TD 04 – Réductions

Rappel : pour $A \subseteq \Sigma_A^*$ et $B \subseteq \Sigma_B^*$ deux langages, $A \leq_m^T B$ signifie que A se réduit à B.

Exercice 1. *(Exercice 5 du TD 03)* $\langle M \rangle$

Donner le code $\langle M \rangle$ de la machine de Turing $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, q_F)$, d'ensemble d'états $Q = \{q_0, q_1, q_F\}$, d'alphabets $\Sigma = \{0, 1\}$ et $\Gamma = \{0, 1, B\}$, et dont la fonction de transition est donnée par :

δ	0	1	B
q_0	$(q_1, 1, R)$	–	–
q_1	–	$(q_1, 0, R)$	(q_F, B, L)

Exercice 2. *(Exercice 6 du TD 03) L'arrêt*

Indiquer si chacun des énoncés qui suit est vrai ou faux, en justifiant.

1. $\nexists M_{halt}, \forall M, \forall w : M_{halt}(\langle M \rangle, w) = halt(\langle M \rangle, w)$.
2. $\forall M, \forall w, \nexists M_{halt} : M_{halt}(\langle M \rangle, w) = halt(\langle M \rangle, w)$.

Exercice 3. *Utilité des réductions*

Démontrer les quatre énoncés suivants.

1. Si $A \leq_m^T B$ et B est décidable alors A est décidable.
2. Si $A \leq_m^T B$ et B est semi-décidable alors A est semi-décidable.
3. Si $A \leq_m^T B$ et A n'est pas décidable alors B n'est pas décidable.
4. Si $A \leq_m^T B$ et A n'est semi-décidable alors B n'est pas semi-décidable.

Exercice 4. *Réductions Turing many-one*

Démontrer chacune des réductions (Turing many-one) suivantes, et indiquer ce que l'on peut en déduire quant à la (semi-)décidabilité de ces langages.

1. Réduire $L_{halt\epsilon} = \{\langle M \rangle \mid M$ s'arrête sur $\epsilon\}$ à $A = \{\langle M \rangle \mid M$ s'arrête sur $aa\}$.
2. Réduire $L_u = \{(\langle M \rangle, w) \mid w \in L(M)\}$ à $B = \{\langle M \rangle \mid bbbbb \in L(M)\}$.
3. Réduire $L_{halt\epsilon} = \{\langle M \rangle \mid M$ s'arrête sur $\epsilon\}$ à $B = \{\langle M \rangle \mid bbbbb \in L(M)\}$.
4. Réduire $B = \{\langle M \rangle \mid bbbbb \in L(M)\}$ à $L_u = \{(\langle M \rangle, w) \mid w \in L(M)\}$.
5. Réduire $B = \{\langle M \rangle \mid bbbbb \in L(M)\}$ à $L_{halt\epsilon} = \{\langle M \rangle \mid M$ s'arrête sur $\epsilon\}$.
6. Réduire $L_{\bar{u}} = \{(\langle M \rangle, w) \mid w \notin L(M)\}$ à $\bar{B} = \{\langle M \rangle \mid bbbbb \notin L(M)\}$.
7. Réduire L à $aL = \{aw \mid w \in L\}$ pour tout langage L.
8. Réduire aL à L pour tout langage $L \subsetneq \{a, b\}^*$.
9. Réduire $L_{stupide} = \{a\}$ à L_u.

Exercice 5. *Semi-décidable mais pas décidable*

Donner un exemple de langage semi-décidable, mais pas décidable (justifier).

Exercice 6. *Avec des réductions Turing many-one…*

Montrer que les langages suivants ne sont pas décidables.

1. $D = \{\langle M \rangle \mid M$ s'arrête quand on la lance sur les entrées ab et $ba\}$.
2. $E \times F$ avec $E = \{\langle M \rangle \mid b \in L(M)\}$ et $F = \{\langle M \rangle \mid a \in L(M)$ ou $b \in L(M)\}$.

Montrer que les langages suivants ne sont pas semi-décidables.

3. $G = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset\}$.
4. $H = \{(\langle M_1 \rangle, \langle M_2 \rangle) \mid L(M_1) = L(M_2)\}$.
5. $C = \{(\langle M \rangle, w) \mid M$ accepte bbw mais n'accepte pas $w\}$.

Montrer que les langages suivants sont semi-décidables.

6. $L_M = \{w \mid w \in L(M)\}$ avec M une machine de Turing.
7. $D = \{\langle M \rangle \mid M$ s'arrête quand on la lance sur les entrées ab et $ba\}$.

Montrer que le langage suivant est décidable.

8. $I = \{\langle M \rangle \mid \langle M \rangle < 2^{2^{1024}}$ et $L(M) = \{a\}\}$

✎ Du plus « simple » au plus « difficile » à décider, ordonner les langages de cet exercice.