS DE CYCLE LIMITE DE LONGUEUR k (FIXÉ) ? $\exists\forall$: $\Sigma_2^P = NP^{NP}$-COMPLET.

- ET PUIS IL Y A DES QUESTIONS OUVERTES, PAR EXEMPLE :

EST-CE QU'UN R.A.B. NON-DET. (DONNÉ PAR SES CIRCUITS), EST DET. ?

$$\forall x : \exists y : (x \to y) \wedge (\forall y' : x \to y' \Rightarrow y = y')$$

$\in coNP^{NP}$, $coNP \subseteq US$, $NP^{NP} = NP^{US}$