TD 04 bis – Réductions plus générales

Rappel : pour $A \subseteq \Sigma_A^*$ et $B \subseteq \Sigma_B^*$ deux langages, $A \leq_m^T B$ signifie que A se réduit à B, c'est-à-dire qu'il existe $f : \Sigma_A^* \to \Sigma_B^*$ calculable telle que $\forall w \in \Sigma_A^* : w \in A \iff f(w) \in B$.

Soit Σ un ensemble fini.
Étant donné un mot $w \in \Sigma^*$, on définit les langages

$$W(w) = \{\langle M \rangle \mid w \in L(M)\} \quad \text{et} \quad \overline{W(w)} = \{\langle M \rangle \mid w \notin L(M)\}$$

contenant respectivement les codes des machines de Turing qui acceptent w, et les codes des machines de Turing qui rejettent w.

Exercice 1. *L'ensemble des codes de machines de Turing*

1. Est-ce que le langage $W(w) \cup \overline{W(w)}$ est égal à Σ^* ou à $\{0,1\}^*$ ou à L_{enc} ?
2. Est-ce que le langage $W(w) \cup \overline{W(w)}$ est décidable ? semi-décidable ?
3. Montrer que pour tous langages A, B sur l'alphabet Σ, si B est décidable et $A \neq \emptyset$ et $A \cap B = \emptyset$ alors $A \cup B \leq_m^T A$.

Exercice 2. *Accepter/rejeter un mot donné*

1. Montrer que pour tous $u, v \in \Sigma^*$, on a $W(u) \leq_m^T W(v)$.
2. Sachant que $L_u = \{\langle M \rangle \# w \mid w \in L(M)\}$ est semi-décidable mais non décidable, en déduire que pour tout $w \in \Sigma^*$ le langage $W(w)$ est semi-décidable mais non décidable.
3. En déduire que pour tout $w \in \Sigma^*$ le langage $\overline{W(w)}$ n'est pas semi-décidable (utiliser 1.3).

Exercice 3. *Accepter et s'arrêter*

On rappelle que $M(w) \uparrow$ signifie que le calcul de M sur l'entrée w ne s'arrête pas.

1. Montrer que pour toute machine de Turing M il existe une machine de Turing M' telle que $L(M') = L(M)$ et pour tout $w \in \Sigma^*$: $(w \in M'(L)) \vee (M'(w) \uparrow)$.

Étant donné un mot $w \in \Sigma^*$, on définit les langages

$$\overline{H(w)} = \{\langle M \rangle \mid M(w) \uparrow\} \quad \text{et} \quad H(w) = \{\langle M \rangle \mid M(w) \downarrow\}$$

contenant respectivement les codes des machines de Turing qui ne s'arrêtent pas sur l'entrée w, et les codes des machines de Turing qui s'arrêtent sur l'entrée w.

2. Déduire de l'exercice 2, que pour tout $u \in \Sigma^*$, le langage $\overline{H(w)}$ n'est pas semi-décidable.
3. Pour tout $u \in \Sigma^*$, le langage $H(w)$ est-il semi-décidable ? décidable ?